LP 24 : Exemples de principes variationnels. Applications

Louis Usala et Julie Limonet
04/01/22

Bibliographie

- ✎ *Optique, Fondements et applications*, **José-Philippe Pérez**
- ✎ *Mécanique, Fondements et applications*, **José-Philippe Pérez**
- ✎ *Les principes variationnels en physique*, **Jean-Louis Basdevant**
- ✎ *La physique par la pratique. Agrégation*, **Baptiste Portelli, Julien Barthes**

Prérequis

niveau L3

- Mécanique newtonienne, énergies cinétique et potentielle
- Optique géométrique, optique ondulatoire
- (Lagrangien, équations d'Euler-Lagrange)

Table des matières

Introduction

En théorie, le principe fondamental de la dynamique (PDF) permet de traiter n'importe quel problème de mécanique. Le problème, c'est que les équations associées deviennent de plus en plus lourdes en ajoutant des corps en interaction.

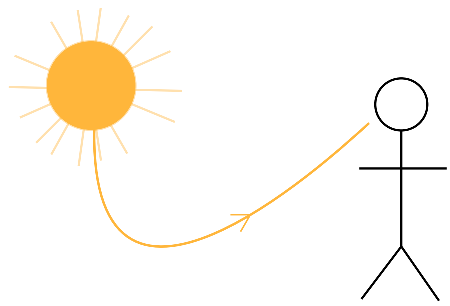
- 1 particule libre : mouvement trivial,
- 2 particules en interaction : premières difficultés (exemple de la mécanique céleste),
- 3 particules en interaction : les équations sont beaucoup plus difficiles.

En pratique, il est impossible de résoudre un problème à N corps de cette manière.
Aux XVIIIè et XIXè siècles, Euler, Lagrange et Hamilton ont cherché à comprendre différemment la physique de ce problème pour en tirer un formalisme plus efficace : la mécanique analytique. Celle-ci reprend une idée déjà présente en optique : et si la matière, de même que la lumière, devait suivre une sorte de "meilleur chemin" ? Nous verrons cette idée dans le cadre de l'optique pour ensuite exploiter son potentiel en mécanique.

1 Optique : principe de Fermat

1.1 Notion de chemin optique

Considérons une source lumineuse A et un récepteurs B assez éloignés l'un de l'autre (devant l'échelle de la longueur d'onde) pour se placer dans le cadre de l'optique géométrique. Pour aller de la source au récepteur, la lumière ne se téléporte pas : elle doit emprunter un certain chemin. Rien ne lui impose a priori d'aller en ligne droite. D'ailleurs ce n'est pas le cas pour les mirages. Pour aller de A à B, la lumière a différentes trajectoires possibles. Chacune de ces trajectoires est caractérisée par ce que l'on appelle le **chemin optique**.



Définition

Chemin optique : durée mise par la lumière pour parcourir une trajectoire γ donnée dans l'espace, mesurée en unité de longueur avec la constante de proportionnalité c :

$$L_\gamma(AB) = c\,\Delta t. \tag{1}$$

On peut se convaincre facilement que cette définition correspond à l'idée que l'on avait de chemin optique : c'est la distance que la lumière parcourrait dans le vide en une même durée. Explicitement, on peut relier le chemin optique à la distance réellement parcourue par la lumière dans un milieu donné. Pour cela, paramétrons le chemin considéré par une abscisse curviligne s. En un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, la lumière parcourt une distance infinitésimale $\mathrm{d}s$ à la vitesse $v = \frac{c}{n}$ où n est l'indice du milieu dans la zone considérée. Le chemin optique correspondant est

$$\mathrm{d}L = c\,\mathrm{d}t = c\,\frac{\mathrm{d}s}{v} = n\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Ainsi le chemin optique de la trajectoire considérée est

$$L(AB)_\gamma = \int_{\gamma_{AB}} n(\mathbf{r})\mathrm{d}s = \int_0^1 n(\gamma(u))|\gamma'(u)|\mathrm{d}u \tag{3}$$

Or, en empruntant des trajectoires de chemins optiques différents, la lumière arrive au point d'arrivée avec des phases différentes. Au point B, la lumière issue des différents chemins va interférer constructivement ou destructivement. Toutes les trajectoires ne sont donc pas équivalentes.

Transition

Quel critère peut-on mettre sur L pour déterminer la trajectoire réellement prise par la lumière ?

1.2 Enoncé du principe de Fermat

L'idée de ce principe est au départ de considérer que la lumière préconiserait naturellement l'économie de temps et emprunterait nécessairement le chemin le plus rapide pour aller d'un point A à un point B.

Important

Principe de Fermat
Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est stationnaire.
$\delta L = 0$ à l'ordre 1.

Explicitons ce critère mathématique. On considère une variation de la trajectoire

$$\delta\gamma : \left|\begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \delta\gamma(u)\end{array}\right. \quad ; \qquad \delta\gamma(0) = \delta\gamma(1) = \overrightarrow{0}, \tag{4}$$

de sorte que la nouvelle trajectoire ait toujours la même origine et le même point d'arrivée (notés A et B plus haut). La variation du chemin optique entre le chemin de référence γ et le chemin modifié $\gamma + \delta\gamma$ est notée $\delta L_\gamma = L_{\gamma+\delta\gamma} - L_\gamma$. En considérant que $\delta\gamma$ est de norme faible, on peut faire un développement de $L_{\gamma+\delta\gamma}$ à l'ordre 1 :

$$L_{\gamma+\delta\gamma} = \int_0^1 n(\gamma(u) + \delta\gamma(u))\,|\gamma'(u) + (\delta\gamma)'(u)|\,\mathrm{d}u \tag{5}$$

$$= L_\gamma + \int_0^1 \delta\gamma \cdot \left(\nabla n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)\right)\,|\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u, \tag{6}$$

en ne gardant que les termes d'ordre au plus 1 en $\delta\gamma$ et en intégrant par parties. Un chemin stationnaire vérifie $\delta L_\gamma = 0$ pour toute variation $\delta\gamma$, ce qui implique

$$\nabla n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right). \tag{7}$$

On retrouve l'équation des rayons lumineux.

Le critère de chemin optique stationnaire admet une interprétation interférentielle. En effet, la phase accumulée le long du chemin γ est $\phi_\gamma = \frac{\omega}{c}L_\gamma$. Considérons un chemin γ quelconque. En le faisant varier de $\delta\gamma$ petit, la phase accumulée le long du nouveau chemin s'écrit au premier ordre

$$\begin{aligned}
\phi_{\gamma+\delta\gamma} &= \frac{\omega}{c}L_{\gamma+\delta\gamma} && (8)\\
&= \frac{\omega}{c}\left[L_\gamma + \int_0^1 \delta\gamma \cdot \left(\nabla n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)\right)|\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u\right] && (9)\\
&= \phi_\gamma + \frac{\omega}{c}\int_0^1 \delta\gamma \cdot \left(\nabla n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)\right)|\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u. && (10)
\end{aligned}$$

En première approximation, la phase varie linéairement avec la variation, sauf autour d'un chemin vérifiant la condition de stationnarité. Le second terme de l'expression précédente est alors nul, donc la lumière suivant les trajectoires dans le voisinage de la trajectoire stationnaire interfère constructivement. On observe donc de la lumière passant par cette trajectoire.

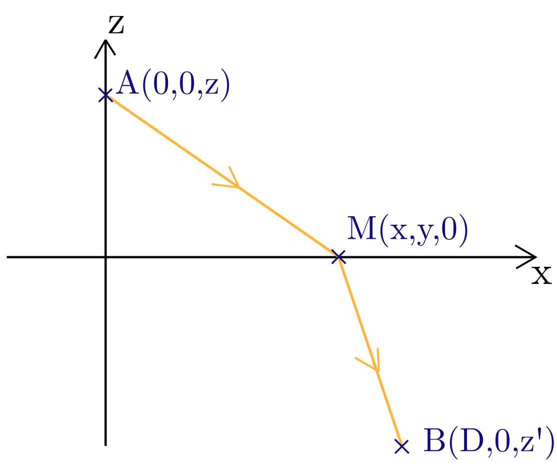
On retrouve parmi les trajectoires possibles celles dont le chemin optique est localement minimal, mais aussi celles dont le chemin optique est localement maximal. On retrouve aussi le fait que la lumière se déplace en ligne droite dans un milieu d'indice constant.

Transition

Appliquons ce principe pour retrouver la loi de Snell-Descartes.

1.3 Loi de Snell-Descartes

Considérons deux milieux d'indices constants n_1 et n_2 séparés par une interface plane dans le plan (O, x, y). Soit un rayon lumineux qui passe par $A(0, 0, z)$ dans le milieu 1 et $B(D, 0, -z')$ dans le milieu 2. (On a choisi le repérage de sorte que le plan $y = 0$ corresponde au plan contenant A et B.) Par quel point $M(x, y, 0)$ de l'interface passe le rayon lumineux ?



Le chemin optique de ce rayon s'écrit

$$\begin{aligned} L(AMB) &= \int_{\mathcal{C}_{AMB}} n(\mathbf{r}\mathrm{d}s && (11)\\ &= L(AM) + L(MB) && (12)\\ &= n_1 AM + n_2 MB && (13)\\ &= n_1\sqrt{x^2+y^2+z^2} + n_2\sqrt{(x-D)^2+y^2+z'^2}. && (14) \end{aligned}$$

De plus, il respecte la condition $\delta L = 0$, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} n_1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + n_2 \dfrac{x-D}{\sqrt{(x-D)^2+y^2+z'^2}} = 0 \\ y\left(\dfrac{n_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{n_2}{\sqrt{(x-D)^2+y^2+z'^2}}\right) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} n_1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = n_2 \dfrac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2+z'^2}} \\ y = 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \\ y = 0 \end{cases} \tag{18}$$

On démontre ainsi la loi empirique de Snell-Descartes.

Transition

Avec le principe de Fermat, on a une meilleure compréhension des raisons pour lesquelles la lumière emprunte les trajectoires qu'on lui connaît. Le raisonnement utilisé en optique peut être transposé à la mécanique. Cela revient à expliquer de la même manière pourquoi la matière se déplace suivant les lois de la mécanique. L'analogue du principe de Fermat est le principe de moindre action.

2 Mécanique : principe de moindre action

Dans cette partie, nous considérons toujours un système mécanique soumis uniquement à des forces conservatives dans un référentiel galiléen.

2.1 Notions de lagrangien et d'action

Pour décrire le mouvement d'un système simple, l'espace réel est bien adapté car il y a autant de degrés de liberté pour décrire sa position que de dimensions de l'espace. Dès lors que l'on considère des systèmes composés, l'espace réel ne suffit plus. Considérons un système de N particules numérotées de 1 à N.

Définition

Configuration : donnée de l'ensemble des coordonnées de position $\{q_i\}$ d'un système mécanique.

Le vecteur qui donne la position de chaque composante du système est $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N)^T$. C'est un vecteur à $3N$ coordonnées. L'espace vectoriel de dimension $3N$ auquel il appartient est appelé **espace des configurations**. De même qu'en optique, en considérant une configuration de départ et une configuration d'arrivée, on cherche à déterminer la trajectoire du système dans l'espace des configurations, entre ces deux points. Ceci est plus simple que de déterminer les N trajectoires non indépendantes des sous-systèmes. En mécanique newtonienne, le PFD nous permettait de discriminer la trajectoire physique suivie par le système. Quel est son analogue dans ce nouveau formalisme ?

Pour définir un analogue du chemin optique, il faut d'abord introduire la notion de lagrangien.

Définition

Le **lagrangien** $\mathcal{L}$ d'un système est la différence entre son énergie cinétique et son énergie potentielle :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p. \tag{19}$$

C'est une fonction des variables de position $\{q_i\}$, de leurs dérivées $\{\dot{q}_i\}$ et du temps t.

Interprétation : le lagrangien est une quantité qui caractérise la répartition d'énergie entre cinétique et potentielle (pour une énergie mécanique totale donnée). Il est plus grand quand le système a plus d'énergie sous forme cinétique et plus petit quand le système a plus d'énergie sous forme potentielle. Pour une bille qui roule sans frottement sur des bosses, le lagrangien est plus grand dans les creux et plus petit aux sommets.

Le lagrangien est une notion locale. Pour avoir une notion qui caractérise une trajectoire entière, on définit l'action.

Définition

L'**action** $\mathcal{S}$ est l'intégrale sur le temps du lagrangien le long d'une trajectoire donnée :

$$\mathcal{S}[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

L'action est le bon analogue du chemin optique pour définir un principe variationnel.

Important

Principe de Hamilton / de moindre action
Entre deux instants t_1 et t_2, le mouvement d'un système mécanique entre deux configurations A et B est celui qui réalise une valeur stationnaire de l'action.
$\delta\mathcal{S} = 0$ à l'ordre 1.

En particulier, comme pour le chemin optique, le cas le plus fréquent est celui d'un minimum de l'action, d'où le nom du principe.

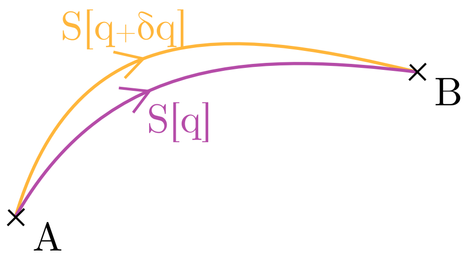
Interprétation 1 : les zones où le lagrangien est grand sont des zones où le système a une grande vitesse. Physiquement, on s'attend à ce que le système passe moins de temps dans ces zones que dans les zones où le lagrangien est petit. L'action pondère le lagrangien par la durée $\mathrm{d}t$, donc elle est d'autant plus petite que le système passe du temps dans des zones à haut potentiel, d'où le fait que la trajectoire physique minimise l'action.
Interprétation 2 : Minimiser l'action revient à passer par des zones où le lagrangien est faible, c'est-à-dire des zones où la vitesse est faible. Ainsi, cela revient à parcourir un chemin plus court puisque la durée de parcours est fixée. On retrouve ici l'analogie avec la minimisation du chemin optique.

Transition

Par analogie avec l'optique, nous avons déterminé un principe qui semble donner les trajectoires d'un système. Mais est-ce que ce nouveau principe est en accord avec les lois de la mécanique déjà connues ?

2.2 Démonstration des équations d'Euler-Lagrange et du PFD

Considérons un lagrangien L fonction des coordonnées q_i et de leurs dérivées et indépendant du temps. Soient une trajectoire stationnaire $\mathbf{q}(t)$ dans l'espace des configuration et une variation $\delta\mathbf{q}(t)$.



La variation d'action à l'ordre 1 est nulle, ce qui se traduit par

$$\delta\mathcal{S}[\mathbf{q}] = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \right) \mathrm{d}t \tag{22}$$

$$= \left[\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i \right] + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \right) \delta q_i\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Le terme entre crochets est nul d'après les conditions aux limites sur $\delta\mathbf{q}$. L'égalité étant valable pour toute variation, il en résulte l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}. \tag{24}$$

A partir de l'équation d'Euler-Lagrange, il est possible de démontrer le principe fondamental de la dynamique. Le principe de Hamilton donne bien les mêmes résultats que le PFD.

2.3 Applications

Ce formalisme est applicable à de nombreux domaines de la physique comme l'électromagnétisme ou la thermodynamique statistique.

Ce formaliste est approprié pour appliquer le théorème de Noether qui permet de trouver de manière systématique des quantités conservées au cours du mouvement.

Important

Théorème de Noether
A toute transformation infinitécimale laissant l'action invariante à une constante près correspond une grandeur qui se conserve.

Une transformation infinitécimale des coordonnées est un changement des coordonnées qui dépend d'un ou plusieurs paramètres continus. Citons par exemple la translation spatiale $q_i \to q_i' = q_i + q_{0,i}$ (avec $q_{0,i}$ constant), la rotation $\mathbf{q}' = R\mathbf{q}$ (avec $R \in SO_n$), la transformation de Galilée $\dot{q}_i \to \dot{q}_i' = \dot{q}_i + v_{0,i}$

(avec $v_{0,i}$ constant) et la translation temporelle $t \to t' = t + t_0$ (avec t_0 constant). Le théorème de Noether explicite la quantité conservée (ou charge conservée) associée à chacune de ces transformations. Une transformation des coordonnées s'écrit de manière générale

$$\begin{cases} q_i \to q_i' = q_i + \Delta q_i(q_j, t) \\ t \ \to t' \ = t + \Delta t(t) \end{cases} \tag{25}$$

avec $\Delta q_i(q_j, t)$ et Δt des fonctions quelconques infinitécimales.

Définition

Charge de Noether
Si la transformation précédente laisse invariante l'action, alors la quantité

$$Q = -\Delta t \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) + \sum_i \Delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{26}$$

appelée charge de Noether, est conservée au cours du mouvement.

Ce résultat permet de montrer que l'invariance de l'action par translation engendre la conservation de l'impulsion dans la direction de la translation. L'invariance par rotation autour d'un axe engendre la conservation du moment cinétique selon cet axe. Enfin, l'invariance par translation temporelle engendre la conservation de l'énergie.

Conclusion

Les principes variationnels permettent une vision plus large de la physique en regroupant sous un même formalisme diverses branches de la physique. Notons que la manière d'aborder ce principe peut paraître contre-intuitive : on fixe le point d'arrivée avant de déterminer le chemin. Est-ce que le système "sait" déjà où il doit aller avant de choisir le chemin qu'il empruntera pour y aller ? Néanmoins, cette violation apparente de la causalité n'en est pas une. On montrerait dans un prochain temps l'équivalence mathématique entre ce formalisme et le formalisme hamiltonien dans lequel ce problème n'existe pas. Enfin, notons que le formalisme hamiltonien, qui prolonge le formalisme lagrangien, est le plus adapté pour fonder la mécanique quantique (c.f. transformation de Wigner-Weyl). Ceci n'est pas étonnant : on a vu que ce formalisme traite les ondes et les systèmes matériels de manière analogue. C'est une nécessité pour théoriser des systèmes qui ont à la fois des propriétés d'ondes et de corpuscules.

Questions

- **Tu nous dis que les principes variationnels permettent une description plus large, est-ce que tu peux être plus spécifique ?** Généralisation des lois physiques. On voit que la seule idée du chemin stationnaire permet de redémontrer des résultats.

- **En quoi c'est une généralisation ? Parce que si ça ne permet que de redémontrer des choses qu'on sait déjà c'est juste une réécriture.** C'est une généralisation car on peut développer de nouvelles branches de la physique sous cette forme. ex : physique statistique, problèmes d'optimisation, théorie des champs...

- **Qu'est-ce que tu traçais dans première partie, c'est quoi la "trajectoire" de la lumière ?** rayon lumineux dans le cadre de l'optique géométrique. (Préciser que l'on se place dans le cadre de l'optique géométrique : la lumière se propage dans un milieu diélectrique linéaire dont l'indice optique varie lentement par rapport à la longueur d'onde du rayonnement considéré.)

- **Définition d'un rayon lumineux** Perpendiculaire aux fronts d'ondes, théorème de Malus. **Lien entre surface d'onde et chemin optique ?** Surfaces d'isochemin optique
- **Réécris la définition du chemin optique** Ne pas oublier le vecteur. Le chemin optique est défini sur un chemin en particulier, à faire apparaître. A priori la définition donnée dans ce rapport est corrigée.
- **Exemple d'analogie mécanique à l'optique** Equation des rayons lumineux est analogue au PFD. Equation des rayons pour une onde de surface. Analogie stricte avec le problème de Fermat en optique. Bonne transition pour la partie mécanique. Parler de systèmes mécaniques discrets. Pour pousser l'analogie, comparer le principe de Fermat et le principe de moindre action dans sa version Maupertuis (en quantité de mouvement). Les versions locales donnent l'équation des rayons lumineux et le PFD. c.f. **Portelli, Barthes** pour l'analyse de la propagation dans une fibre à gradient d'indice qui se ramène à celle d'une particule massique dans un champ de force centrale.
- **Pour principe de Fermat, $\delta L = 0$ au premier ordre, tu peux détailler ?** Premier ordre en la distance entre les deux chemins. **ça veut dire quoi la distance entre les deux chemins ?** Expliciter le calcul avec une différence entre deux intégrales. La "distance" entre deux chemins se ramène à la norme de la variation $\int |\delta\gamma|$.
- **Dans un milieux d'indice constant, lumière en ligne droite, toujours vrai ?** Pas à proximité des trous noirs. En mécanique relativiste c'est toujours vrai. Sinon la lumière suit les géodésiques.
- **Chemin maximal quand reflexion sur un miroir plan, ré expliquer le schéma** Le chemin optique est stationnaire sur chemin où l'angle d'incidence est égal à l'angle de reflexion. Pour miroir suffisamment courbé, un seul point possible, celui pour chemin optique maximum. Les différents cas sont détaillés dans le Pérez d'optique.
- **Stationnaire c'est forcément minimum ou maximum ?** Peut être maximal dans une direction, minimal dans l'autre. On parle de point col.
- **Loi de Descartes c'est juste $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$?** La projection du vecteur d'onde dans le plan de l'interface est conservée. **On peut le démontrer avec le principe de Fermat ?** Si on travaille que avec des vecteurs on peut tout redémontrer sur les lois de Snell-Descartes. Il ne faut pas se placer dans un repère.
- **Repère Galiléen t'es sûr de ton coup ?** Référentiel, pas repère
- **Vecteur avec toutes les coordonnées a une trajectoire ?** On s'intéresse à la description du système dans l'espace des configurations. Chaque point de cet espace correspond à la donnée de l'ensemble des positions du système. La trajectoire de ce vecteur donne l'évolution de chaque degré de liberté du système en fonction du temps.
- **Coordonnées toujours en cartésien ?** Non, exemple du pendule.
- **Comment s'appellent ces contraintes qui diminuent le nombre de degrés de liberté en mécanique ?** liaisons holonomes.
- **Exemples de liaisons pas holonome ?** Patin qui glisse sur une sphère
- **Prérequis : comment on peut introduire les équations d'Euler-Lagrange sans parler de principe de moindre action** Avec le PFD et la définition du Lagrangien, en le posant comme la différence entre énergie cinétique et potentielle.
- **A quoi il te sert ce prérequis ?** Gagner du temps et ne faire que la partie de démo $\delta S = 0$ vers Euler-Lagrange. Mais le plan de cette partie est à discuter.

- **Pourquoi on a le droit de faire une intégration par partie ?** Variation de trajectoire ne dépend pas du temps. On peut donc échanger dérivée temporelle et opérateur δ. Le terme intégré est nul car la variation de trajectoire est nulle à l'instant initial et l'instant final.
- **Tu dis que Lagrangien est une bonne mesure de la vitesse. Est-ce que le Lagrangien est vraiment une mesure de quelque chose ? Quel est le problème par rapport à l'énergie potentielle ?** L4énergie potentielle est définie à une constante près donc le Lagrangien aussi. Vitesse est une observable, pas le Lagrangien (contrairement à l'action). Dangereux de dire que Lagrangien est une mesure. Faire attention avec les analogies avec Fermat. "Action c'est le chemin optique". L'analogie c'est surtout qu'une quantité est prise comme stationnaire. Aller plus loin c'est délicat. Lagrangien donne mesure de différence de comportement entre l'énergie cinétique et potentielle. Ca ne marche qu'à énergie mécanique fixée. Pour faire une analogie plus propre, partir du principe de Maupertuis et de l'expression de l'action en terme de quantité de mouvement.
- **Electrocinétique : on peut la retrouver par un principe variationnel type Euler-Lagrange ?** Charge comme coordonnée généralisée et grandeur $\propto$ courant comme grandeur conjuguée.
- **Autre principe variationnel qui permet de traiter l'électrocinétique, pour retrouver la loi des noeuds par exemple ?**
- **Pour théorème de Noether, réciproque vraie ?** Oui. Le formalisme hamiltonien permet de montrer qu'à une charge conservée est associée une symétrie des coordonnées.
- **Tease sur quantification des théories** L'idée est de trouver des objets mathématiques qui permettent de décrire objets quantiques : on utilise le formalisme Halmitonien dans l'espace de Hilbert. Et on remplace les crochets de Poisson par commutateurs. Transformation de Wigner-Weyl.
- **Est-ce que tu connais d'autres principes variationnels ?** De désordre maximal, entropie de Shannon maximale. Principe en capillarité, système qui minimise son interface. Principe de dissipation minimale pour loi des noeuds.

Commentaires

- Avoir un exemple de Lagrangien, qui dépend de $\ddot{q}$. (Après vérification, on trouve ça dans des problèmes mathématiques d'optimisation, mais pas dans des problèmes physiques de mécanique lagrangienne.)
- Première partie sur chemin optique un peu confuse.
- Attention demander autorisation avant d'effacer quoi que ce soit au tableau
- Un principe variationnel se justifie par les conséquences qu'on en tire, attention aux interprétations.
- Être calé sur les notions de quantification et d'utilisation de principes variationnels si on décide de les aborder.
- préciser les invariances pour le théorème de Noether.
- Ouverture sur mécanique quantique un peu lointaine.
- Ne pas mettre Euler-Lagrange dans les prérequis.
- Ecrire l'intro historique pour ne pas s'embrouiller.

- Manque peut être un peu de rigueur sur le fond. S'entraîner à dire les choses de façon efficace.
- Applications manquent un peu. Elles ne montrent pas l'originalité des principes variationnels. Il faut mettre en avant les principes variationnel, traitement global et pas local, choses plus compliquées (symétries et contraintes). Tu as fait retrouver des lois locales. Il faut faire au moins un exemple original qui montre l'intérêt. Stigmatisme (dans BFR) à partir principe de Fermat, mirages, gradient de sel. Peut-être remplacer Snell-Descartes par les mirage. Equations de London en électromagnétisme. Courbe brachistochrone ou caténoïde.
- sur réponse aux questions : tu prends trop de temps. Donc points non élucidés. Etre plus efficace.
- Faire l'analogie entre rayons lumineux droits et particule soumise à aucune force
- meilleure analogie en partant de l'équation des rayons lumineux avec le PDF (Elle est dans le Pérez.)
- Préciser que tu te mets dans le cadre de l'optique géométrique
- Préciser que les points A et B sont fixés (i.e. que la variation de trajectoire est nulle au début et à la fin).
- T'as été un peu trop loin dans la dernière partie (Noether, quantification...), le jury va te pousser.
- Remise en question de causalité à mettre avant peut-être ? Au moins dire qu'on fixe le point de départ et le point d'arrivée. Et on n'a pas vraiment de problème de causalité car il existe des versions locales équivalentes.
- Dans cette leçon il faut au moins un passage au local (i.e. Snell-Descartes, Equation des rayons lumineux, Euler-Lagrange, PFD...)