

Rapport de correction – Leçon de physique

Préparation à l'oral de l'agrégation externe de physique – Session 2022

LP 33 : *Moment magnétique et expérience de STERN et GERLACH.*

- Date et horaire : Vendredi 15 octobre 2021 13h30 (Amphi. G)
- Présentateur : VINCENT FOREST (Bin 06)
- Correcteurs : HECTOR HUTIN, HERVÉ GAYVALLET

Plan de la leçon présentée.

1. Introduction (oralement).
2. Moment magnétique d'une boucle fermée.
 1. Définition.
 2. Moment magnétique atomique.
 3. Magnéton de BOHR.
 4. Caractéristique des aimants.
3. Dipôle magnétique dans un champ magnétique.
 1. Champ magnétique uniforme.
 2. Champ magnétique non uniforme.
 3. Énergie potentielle d'origine magnétique.
4. Expérience de STERN et GERLACH.
 1. L'expérience.
 2. Les attentes dans le modèle classique.
 3. Les résultats.

Remarques générales.

1. Le plan répond bien à la problématique sous-tendue par le titre. L'exposé a été conduit avec clarté et dynamisme.
2. Certains points ont manqué de contextualisation. C'est notamment le cas de la présentation de la force d'interaction entre deux aimants.
3. Les modèles n'ont pas été systématiquement discutés, ni les résultats analysés.
4. L'analyse dimensionnelle, si elle permet de s'affranchir des développements mathématiques, n'a pas vocation à occulter la physique mise en œuvre dans l'étude conduite. Au contraire, le prix à payer de cette économie de calculs est celui d'une analyse physique approfondie permettant de délimiter au mieux l'ensemble des paramètres pertinents à prendre en compte et, éventuellement, trouver des voies pour "s'en sortir" lorsqu'ils sont trop nombreux.
Rappelons que, si l'on note V le nombre de variables que l'on cherche à mettre en relation et D ($D < V$) celui des dimensions indépendantes mises en jeu, on peut construire $G = V - D$ groupements (de variables) Π_i sans dimension indépendants. Ces groupements sont reliés à travers une certaine fonction $\Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_G) = 0$. Il faut alors tenter de trouver des informations sur cette fonction. Cette étape nécessite une analyse en profondeur de la situation.
5. L'exposé a duré 31 minutes sur les 40 permises. 10 minutes n'auraient pas été de trop pour étudier plus en détail l'expérience de STERN et GERLACH.

Remarques détaillées.

1. Dans la mesure où l'on se trouve amené à établir un lien entre moment cinétique et moment magnétique, il peut être utile de donner (ou, au moins, d'avoir en tête) leur définition générale :

$$\begin{cases} \vec{L}_O = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) \rho_m(M) d^3M \\ \vec{M}_O = \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) \rho_q(M) d^3M \end{cases} \quad (1)$$

35 Si la situation est telle que $\rho_q(M) = k\rho_m(M)$ ($\forall M \in S$) alors $\vec{M}_O = k\vec{L}_O$. Dans le cas du mouvement orbital de l'électron, selon la vision classique, $k = q/m_e$ ($q = -e$).

2. Dans le calcul du moment magnétique orbital, il est nécessaire de préciser que l'expression adoptée du courant ($I = q/T$) présuppose que l'on a effectué une moyenne sur une période. Les phénomènes pouvant être considérés par la suite devront alors être de temps caractéristique supérieur à cette

40

période.

3. Expression du magnéton de BOHR.

On peut, certes, s'appuyer sur une analyse dimensionnelle pour accéder "rapidement" à certains résultats. Cette approche ne doit toutefois pas laisser penser qu'elle permet d'obtenir un résultat sans avoir à comprendre la physique qui le détermine. Il est donc essentiel de bien poser le problème, d'établir la liste des paramètres que l'on soupçonne d'intervenir (sur la base d'une argumentation robuste), de fixer éventuellement un cadre d'hypothèses qui limitera alors la portée du résultat alors obtenu, et, enfin, de vérifier que cette approche permettra d'atteindre le résultat (se reporter à l'avant-dernière remarque générale).

45

Il fut annoncé d'emblée que μ_b dépendait de e , m et h . Pourquoi ε_0 n'intervient-il pas ? Sans doute parce que l'on connaît le résultat ! Une analyse dimensionnelle digne de ce nom aurait recensé ce paramètre comme étant susceptible d'intervenir.

50

Une méthode plus euristique, restant toutefois simple, consiste à postuler que l'énergie mécanique de l'électron sur son orbite est minimum. Cette énergie s'exprime, dans le cadre du modèle de BOHR :

$$E = \frac{p^2}{2m} - K^2 \frac{1}{r} \quad \text{où} \quad K^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (\text{notons que } K^2 \text{ est une grandeur purement mécanique}) \quad (2)$$

L'ingrédient quantique provient de la relation d'indétermination de HEISEINBERG :

$$\delta p \delta r \sim h \quad \text{où} \quad \delta p \sim p \quad \text{et} \quad \delta r \sim r \quad \text{sur une trajectoire circulaire.} \quad (3)$$

La minimisation de E par rapport à r permet d'accéder à une longueur caractéristique a que l'on identifie au rayon de BOHR (à un facteur numérique près). On dispose alors d'une longueur a , d'une charge e et d'un temps (PFD : $ma/T^2 \sim K^2/a^2$) caractéristiques pour construire une grandeur homogène à μ_b . Il apparaît alors, effectivement, que ε_0 n'intervient pas.

55

Une remarque sur le fait que h intervient au numérateur et m au dénominateur, soulignant le caractère quantique de cette grandeur, serait la bienvenue.

Notons que dans ce problème à deux corps émerge une longueur caractéristique $a = a(K^2, h, m)$ dépendant uniquement des paramètres fondamentaux du problème (et non des conditions initiales, par exemple). Dans le problème de KEPLER, qui peut paraître formellement proche, il n'existe pas de longueur caractéristique car si l'on peut faire correspondre ε_0^{-1} à \mathcal{G} , h n'a pas d'homologue (c'est-à-dire, n'est plus un paramètre pertinent à cette échelle).

60

Pour terminer la caractérisation d'un dipôle magnétique, il conviendrait de représenter ses lignes de champ (la photographie présentée se rapportait à un aimant). À ce sujet, les lignes de champ

65 magnétique d'une boucle de courant et les lignes de champ électrique d'un dipôle de charges ne sont comparables que loin de leur source. En effet, les lignes de champ magnétique sont fermés sur elles-même tandis que celles du champ électrique relient les deux charges en interaction.

4. Caractéristique des aimants.

70 Le terme "d'interaction" magnétique entre deux aimants serait préférable à celui "d'adhérence". Ce dernier se rapporte plutôt à des forces de courte portée, ce qui n'est pas le cas pour l'interaction dipolaire.

Cette partie doit être mieux introduite pour comprendre l'intérêt de transiter du dipôle magnétique à l'aimant.

75 Là encore, l'analyse dimensionnelle doit être conduite avec davantage de rigueur (en commençant par présenter un schéma du dispositif...). Quel est le lien entre un dipôle magnétique et un aimant ? Quelle est l'origine de l'interaction ? Pourquoi est-elle attractive ? Que représente B ? Est-ce une grandeur intrinsèque de l'aimant ? Quel est le lien entre B et le cycle d'hystérésis du matériau ?

Bien sûr, il faut être en mesure d'indiquer comment on aborderait cette étude par une autre méthode.

80 On peut (doit ?) dire quelques mots à propos de la dépendance en B^2 de la force d'interaction.

5. Dipôle magnétique dans un champ magnétique.

Une figure représentant la force subie par différents points de la boucle de courant serait utile.

85 Il n'est pas nécessaire de faire le calcul de la force agissant sur un dipôle magnétique immergé dans un champ magnétique uniforme pour prouver qu'elle est nulle. Ce résultat est précisément la conséquence de l'uniformité de \vec{B} (elle ne permet pas de définir une direction privilégiée). Un raisonnement sur la figure permet également de conclure rapidement et très simplement.

Dans la mesure où le calcul de la force a été développé, on attend que soit au moins indiqué comment l'expression $\vec{\Gamma}_A = \vec{M} \wedge \vec{B}$ s'obtient (même si on ne développe pas les calculs) :

$$d\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M)) = I \left\{ (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{B}(M)) d\vec{\ell} - (\overrightarrow{AM} \cdot d\vec{\ell}) \vec{B}(M) \right\} \quad (4)$$

où $\overrightarrow{AM} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ($\forall M \in \mathcal{B}$) si l'on intègre le long d'une boucle circulaire (de centre A). En décomposant ensuite \vec{B} en une composante normale (N) au plan de la boucle et une composante (T) dans ce plan, on obtient :

$$d\vec{\Gamma}_A = I (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{B}_T(M)) d\vec{\ell} \quad (5)$$

Dans le cas où \vec{B} est uniforme, une figure guide le choix d'un paramétrage de l'intégration adapté à la situation (et de mieux comprendre l'origine de ce moment).

Dans le cas où \vec{B} n'est pas uniforme, pourquoi l'expression de $\vec{\Gamma}_A$ donnée reste-t-elle la même que dans le cas où \vec{B} est uniforme, en remplaçant seulement \vec{B} par \vec{B}_A ? Il faut au moins se poser cette question. Question à laquelle on ne peut répondre qu'en posant le problème. Développons $\vec{B}_T(M)$ autour du point A :

$$\vec{B}_T(M) = \vec{B}_T(A) + \frac{\partial B_{Ti}}{\partial x_j} R_j \vec{e}_i \quad \text{où} \quad \vec{R} = \overrightarrow{AM} = R_k \vec{e}_k \quad (6)$$

(convention de sommation sur les indices répétés).

On obtient alors :

$$d\vec{\Gamma}_A = d\vec{\Gamma}_A^{\text{unif}} + I \frac{\partial B_{Ti}}{\partial x_j} R_j R_i d\vec{\ell} \quad (7)$$

90 La composante $d\vec{\Gamma}_A^{\text{unif}}$ fait intervenir des termes du premier ordre en \vec{R} et celle liée à la non uniformité de \vec{B} des termes du deuxième ordre. Sous certaines conditions de “relative non uniformité” de \vec{B} , la deuxième composante peut être négligée devant la première. Notons qu’un calcul analogue, mais portant sur la force, établit que la composante liée à la non uniformité de \vec{B} concerne des termes du premier ordre en \vec{R} (c’est d’ailleurs l’ordre non nul le plus bas). Force et moment sont donc bien du même ordre, il est important de le mentionner.

Il faut préciser comment s’obtient l’expression de l’énergie potentielle d’interaction entre un dipôle magnétique permanent et un champ magnétique. Il convient d’analyser l’expression donnée. Notons que force et moment peuvent s’obtenir à partir de cette énergie.

On peut évoquer, ne serait-ce que pour illustrer le phénomène, l’analogie entre le mouvement de précession d’un moment magnétique dans \vec{B} et celui d’une toupie (on peut d’ailleurs présenter l’expérience). Les ingrédients physiques sont différents mais les résultats sont comparables (dans un certain cadre d’hypothèses).

Notons $\vec{\sigma}_{3/0}$ le moment cinétique de la toupie (3) par rapport au point-pivot O, relatif à son mouvement par rapport au référentiel galiléen (0). L’écriture du PFD (pour la rotation) conduit aux relations :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{3/0}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{3/0}}{dt} \right|_2 + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{\sigma}_{3/0} = \vec{OG} \wedge m\vec{G} \tag{8}$$

On adopte l’enchaînement des repères (précession, nutation, rotation propre) tel que :

$$(0) \xrightarrow{\Psi} (1) \xrightarrow{\theta} (2) \xrightarrow{\varphi} (3) \tag{9}$$

Par ailleurs, on se place dans le cas d’une toupie axisymétrique (moments d’inertie tels que $A = B$, la toupie possède alors le même tenseur d’inertie, exprimé dans les repères de projection (2) et (3)). Enfin, on établit qu’un mouvement tel que $\left. \frac{d\vec{\sigma}_{3/0}}{dt} \right|_2 = \vec{\omega}$ existe (angle de nutation $\theta = \text{Cste}$ et vitesse de précession $\dot{\Psi} = \text{Cste}$). L’analogie apparaît alors. Notons que la vitesse de précession est donnée par la seconde égalité (PFD). La première, sur laquelle repose l’analogie, n’est qu’une relation cinématique.

105 6. Expérience de STERN et GERLACH.

Il est utile de préciser pourquoi on utilise des atomes d’argent dans cette expérience : $\vec{L} = \vec{0}$ dans l’état fondamental et un unique électron sur la couche périphérique ($[\text{Kr}]4d^{10}5s1$), donc $\vec{S} = \pm \frac{1}{2} \hbar \vec{u}_z$.

Il est important de donner la forme de la dépendance spatiale du champ magnétique $\vec{B}(y, z)$, en se limitant au premier ordre en y et z (cela entre dans le cadre de la modélisation de l’expérience). Pour cela on s’appuie sur ses symétries et l’on tient compte de ses propriétés fondamentales : $\text{div} \vec{B} = 0$ et $\text{rot} \vec{B} = 0$ (champ statique dans le vide). Ces dernières n’autorisent pas tout choix arbitraire de la dépendance spatiale de \vec{B} . Notamment, elles interdisent de choisir la forme $\vec{B} = B(z) \vec{u}_z$. On peut établir que :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + B'(z \vec{e}_z - y \vec{e}_y) \tag{10}$$

★ ★
★