LP36 : Lois de conservation en mécanique. Applications

Rémi de Guiran, Alexandre Koessler

Niveau :

Commentaires du jury

- **Jusqu'en 2021 :** Le titre était "lois de conservation en dynamique", et semble-t-il est toujours le même pour l'agreg docteur.
- **2017 :** Des exemples concrets d'utilisation des lois de conservation sont attendus.
- **2016 :** Lors de l'entretien avec le jury, la discussion peut aborder d'autres domaines que celui de la mécanique classique
- **2015 :** Cette leçon peut être traitée à des niveaux très divers. L'intérêt fondamental des lois de conservation et leur origine doivent être connus et la leçon ne doit pas se limiter à une succession d'applications au cours desquelles les lois de conservation se résument à une propriété anecdotique du problème considéré.
- **Jusqu'en 2014 :** le titre était : Lois de conservation en dynamique des systèmes.
- **2009 :** Le jury attend que le candidat choisisse un nombre d'exemples limité, mais qu'il les analyse en profondeur.
- **2008 :** Il existe d'autres exemples que les interactions newtoniennes. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale.
- **Autres commentaires sans plus de précisions :** Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est généreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables. Il est très maladroit d'insister sur des illustrations où, justement, il n'y a pas de conservation simple, le système étudié n'étant par exemple pas isolé. Il existe d'autres exemples que les interactions newtoniennes. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale. L'introduction de la particule fictive ne se fait pas au hasard, il faut montrer l'équivalence du problème réel avec ce modèle,et cela constitue le point clé de la leçon. La confrontation du modèle aux résultats expérimentaux est nécessaire (en astronomie ou en spectroscopie de l'atome d'hydrogène par exemple). Les trajectoires fermées ne sont pas possibles pour tout type de potentiel central. Ne pas utiliser les formules de Binet. Les applications peuvent ne pas être restreintes au potentiel en 1/r. Bien mettre en évidence la notion d'intégrale première du mouvement. Il convient de préciser correctement les hypothèses faites : il n'existe pas que des forces centrales dans la nature, la loi d'action et de la réaction ne s'applique pas automatiquement. Il est erroné d'afrmer que toutes les trajectoires résultant de l'interaction entre deux corps sont des courbes fermées, et encore plus que ce sont des coniques. Justifier les hypothèses de la réduction au cas de deux corps ponctuels et des forces centrales. Pour déduire de la conservation du moment cinétique le caractère plan des trajectoires, l'argument r perpendiculaire à L suffit. Insister sur les lois de Kepler plutôt que sur les formules de Binet. Montrer que l'expression des lois de la mécanique dans le référentiel barycentrique fait apparaître la masse réduite, et conduit à une équation différentielle pour le vecteur position relative r. Il faut montrer comment interviennent les lois de conservation, au moins pour la quantité de mouvement,le moment cinétique et l'énergie mécanique.

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Mécanique du solide indéformable
- ➢ Mécanique des fluide

Expériences

- ☕ Tabouret d'inertie avec sa roue

Table des matières

Introduction

Vous avez découvert la mécanique au lycée puis avez continuement approfondi vos connaissances de cette discipline depuis, avec la mécanique du point, des systèmes de points, du solide indéformable et la mécanique des fluides. Vous êtes donc très familier avec cette discipline.

But

En physique, une loi de conservation exprime qu'une propriété mesurable particulière d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de ce système
Le but de cette leçon est de vous présenter certains aspects de la mécanique sous l'angle des lois de conservations et de montrer en quoi l'utilisation de ces lois peut se revéler pertinente.

Les précédentes années, vous avez déjà utilisé des lois de conservation pour la résolution de problèmes, par exemple :

- Conservation de l'énergie mécanique : chute libre
- conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique : problème à deux corps

Message clé

On se placera dans le cadre de la mécanique classique : l'espace et le temps sont les même pour tout observateur quelque soit sont référentiel d'observation.
Sujets d'études : les applications concerneront des systèmes de solides, mais les lois de conservation énoncées sont beaucoup plus générale.

Remarque les sytèmes de solides sont des systèmes **fermés** (ie pas d'échange de matière avec l'extérieur). Ce qui nous permet de présenter une loi de conservation que vous connaissez déjà : la loi de conservation de la masse.

En mecanique classique, il ne peut y avoir création de matière (ref Lavoisier). Dans le cas où le système est **fermé**, il n'échange pas de matière avec l'extérieur. **La masse est conservée**.

1 Conservations en mécanique des systèmes de solides

1.1 Conservation de la quantité de mouvement

Première loi de Newton appliqué à un système de solides
Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}} \quad (1)$$

Si $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = 0$: $d\overrightarrow{p}/dt = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{cte}$. On obtient la une intégrale première du mouvement. **La quantité de mouvement est conservée**.

Exemples : https://www.reddit.com/r/physicsgifs/comments/rqwknk/conservation_of_linear_momentum/

https://youtu.be/Kf0bBxmNeec?t=92

Cas du skateboard : le sytème total est homme+skate+ballon. On suppose les forces horizontales négligeables. Il y a eu transfert mutuel de quantité de mouvement entre les le ballon et homme+Skatebord. Le ballon va dans un sens, l'homme+skateboard dans l'autre mais la quantité de mouvement totale du système est conservée.

1.2 Conservation du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Sigma \mathbf{M_{ext}} \quad (2)$$

Si $\Sigma \mathbf{M_{ext}} = 0$: $d\mathbf{j}/dt = 0$, ce qui implique $\mathbf{j} = \mathbf{cte}$. On obtient la une intégrale première du mouvement. **Le moment cinétique est conservé**

Exemple :

https://youtu.be/M6PuutIm5h4?t=3

Important

Cas particulier. Le théorème du moment cinétique s'applique en G dans le référentiel barycentrique, sans que celui ne soit nécessairement Galiléen

1.3 Conservation de l'énergie mécanique

Là c'est un peu plus compliqué. Même en considérant un système totalement isolé, il n'est pas nécessaire que l'énergie mécanique se conserve.

En effet, dans un système isolé, l'énergie totale se conserve, mais il peut y avoir conversion entre l'énergie interne et l'énergie mécanique, dès lors qu'il y a travail des forces internes. Ok pour un solide indéformable, plus nécessairement pour un système de solides, encore moins pour un fluide.

il faut donc être très prudent lorsqu'on aborde ce point.

2 Applications autour de la conservation du moment cinétique

2.1 Expérience du tabouret tournant avec volant d'inertie

Présentation de l'éxpérience.

Modélisation générale

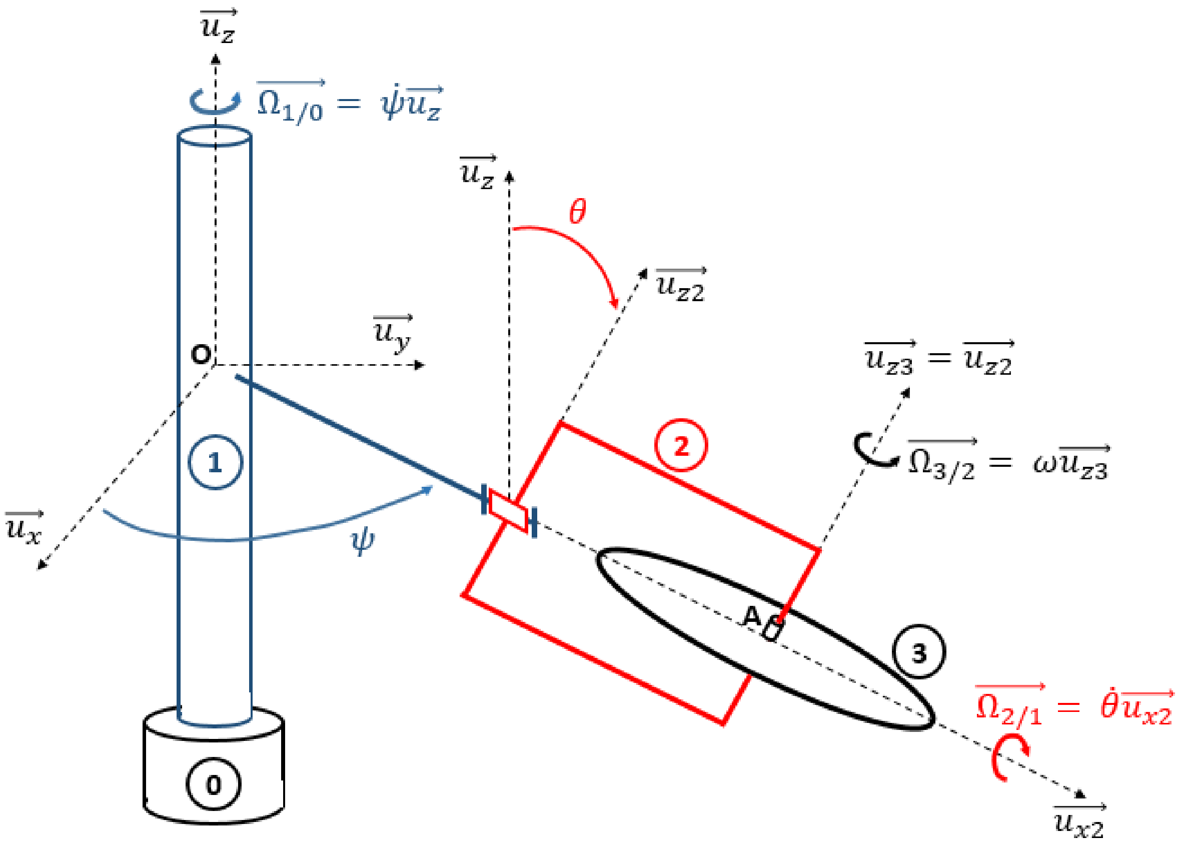

Figure 1 – Mate moi ce schéma frérot

Modélisation figure 3 : on considère le système {expérimentateur+tabouret} relié au sol par une liaison pivot parfaite orientée selon l'axe vertical Oz. Le système se décompose en 3 sous-systèmes :

- 1 : l'expérimentateur, de vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\psi}\overrightarrow{u_z}$ par rapport au référentiel galiléen,
- 2 : les bras de l'expérimentateur de vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_{x2}}$ par rapport à 1
- 3 : la roue en liaison pivot supposée parfaite avec 2, de vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \omega\overrightarrow{u_{z3}}$ par rapport à 2

Hypothèse simplificatrice :

- on s'interesse aux états finaux et initiaux du système, pas à la phase de retournement. On considérera donc **1** et **2** solidaires, qu'on note **1** sur le schéma ci dessous.

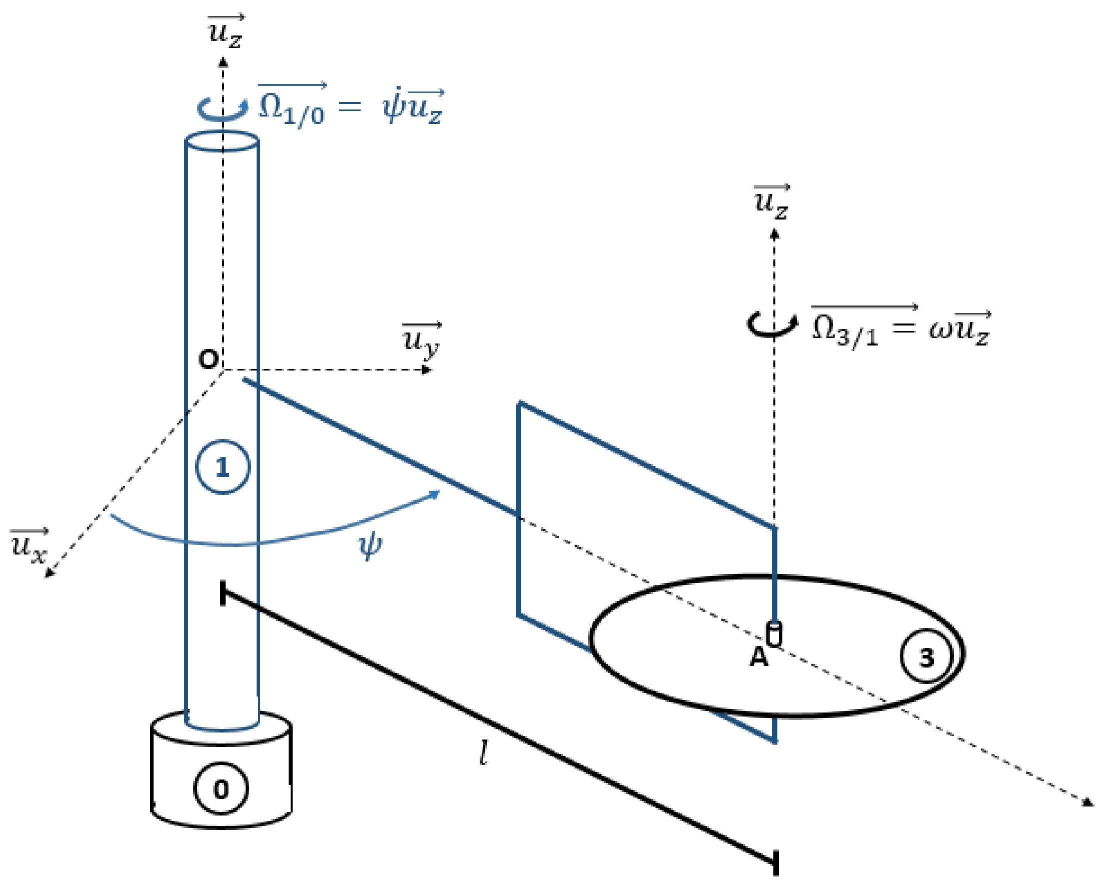

Figure 2 – Mate moi ce schéma frérot

On définit les **données d'inertie :**

- moment d'inertie de $\{1\}$ suivant (Oz), noté I_{z1}
- moment d'inertie de $\{3\}$ suivant (Az_3), noté I_{z3}
- masse du système $\{3\}$, notée m_3.

Hypothèse : la vitesse de rotation de la roue $\{3\}$ par rapport à l'expérimentateur est constante : $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \omega_0\vec{u_z}$ avant t_0 et $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = -\omega_0\vec{u_z}$ après t_{fin}.
ATTENTION ! ! : ceci n'est qu'une approximation valable en supposant $|\overrightarrow{\Omega_{3/1}}| >> |\overrightarrow{\Omega_{1/0}}|$. Le raisonnement exact partant de l'hypothèse que la liaison pivot de la roue est parfaite donne une première relation entre $\dot{\omega}$ et $\dot{\Psi}$. La seconde est issue de la conservation de $\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/0}}(O) \cdot \vec{u_z}$, ce qui permet de résoudre exactement le problème. Il faut être prêt à répondre à cette question.

Appliquons le théorème du moment cinétique au système $\mathbf{1} + \mathbf{3} = \Sigma$, en O (sur l'axe de rotation de l'expérimentateur), projeté selon $\vec{u}_z$. Puisque le poids est vertical et que la liaison $1-0$ est supposée parfaite, la somme des moments résultants en O selon $\vec{u_z}$ est nulle. Par conséquent,

$$\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/0}}(O) \cdot \vec{u_z} = cte \tag{3}$$

Ceci constitue notre intégrale première du mouvement. La composante verticale du moment cinétique de Σ en O dans son mouvement par rapport à $\{0\}$ est conservée. Comment s'exprime-t-elle ?

Préliminaires

Utilisons la loi de composition des vitesses pour trouver la rotation de la roue par rapport au référentiel galiléen :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \tag{4}$$

avec :

- $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \omega_0 \overrightarrow{u_z}$ à $t = 0$
- $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = -\omega_0 \overrightarrow{u_z}$ à $t = t_{fin}$
- $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\psi} \overrightarrow{u_z}$ ($\dot{\psi} = 0$ à $t = 0$)

, et

La première composante a été exprimée, la seconde est la rotation de l'expérimentateur par rapport au sol.

Théorème de Koening

$$\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{v_{3/0}}(A) + \overline{\overline{I_3}}(A)\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \tag{5}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \overrightarrow{u_z} = m_3 \dot{\psi} l^2 + I_3 \Omega_{z,3/0} \tag{6}$$

Bilan

Après calculs :

$$\dot{\psi} = \frac{2I_{z3}\ \omega_0}{I_{z1} + I_{z3} + m_3 l^2} \tag{7}$$

Conclusion de cet exemple : On vérifie bien que le tabouret tourne dans la situation finale. Dans le même sens que la roue de vélo avant retournement. Cela traduit la conservation du moment cinétique suivant Oz du système.

la recherche d'une loi de conservation nous a permis de déterminer l'état final du système sans avoir à réaliser la résolution de la dynamique du système lors du retournement de la roue, ce qui aurait été très fastidieux.

2.2 Embrayage

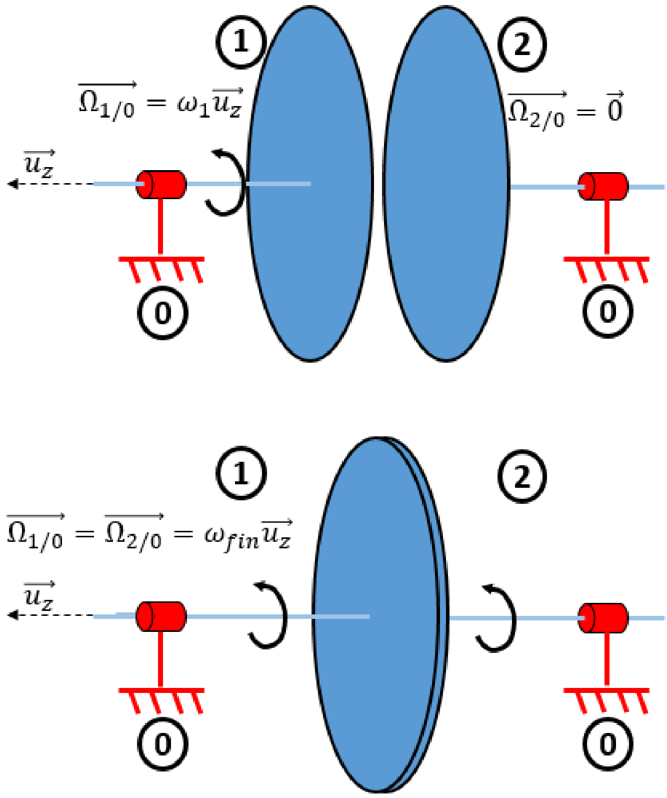

Figure 3 – Mate moi ce schéma frérot

On note :

- I_{z1} le moment d'inertie du solide 1 autour de son axe de rotation
- I_{z2} le moment d'inertie du solide 2 autour de son axe de rotation

L'expérience se déroule comme suit :

- Avant $t = 0$, seul le solide 1 possède une rotation par rapport à 0
- A $t = 0$, On met les 2 disques de l'embreyage en contact, le solide 1 entraine donc le solide 2 en rotation par friction
- à $t = t_{fin}$, les solides 1 et 2 sont solidaires, ils tournent à la même vitesse par rapport à 0.

Les liaisons pivots sont supposées parfaites, il n'y a aucun couple suivant l'axe des liaisons.

En appliquant le théorème du moment cinétique à l'ensemble 1+2, on en déduit que celui ci ne varie pas au cours de l'expérience.

On en déduit :

$$\omega_{fin} = \frac{\omega_1 \; I_{z1}}{I_{z1} + I_{z2}} \tag{8}$$

On a toutes les données pour étudier la variation d'énergie cinétique du système :

$$E_c(t = 0) = \frac{1}{2} I_{z1} \; \omega_1^2 \tag{9}$$

$$E_c(t = t_{fin}) = \frac{1}{2}(I_{z1} + I_{z2}) \; \omega_{fin}^2 = \frac{1}{2} \frac{I_{z1}^2}{I_{z1} + I_{z2}} \omega_1^2 < E_c(t = 0) \tag{10}$$

Il est remarquable ici qu'en utilisant la conservation du moment cinétique, on ait pu évaluer la dissipation d'énergie du système sans avoir à faire aucune hypothèse sur les frottements.

Application aux disques d'accrétion dans le cas d'une proto-étoile : conservation du moment cinétique mais pas de l'énergie mécanique du système.

Conclusion

En somme dans cette leçon on a vu que l'utilisation de lois de conservation pouvait être un outil précieux dans la résolution de problèmes de mécanique. Il est possible de s'interroger sur le pourquoi de ces lois de conservations. Pour des systèmes isolés, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés dans le cas, de points matériel, d'un solide indéformable, d'un système de solides indéformables, pour des solides déformables et même des fluides. Ce sont en réalité des propriétés très profondes dont l'origine dépasse le cadre de cette leçon.

Il est intéressant de noter que si par le passé, on cherchait des lois de conservation à partir de théories existantes, la physique moderne a en quelque sorte retourné le problème, en se demandant quelles quantités devaient être conservées, et quelle théorie pourrait s'inscrire dans ce cadre. Un exemple connu est celui de la désintégration β qui ne semblait pas respecter les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du spin. Pour sortir de cette horreur physique, Pauli postula l'existence d'une nouvelle particule, le neutrino, découvert expérimentalement en 1956.

Message clé

le message est

Compléments

Questions

Questions

- **Formule pour J_3. Qu'est-ce que ce théorème de Koening ?** Expression du moment cinétique à partir de sa vitesse de rotation propre et du mouvement d'ensemble du solide.
- **C'est un cas particulier de quoi ?** C'est la formule de changement de point.
- **Quelle est la particularité de A ?** C'est le centre de masses de la roue.
- **Tenseur d'inertie. Quelle est son expression générale ?** Moments d'inertie sur la diagonale. Quantification de la disymétrie de masse sur les termes non diagonaux.
- **Comment serait cette matrice pour les systèmes considérés ?**
- **Parfois le théorème de Koening est utilisé sur le moment d'inertie. Comment se traduit-il ?** Le moment d'inertie à une distance l du nouvel axe implique un ajout au nouveau moment de ml^2.
- **Lien entre invariance et quantités conservées ?** Noether
- **Exemples ?** E-t, x-p
- **Quid de la loi du début ?** Expliquer les lois de Newton. Voir les subtilités de la première.
- **Quelles sont les conditions d'application du TMC ?** Il faut que le point d'application soit fixe dans un référentiel galiléen ou qu'il soit le centre de masses.
- **Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?** Un référentiel dans lequel, si la somme des forces appliquées à un système est nulle, alors le système est en mouvement rectiligne uniforme.

- **Exemples de systèmes avec conservation du moment cinétique à d'autres échelles ?** Effondrement d'un nuage de gaz pour la formation d'une proto étoile.
- **Est-ce que tu connais le vecteur de Runge-Lenz ?** -> a connaitre.
- **Est-ce que tu connais l'effet Compton ?** -> transfert de quantité de mouvement entre entre photon et un électron.
- **Lois de conservation dans le cadre d'un mouvement avec force centrale ?** Energie, Moment cinétique et vecteur de Runge-Lenz.
- **Particularité du dernier ?** Il est associé à une combinaison de symétries contrairement à l'énergie eu au moment qui sont associées à des symétries.
- **Tu vois d'autres grandeurs physiques conservées sans symétries apparentes ?** Invariants de Casimir en méca flux par exemple.
- **Justifier le choix du travail aussi poussé sur le moment cinétique ?** Ca marche bien pour voir à quel point on simplifie un problème par les lois de conservation.

Commentaires

- Prérequis : être plus précis. Préciser qu'on parle de mécanique des solides indéformables. "Mécanique des systèmes" : pas clair.
- Ne pas noter la résultante des forces extérieures R_{ext} mais $\sum F_{ext}$.
- Faire une intro plus longue
- Ptetre plutot envisager les lois de Kepler
- Conservation de la quantité de mouvement : montrer une vidéo avec le mouvement de recul d'un système qui lance quelque chose. Ca permet d'illustrer.
- Bravo pour les couleurs. Bravo pour ton équilibre sur le tabouret.
- Simplifier le schéma en ne mettant pas le système qui permet de retourner la roue (bras). Dire juste que la vitesse s'inverse à un instant donné. Ne pas appeler le regroupement de 1 et 2 "1" aussi.
- Discuter le fait d'avoir la roue qui passe de ω à $-\omega$. C'est pas évident.
- Préciser le référentiel quand on dérive des vecteurs.
- Attention à ne pas parler de "système" sans précision quand on a "1", "2", "3", "1+2", "1+2+3"...
- Attention au timing.
- Faire une conclusion réfléchie.