

LP*3 : ONDES DANS LES PLASMA

22 mai 2022

Berrit Nathan & Colombier Juliette

Niveau

Commentaires du jury

Bibliographie

- ↗ *Physique PC/PC**, **Sanz** → très bien
- ↗ http://olivier.granier.free.fr/Seq16/co/rappels-de-cours-ondes_EM-plasma.html → partie exo sur les oscillations

Prérequis

- Oscillateur harmonique
- Electromagnétisme dans le vide
- Loi d'Ohm locale
- Théorème d'équipartition de l'énergie
- Vitesse de phase, vitesse de groupe

Expériences

- ☞ manip

Table des matières

1	Étude d'un plasma	2
1.1	Hypothèses	2
1.2	Oscillations	2
2	Ondes EM dans les plasma	3
2.1	Conductivité du plasma	3
2.2	Équation de propagation	4
2.3	Relation de dispersion	4
3	Applications	4
3.1	Ondes radio	4
3.2	GPS	5

Introduction

Aux élèves

Vous avez l'habitude d'étudier la matière sous les états solide, liquide et gazeux. Il en existe un quatrième : le plasma. C'est un milieu ionisé dans lequel on a arraché des électrons aux noyaux atomiques. En réalité, d'après les astrophysiciens, 99 % de l'univers est fait de plasma : son étude est donc primordiale.

En particulier, applications pour la recherche et l'industrie : projet ITER (fusion), télécommunications (cf dernière partie), astrophysique, écrans plasmas.



1 Étude d'un plasma

1.1 Hypothèses

Définition d'un plasma

Milieu totalement ou partiellement ionisé, qui contient deux porteurs de charge :

- les ions charge q , vitesse v_i , densité n_i et masse m_i
- Les électrons : pareil avec l'indice e et la charge $-q$.

On va faire les hypothèses suivantes :

- On va considérer les cations très lourds devant les électrons : $m_i \gg m_e$.
- Plasma peu dense : il n'y a pas d'interactions entre les particules (pas de collisions). On se place donc dans le cadre des gaz parfaits.
- On néglige la participation des ions au courant. On l'écrira donc :

$$\vec{j} = -en_e\vec{v}_e + qn_i\vec{v}_i \sim -en_e\vec{v}_e \quad (1)$$

Pour justifier ce choix, on utilise la formule de la vitesse quadratique pour un GP (c'est dans les prérequis) :

$$v_x = \sqrt{\frac{3k_bT}{m_x}} \quad (2)$$

et la différence de masse justifie donc bien que $v_e \gg v_i$.

- Pas de mouvement d'ensemble
- Au repos le plasma est localement neutre

1.2 Oscillations

Point historique : cette étude a pour la première fois été menée par Langmuir en 1925.

On se place entre 1D, on prend $q = +e$ et on se considère une tranche de plasma entre z et $z+dz$, au cours d'une perturbation sur le mouvement des électrons (les ions étant fixes).

- Avant la perturbation, le nombre d'électron est $dN_e = n_{e,0}dz$
- Après la perturbation : $dN_e = n_e(z + dz + \xi(z + dz, t)) - (z + \xi(z, t)) = n_e dz (1 + \frac{\partial \xi}{\partial z})$

Ainsi on a :

$$n_0 = n_e \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \quad (3)$$

On fait l'hypothèse des faibles déformations : $\frac{\partial \xi}{\partial z} \ll 1$

Donc :

$$n_e = n_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \quad (4)$$

Ainsi, on en déduit la variation de la densité de charge :

$$\rho = n_0 e - e n_e = n_0 e \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (5)$$

Avec Maxwell Gauss, on en déduit :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (6)$$

Soit $E = \frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \xi$

SI on applique le pdf à un électron :

$$m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -e \frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \xi \quad (7)$$

On retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec une pulsation caractéristique que l'on nomme pulsation plasma :

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}} \quad (8)$$

↓ Maintenant on veut regarder la propagation d'une onde EM dans le plasma

2 Ondes EM dans les plasma

On considère une OPPM qui se propage dans le plasma, en notation complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

2.1 Conductivité du plasma

Cherchons le lien entre \vec{j} et \vec{E} . On applique le PFD à un électron, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \quad (9)$$

On va voir si on ne peut pas simplifier un terme dans cette expression : Prenons le rapport entre les deux termes de la force de Lorentz. On considère les électrons non relativistes, et le milieu est peu dense. Puisque le milieu est peu dense, on va considérer que la vitesse de phase est proche de celle dans le vide, i.e. c . Alors, avec la relation de structure $B \sim \frac{E}{c}$ et on peut négliger le terme magnétique.

Alors on développe l'expression et on retrouve la relation liant \vec{j} à \vec{E} :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{\omega} \vec{E} \quad (10)$$

On constate que la conductivité $\gamma \in i\mathbb{R}$. Cela signifie que \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase, ainsi la puissance moyenne dissipée par effet Joule est nulle.

Point pédagogique : on peut parler du modèle idéal de bobine et de condensateur en électrocinétique où c'est exactement pareil.

2.2 Équation de propagation

On écrit les relations de Maxwell dans le vide, avec un milieu localement neutre¹.

On prend $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$, on développe et on a un terme supplémentaire dû à \mathbf{j} :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

C'est notre équation de propagation.

2.3 Relation de dispersion

Toujours pour une OPPM, on peut calculer la relation de dispersion et le calcul donne :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (12)$$

C'est une relation de dispersion de Klein Gordon, et on retrouve la pulsation plasma qu'on avait défini plus tôt !

Analyse de la relation de dispersion :

- \rightarrow Si $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$ et k est réel : il y a alors propagation. On dit alors que le plasma est transparent pour l'onde.

On peut alors calculer la vitesse de phase associée :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (13)$$

Éventuellement faire une petite rq sur le fait que cette vitesse soit plus grande que c .

Calculons alors la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Astuce pour le faire : on différencie Klein-Gordon. On montre alors directement que $v_\phi v_g = c^2$ et on en déduit v_g .

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (14)$$

Là on peut tracer l'allure des vitesses (éventuellement sur python).

- $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$: k est imaginaire pur.

Si on réécrit l'expression du champ électrique ici, on constate qu'il n'y a pas de propagation possible. Dans ce régime l'onde incidente est réfléchi + onde évanescence.

3 Applications

3.1 Ondes radio

Faisons des AN pour les pulsations plasma. Dans l'ionosphère, on a $n \sim 10^{10}$ ou 10^{12} m^{-3} .

On estime une fréquence de coupure $f_p \sim 900 \text{ kHz}$.

Alors on fait un schéma pour expliquer la réflexion des ondes sur l'ionosphère qui permet de transmettre de l'information loin : l'ionosphère joue le rôle d'un filtre passe-haut.

Historiquement ça a été fait pour la première fois en 1901 par Marconi. Cependant aujourd'hui on est plutôt à quelques centaines de MHz pour les ondes radio : on travaille avec des satellites, comme pour le GPS.

1. Pour cela il faut écrire l'équation de conservation de la charge et on montre que si $\omega \neq \omega_p$ alors $\rho = 0$

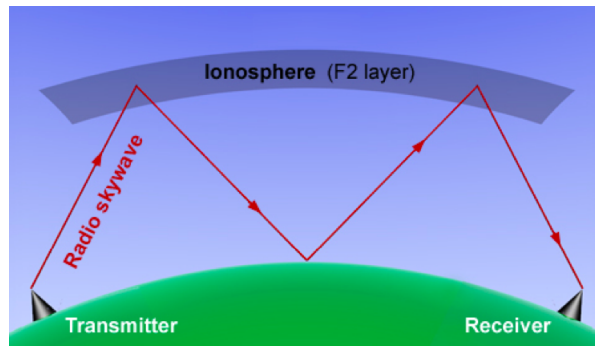


FIGURE 1 – Caption

3.2 GPS

Ainsi, les ondes EM utilisées pour les signaux GPS doivent traverser l'ionosphère. On peut calculer l'erreur sur la position induite par cette traversée si on ne prend pas en compte la variation de vitesse. On aura

$$\Delta x = \frac{hf_p^2}{2f^2} \quad (15)$$

On peut faire l'AN sachant que la fréquence $f \sim 100\text{MHz}$ et que la hauteur de la ionosphère peut être estimée à $h \sim 700\text{km}$.

$$\Delta x = 15\text{m} \quad (16)$$

Cette erreur est considérable, donc elle est prise en compte dans les systèmes GPS.

Questions

- **Vous vous placez niveau L2. Dans quelle situation a-t-on pu rencontrer un oscillateur harmonique en L2 ?** L'étude du pendule simple et du pendule pesant, le ressort aussi. On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique amorti en électrocinétique aussi.
- **En électrocinétique, exemple précis ? Tout les circuit ne font pas d'oscillation** Par exemple le RLC étudié en RSF.
- **Est-ce que le circuit RLC série est rigoureusement un oscillateur harmonique ?** Non, ça va être un oscillateur amorti ? **Ca peut ne pas être un oscillateur harmonique amorti ?** On a plusieurs régimes, mais ils sont toujours amortis. ils ne sont jamais purement harmonique à cause de la présence d'une résistance qui dissipe.
- **Du coup pour un circuit purement oscillant ?** Pour le faire de façon réaliste il faudrait ajouter une résistance négative. **Mais en L1/L2 ?** On peut enlever la résistance et étudier un LC (théoriquement).
- **Prérequis : équipartition de l'énergie. Quidn'est-ce que ça sert ?** Pour redémontrer la vitesse quadratique. **Vous pouvez formuler le théorème ?** Si l'énergie s'écrit en fct de la variable de l'espace des phase b : $E = ab + c$ avec a une constante et c qui ne dépend pas de b , alors le premier terme contribue pour $kbT/2$ dans l'énergie moyenne.
- **Dans la littérature, on parle de plasma froids, chauds, magnétisés, quantiques. Est-ce que vous savez à quoi ça fait référence ?** Plasma chaud donne + d'agitation, donc on doit prendre en compte les chocs. un plasma froid c'est l'inverse. Pour savoir si le plasma est quantique ou pas, on compare la longueur d'onde associée du système à la pulsation de DeBroglie. Si il est magnétisé, on a rajouté un champ magnétique, ça crée plusieurs effets comme les ondes d'Alfen.
- **Pour le plasma magnétisé, est-ce qu'il y a un critère quantifiable qu'il faut prendre en compte ou pas les effets magnétiques ?** Il faudrait encore comparer les 2 termes de la force de Lorentz, mais cette fois il y a un champ magnétique extérieur. **Mais comment créer un critère quantitatif d'ici ? Pareil pour le plasma froid et chaud.**
- **Comment on produit un plasma en pratique ?** Pour les étudiants, il faut retenir qu'un plasma est très énergétique, il faut injecter bcp d'énergie dans le système. On le fait soit en chauffant un gaz, soit en créant un gaz électrique. **Et dans les étoiles ?** Ici c'est plutôt la chaleur, il y a aussi des réactions nucléaires et du

rayonnement. **Pour les étoiles on arrache les électrons avec des collisions, et c'est possible grâce à des effets de pression. Vous pouvez les nommer ?** Pression de radiation et pression de gravitation ?

- **Vous faites un certain nombre d'hypothèses pour l'étude. Vous dites qu'on assimile le plasma à un GP pour comparer les vitesses des porteurs. Est-ce qu'on peut vérifier l'hypothèse que la température des ions et des électrons est la même. c'est quelle hypothèse ça ?** On suppose l'équilibre thermique. **Qu'est-ce que ça implique comme hypothèse ?** Souvent ce sont des collisions micro qui créent l'équilibre thermique. C'est vrai que ça pose question ici parce qu'on néglige les collisions vu que c'est un GP.
- **Dans l'équation d'onde, on voit que l'onde est modifiée par la traversée du plasma (on a plus d'Alembert) En écrivant la loi d'Ohm locale, on montre que la densité de courant est impactée par le passage de l'onde. Pourquoi dites vous qu'il y a une absence d'interaction ?** Il faut faire attention au vocabulaire, il y a absence de collision mais pas d'interaction puisqu'il y a bien une interaction électromagnétique.
- **Vous avez dit : pas d'interaction donc c'est comme du vide. C'est pas ce que j'ai voulu dire. Le message c'est que comme le milieu est peu dense, mais c'est pas évident qu'on peut utiliser les équations de Maxwell. Comment ça ? Les équations de Maxwell sont tjrs valable non ?** Pas dans les milieux, il faut utiliser D et H. **Pourtant vous avez pas d'Alembert.** En fait on est pas dans le vide on e j non nul depuis le début.
- **Vous étudiez la propagation d'une OPPH. Pour l'étudier, vous avez choisis d'appliquer le pfd à un électron. Dans la littérature il y a d'aitre approche à base de méca flu. Quel est l'avantage de votre approche ?** Il n'y a pas de méca flu en MP et j'avais axé ma leçon plus sur cette classe vu que j'utilise l'équipartition de l'énergie. Je trouve l'approche plus simple avec un pfd. **Si on avait voulu le faire en PC avec l'approche méca flu, qu'est-ce qui aurait changé ?** On aurait fait l'étude avec Navier Stokes, on y néglige bcp de termes et on utilise la force volumique de Lorentz. On compare et simplifie les différents termes. **Est-ce que le bilan des forces change ?** Y'a tjrs Lorentz, il y a un terme de pression qui apparaît. IL y a donc d'autres simplifications et étapes à faire.
- **Equation de propagation : c'est allé un peu vite, et pas de densité de charge dans Maxwell Gauss. pourquoi ?** On peut montrer facilement que si la pulsation est différente de la pulsation plasma le milieu est localement neutre. On utilise la conservation de la charge et la loi d'Ohm utilisé, on a en RSF une équation qui se factorise $\rho(\omega^2 - \omega_p^2) = 0$ d'où la neutralité. **et à $\omega = \omega_p$?** Dans ce cas, Klein gordon donne $k=0$... **Selon le modèle de plasma ça dépend. On peut montrer qu'il existe une onde longitudinale.**
- **Vous avez d'autres exemples de situation qui donne Klein Gordon ?** Y'a le guidage d'onde, sinon y'a la quantique relativiste avec l'équation de Kelin Gordon (schrodinger d'ordre 2). **une chaîne de pendules simple couplés.**
- **Vous calculez la vitesse de phase et de groupe et ce n'est pas dans les prérequis ?** J'ai oublié de les y mettre, ou alors c'est l'occasion de les introduire, les définir et la dispersion.
- **Vous avez calculé la vitesse de groupe. Comment on justifie la formule $v_g = d\omega/dk$?** On le fait en étudiant la propagation d'un paquet d'onde de façon générale, avec un développement de Taylor etc... **Et les hypothèses pour faire ça ?** Il faut une relation de dispersion qui varie peu et un paquet d'onde qui est peu étendu spectralement. **Il faut un milieu peu dispersif ! Sinon on peut aboutir à des incohérences.**
- **La propagation est dispersive, est-ce qu'elle est dissipative ?** Non parce que k est réel.
- **Vous finissez avec les faibles fréquences, vous dits qu'il y a absence de propagation et que l'onde est alors complètement réfléchi sur le plasma. Quelle est alors la forme du champ électrique ?** On obtient une onde évanescente.
- **Vous connaissez d'autres situations où on a des ondes évanescents ?** Effet tunnel, réflexion sur un diélectrique

Commentaires

- **Le niveau choisis est conforme avec le niveau. Le plan est classique mais dur de faire plus exotique. C'est bien mené et bien rythmé. Les choix pédagogiques sont bien justifiés. La physique du plasma est une science riche et bcp de questions peuvent être posées. Le traitement est conforme au niveau L2 mais peut créer bcp de questions. Notamment, écrire le pdf à un électron c'est faire disparaître les effets thermiques et mélanger la description Eulérienne et Lagrangienne (en mélangeant j et le pdf). Il faut avoir conscience du mélange des notions, mais vous l'avez bien justifié en parlant de cours de MP.**

- Pour une telle leçon, c'est important de bien borner le cadre de l'étude.
- Attention au choix de mettre toutes les applications dans une dernière partie. C'est une leçon assez calculatoire et ce serait top si on pouvait distiller des odg et des AN. en même temps ça sert à rien de faire l'AN trop tôt sur la pulsation plasma quand elle a pas plus de sens que ça.