

---

# LP41 : Effet Tunnel et Application à la microscopie

---

Louis Usala et Julie Limonet  
24/09/21

## Bibliographie

- ✎ *Tout en un Physique PC*, **Sanz**
- ✎ *Mécanique Quantique*, **Basdevant**
- ✎ BUP 699
- ✎ BUP 734

## Prérequis

Leçon de L2

- ✎ Schrodinger et Heisenberg
- ✎ Puits de potentiel infini
- ✎ Marche de potentiel et ondes évanescentes

## Expérience

- \* ondes centimétriques (micro-onde) dans des prismes de paraffine

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et illustration</b>	<b>2</b>
1.1	Outils de résolution . . . . .	2
1.2	Intérêts majeurs . . . . .	3
1.3	Illustration (expérience) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modèle de l'effet tunnel</b>	<b>4</b>

<b>3 Application à la microscopie</b>	<b>6</b>
3.1 Principe . . . . .	6
3.2 Topographie . . . . .	6
3.3 Spectroscopie . . . . .	7
3.4 Déplacement d'atomes . . . . .	7
<b>4 Questions</b>	<b>7</b>
<b>5 Commentaires</b>	<b>9</b>

## Introduction

Cours précédents : résolution de l'équation de Schrödinger dans des cas simples :

- puits de potentiel infini/fini : modéliser le confinement d'une particule dans une zone de l'espace. Permet de modéliser un électron dans une molécule,
- marche de potentiel fini : modéliser le comportement d'une particule qui rencontre un "mur", une zone de l'espace à laquelle elle n'a pas accès.

Avec des outils analogues, on va s'intéresser à une barrière de potentiel : une zone finie de l'espace où le potentiel est plus haut qu'ailleurs. Métaphore : une boule qui roule sur une zone plate et qui rencontre une colline. Dans le cas classique, si la boule n'a pas assez d'énergie cinétique, elle ne passe pas. Dans le cas quantique, elle a une chance de passer, comme si elle creusait un tunnel dans la colline.

## 1 Contexte et illustration

### 1.1 Outils de résolution

En mécanique quantique, les propriétés des particules (position, impulsion, énergie...) sont encodées dans la fonction d'onde. C'est une solution de l'équation de Schrödinger

$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\partial_t\Psi(x,t)$ . Cette équation détermine la dynamique des particules, de même que le principe fondamental de la dynamique détermine la dynamique des objets classiques dans la théorie de Newton.

A partir de la fonction d'onde, il n'est pas possible de savoir précisément où est une particule et quelle est son impulsion. C'est une conséquence de son aspect ondulatoire. (On a besoin qu'une onde soit étalée sur plusieurs longueurs d'onde pour mesurer cette longueur d'onde.) C'est l'objet du principe de Heisenberg  $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ , ou en version énergie-temps  $\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ . Si on détermine une durée avec une incertitude  $\Delta t$  alors on ne pourra jamais connaître  $E$  avec une précision supérieure à  $\Delta E$ . Elle peut donc se retrouver dans des zones de l'espace où l'énergie potentielle aurait dû être trop haute pour l'accueillir. C'est l'objet de l'effet tunnel.

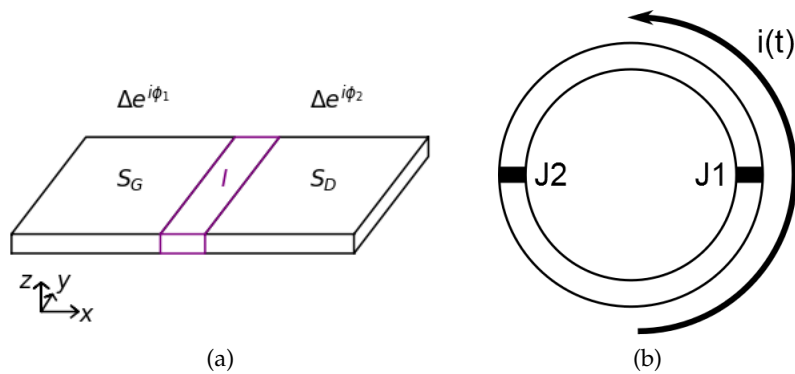


FIGURE 1: a. Schéma d'une jonction Josephson entre un supraconducteur "gauche" et un supraconducteur "droit" séparés par un isolant. b. Schéma d'un SQUID. La mesure du courant  $i(t)$  permet de déterminer le champ magnétique passant à travers la boucle. Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/SQUID>

## 1.2 Intérêts majeurs

L'effet tunnel a été l'objet de diverses applications et récompenses.

Prix Nobel 1973. Brian Josephson théorise l'effet Josephson : passage d'un courant entre deux supraconducteurs séparés par une fine couche d'isolant (figure 1a). Les électrons ne sont pas censés pouvoir se propager au sein de l'isolant, mais ils passent néanmoins grâce à l'effet tunnel. Ce dispositif permet de faire des magnétomètres de précision en branchant deux jonctions Josephson en boucle (Superconducting QUantum Interference Device SQUID, c.f. figure 1b). Prix Nobel 1986. Gerd Binnig et Heinrich Rohrer mettent au point le microscope à effet tunnel. c.f. troisième partie

## 1.3 Illustration (expérience)

Il faut garder en tête que l'effet tunnel n'est pas un effet intrinsèquement quantique (à l'inverse du spin par exemple). C'est un effet intrinsèquement ondulatoire, et on en parle en quantique car les particules quantiques ont des propriétés ondulatoires (dualité). Pour s'en assurer, réaliser une expérience d'effet tunnel sur des ondes électromagnétiques (figure 2).

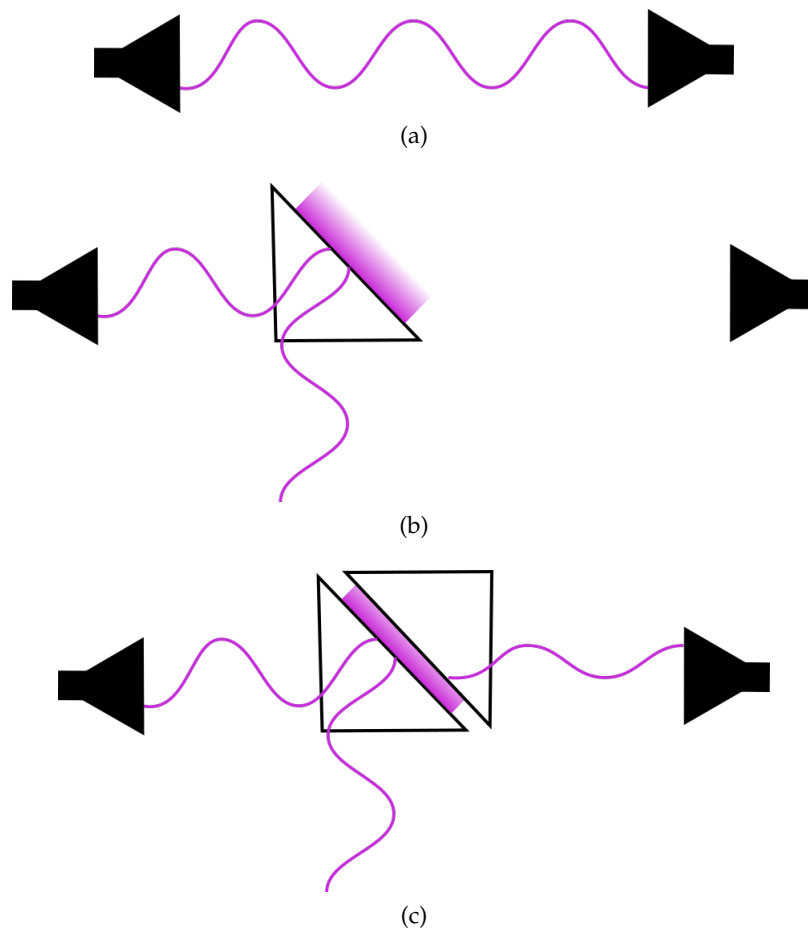


FIGURE 2: Illustration de l'expérience

- Un émetteur et un récepteur à ondes centimétriques. On observe à l'oscilloscope une amplitude reçue non nulle.
- On place un bloc de paraffine sur le chemin de l'onde. Celle-ci entre en incidence normale mais elle subit une réflexion totale sur l'interface de sortie. Une onde évanescente sort du bloc. On reçoit une amplitude nulle.
- On place un autre bloc de paraffine pour récupérer l'onde évanescente. On observe une amplitude reçue qui décroît rapidement avec la distance entre les blocs.

## 2 Modèle de l'effet tunnel

- Comparaison cas classique/cas quantique
- Evolution : résolution de l'équation de Schrödinger
 
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\partial_t\Psi(x,t)$$
- Fonction de plusieurs variables :

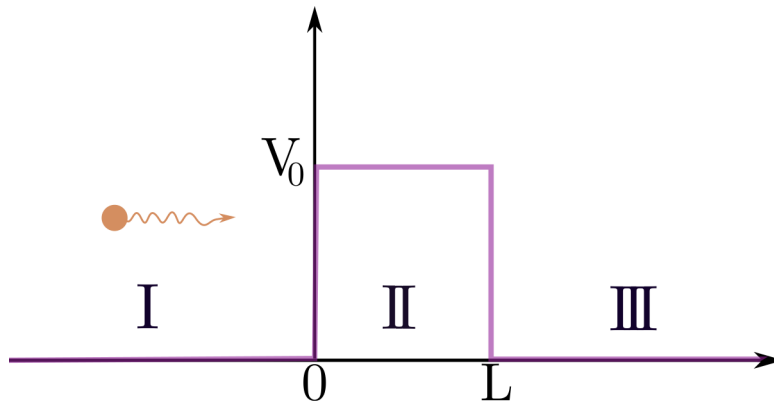


FIGURE 3: Barrière de potentiel

Hyp1 : Solution stationnaire  $\Psi(x, t) = \Phi(x)\chi(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \chi(t) + i \frac{E}{\hbar} \chi(t) = 0 \\ \partial_x^2 \Phi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \Phi(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Donc  $\chi(t) = \chi_0 e^{-i\omega t}$  avec  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  On résout la partie spatiale sur des zones où  $V(x) = \text{const}$

- Zones I et III :

$$\partial_x^2 \Phi(x) + k^2 \Phi(x) = 0 \text{ et } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

$$e^{-i\omega t} \times \begin{cases} \Phi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \Phi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \end{cases} \quad (2)$$

ondes propagatives dans le sens des x croissants

ondes propagatives dans le sens des x décroissants

- Zone II :

$$\partial_x^2 \Phi(x) + \kappa^2 \Phi(x) = 0 \text{ et } \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

$$e^{-i\omega t} \times \begin{cases} \Phi_2(x) = A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x} \end{cases} \quad (3)$$

ondes evanescente dans le sens des x croissants

ondes evanescente dans le sens des x décroissants

- Déterminer les coefficients

Hyp2 : Onde incidente à gauche  $\Rightarrow$  pas d'onde réfléchi à droite  $B_3 = 0$

- Conditions aux limites : continuité de  $\Phi$  et  $\partial\Phi$  en 0 et en L

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = -\kappa(A_2 - B_2) \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} A_2 e^{-\kappa L} + B_2 e^{\kappa L} = A_3 e^{ikL} \\ -\kappa(A_2 e^{-\kappa L} - B_2 e^{\kappa L}) = ik A_3 e^{ikL} \end{cases} \quad (5)$$

- **Hyp3** : Barrière épaisse  $\kappa L \gg 1 \implies$  contribution de  $B_2$  de l'ordre  $e^{-2\kappa L}$
- En combinant les équations on obtient :

$$A_2 = \frac{2k}{k + i\kappa} A_1 \quad A_3 = \frac{2\kappa}{\kappa + ik} e^{-\kappa L - ikL} A_2 A_3 = \frac{4k\kappa}{(\kappa - ik)(k + i\kappa)} e^{-\kappa L - ikL} A_1 \quad (6)$$

- Coefficient de transmission en amplitude :

$$t = \frac{A_3}{A_1} = ie^{-ikL} \frac{4k\kappa}{(k + i\kappa)^2} e^{-\kappa L} \quad |t| = \frac{A_3}{A_1} = \frac{4k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)} e^{-\kappa L} \quad (7)$$

- Coefficient de transmission en énergie/probabilité :

$$\tau = |t|^2 = \frac{16k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa L} = 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \exp\left(-\frac{2\hbar L}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}\right) \quad (8)$$

$\tau \rightarrow 0$  exponentiellement quand  $L \rightarrow \infty$  (barrière épaisse) et en  $\frac{1}{V_0}$  quand  $V_0 \rightarrow \infty$  (barrière haute)  
(ne pas considérer le cas  $E \rightarrow V_0$  car on sort de l'hypothèse de la barrière épaisse)

### 3 Application à la microscopie

Microscopie à effet tunnel (MET) / Scanning Tunnelling Microscopy (STM).

#### 3.1 Principe

Une pointe métallique au potentiel 0 est approchée d'une surface conductrice portée au potentiel  $V_1 > 0$ . Un courant passe de la surface à la pointe par effet tunnel. Il est proportionnel à la tension appliquée et il décroît exponentiellement avec la distance  $L$  entre l'échantillon et la pointe (figure 4a).

#### 3.2 Topographie

On asservit le système en courant. La tension est maintenue constante et la position verticale de la pointe est adaptée jusqu'à obtenir une valeur prédéfinie de courant. On déduit alors de la position de la pointe celle de l'échantillon. En répétant l'opération à la verticale d'autres points, on cartographie la surface de l'échantillon (figure 4b).  
Précision : 0.2nm horizontalement (incertitude due à la largeur de la pointe, composée

d'atomes), 0.01nm verticalement (précision grâce à des piézoélectriques qui contrôlent la hauteur.

Limitation : la surface doit être conductrice et suffisamment plane.

### 3.3 Spectroscopie

On maintient la distance L constante et on fait varier la tension appliquée en mesurant le courant résultant. On trace ainsi une courbe intensité-potentiel qui caractérise l'état de valence des atomes à la surface (figure 4c).

Limitation : on ne caractérise le matériau que par les électrons qui peuvent conduire le courant par effet tunnel. Information partielle sur les composants.

### 3.4 Déplacement d'atomes

En approchant la pointe assez près de la surface et en appliquant un courant, il est possible de bloquer un atome dessus, ce qui permet de le déplacer avec la pointe et de le déposer à un autre endroit sur la surface (figure 4d).

## Conclusion

L'effet tunnel est un phénomène qui illustre très bien la dualité onde-corpuscule dans le cadre de la mécanique quantique. Ce cours a permis de mettre en évidence son aspect ondulatoire en le réalisant avec des ondes électromagnétiques. Il a été possible de modéliser ce phénomène sur un dispositif simple (barrière de potentiel en forme de porte) pour estimer la probabilité qu'une particule incidente passe la barrière en fonction des caractéristiques du problème. Enfin, nous avons vu une application de ce phénomène au travers des différentes facettes de la microscopie à effet tunnel.

Ouvertures possibles : microscopie à champ proche, autres applications de l'effet tunnel ( $NH_3$ , radioactivité  $\alpha$ , supraconductivité... en fonction des connaissances).

## 4 Questions

**Applications dans la vie de tous les jours?** modélisation de la radioactivité : produit de l'électricité+soleil. Nom théorie?

**Comment tu l'expliquerais à ta petite sœur?** Avec balle de tennis, tunnel dans creusé dans la montagne

**Lien entre impulsion, position et fonction d'onde?** Opérateurs qui agissent sur la fonction d'onde et donne valeur propre si fonction d'onde vecteur propre. Sinon décomposition sur base propre. -> Superposition d'états; probabilité de tomber sur l'une des vp.

**C'est quoi le  $\Delta x$  dans incertitude d'Eisenberg?** indétermination sur position. + def mathématique (variance).

**Quel type de particule est-ce qu'on peut associer à des fonctions d'onde?** On peut

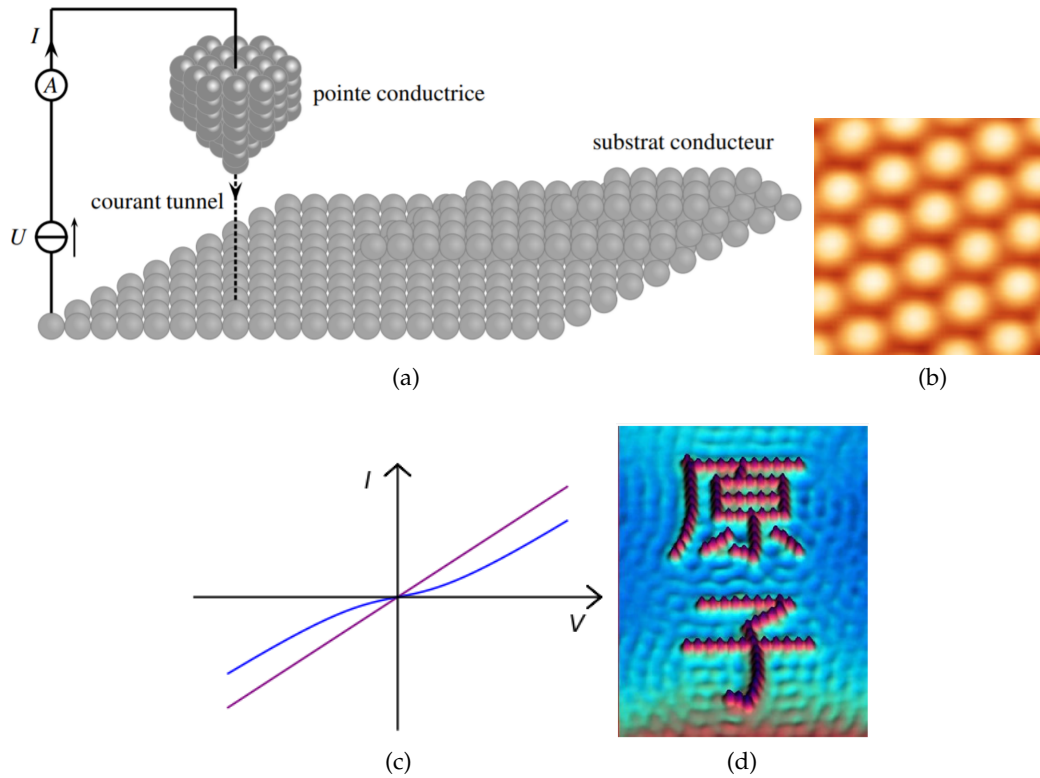


FIGURE 4: Fonctionnement et applications du MET.

a) Schéma du dispositif à mettre en lien avec la courbe de potentiel en fonction de  $x$  vue à la figure 3. Préciser que le potentiel dans la zone I est surélevé par rapport à la zone III mais pas au-dessus de l'énergie de la particule.

b) Image de la topographie d'une surface réalisée par MET. Chaque cercle est un atome ( $\sim 0.2 \text{ nm}$ ).

c) Courbe intensité-potential.

d) Kanji : mot japonais pour "atome", tracé par MET sur une surface conductrice.

Source : Physique tout-en-un, 4ème édition, Sanz et al., Dunod



le faire systématiquement. Mais pertinent quand longueur d'onde associée permet de voir effet quantique. -> De Broglie.  $P=h/\lambda$

**Est-ce qu'avec cette expression vous pouvez illustrer taille max pour effets quantiques?** OdG de l'impulsion pour une balle de tennis; enchaîne sur diffraction, faire passer balle de tennis par fente de taille  $10^{-33}m$

**Justifier continuité dérivée** pour pas avoir de sources de particules

**Lien avec le potentiel infini?** n'existe pas physiquement

**Que se passe-t'il si l'onde vient de droite?** Dispositif symétrique; le tout c'était d'imposer une condition de départ

**Comment aller au delà de l'hypothèse sur la barrière épaisse?** on n'enlève pas le coef B2 -> système résoluble mais calculs longs

**Lien entre coef de transmission et courant de proba?**

**Quelle est la proba de passer la barrière**  $\tau = |t|^2 = 1 - R$

**Equation reliant proba et courant de proba?** conservation de la proba :  $\partial_t \rho + \text{div}(j) = 0$

**MET : autre microscope qu'on aurait pu aborder?** microscopie en champ proche avec ondes évanescentes diffractées

**OdG sur MET par rapport à optique** limite de diffraction

**Resolution typique microscope optique?**  $\lambda \approx 600 \text{ nm}$  On peut aussi envoyer des ondes + énergétiques mais risque d'abimer l'échantillon -> avantage du MET

**Résolution verticale démontrable?**  $I \propto \exp -2\kappa L \implies \frac{\partial I}{\partial t} [\dots]$

## 5 Commentaires

- Attention à ne pas prononcer "barrière de potentiel" dans l'intro sans explications
- Penser à faire passer dans paraffine mais sans reflexion totale? C'était pas hyper clair-> faire schéma?
- Partie I un peu liste, pourquoi pas faire commentaires historiques pendant la partie calcul
- partie II bien dosée, attention erreur de signe
- Les hypothèses ont bien été rappelées et commentaires physiques bien présents
- Partie III un peu rapide, rajouter des OdG (sur largeur barrières par ex) + comparaisons avec des microscopes optiques
- Aborder tension typique MET et comparer à tension claquage
- ne pas hésiter à tendre des perches pour les questions dans la présentation
- Penser à éteindre écran oscillo
- Attention à manip qui cache le tableau