

# LP43 – EVOLUTION TEMPORELLE D’UN SYSTEME À DEUX NIVEAUX. EXEMPLE D’APPLICATION

18 novembre 2021

Guillaume Deplus & Maud Viallet

## Niveau : L3

## Bibliographie

↗ *Mécanique Quantique*, **Dalibard**<sup>1</sup>

→ Détails sur Stern et Gerlach chap. 6 et spin 1/2 traité dans le chapitre 12.

↗ *Mécanique Quantique*, **Lebellac**

→ Précisions mathématiques sur la construction des états propres de spin.

## Prérequis

- Formalisme de Dirac
- Moment cinétique en mécanique quantique
- Moment magnétique
- Rapport gyromagnétique

## Expériences possibles

- ☞ Pendule de torsion
- ☞ RLC série

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Mise en évidence expérimentale de l’existence d’un système à deux niveaux</b>	<b>2</b>
1.1	L’expérience de Stern et Gerlach (1922) . . . . .	2
1.2	Nécessité de l’existence du spin . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Spin 1/2 dans un champ magnétique oscillant-résonance</b>	<b>3</b>
2.1	Motivations . . . . .	3
2.2	Méthode de Rabi (1930) . . . . .	3
2.3	Résolution . . . . .	4
2.4	Résonance . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Application de la résonance magnétique à la mesure de moments magnétiques</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Remarques</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Questions</b>	<b>7</b>

## Introduction

On caractérise généralement la résonance comme la sensibilité accrue d'un système sous une excitation à une fréquence précise. On retrouve ces phénomènes dans de nombreux systèmes physiques :

- oscillateur amorti comme le RLC série utilisé dans les postes radio
- vibrations de ponts exacerbées pour certaines fréquences de rafales de vent (Tacoma 1940) ou une fréquence de pas particulière (cas du Millenium Bridge qui a menacé de s'écrouler sous les pas des nombreux marcheurs qui ont synchronisé leurs pas).

L'objectif de ce cours est d'étudier un système quantique à deux niveaux soumis à une excitation sinusoïdale pour en extraire des informations sur l'objet en interaction. Cette leçon se place à un niveau de L3 en fin d'année puisque qu'il s'agit de faire une synthèse de notions abordées au préalable pendant l'année : formalisme de Dirac, moment cinétique en mécanique quantique mais aussi la théorie classique d'un moment magnétique soumis à un champ magnétique.

## 1 Mise en évidence expérimentale de l'existence d'un système à deux niveaux

### 1.1 L'expérience de Stern et Gerlach (1922)

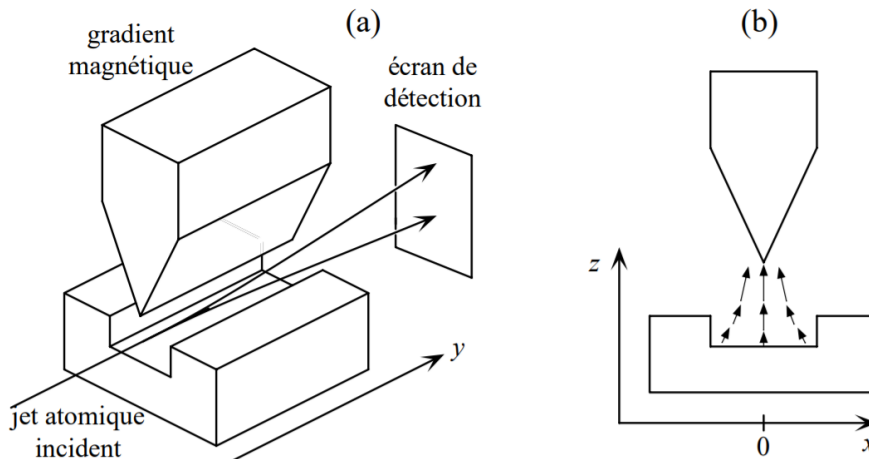


FIGURE 1 – Montage expérimental de Stern et Gerlach (Dalibard, *Mécanique quantique*, 2002)

On peut aller voir la [Vidéo](#) qui explique l'expérience de Stern et Gerlach<sup>2</sup>.

On étudie la déviation d'un faisceau d'Ag par un gradient de champ magnétique créé par un entrefer (cf. FIGURE 1). On crée un faisceau fin unidirectionnel d'atome d'argent à l'aide d'un four ( $T = 1000\text{ °C}$ ). Les atomes sont déviés puisqu'ils sont soumis à la force dont l'expression est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (1)$$

Si le comportement des atomes d'argent suivait les prédictions de la mécanique classique, on devrait observer une fine ligne orientée dans l'axe du gradient de champ magnétique causée par les impacts des atomes d'argent. Dans le cadre de l'expérience, on mesure deux positions où l'on détecte les impacts, *i.e.*  $\mu_z$  prend deux valeurs distinctes. Cela implique une quantification du moment magnétique et une dimension de l'espace de Hilbert associé de 2.

### 1.2 Nécessité de l'existence du spin

On a le rapport gyromagnétique donné par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{j} \quad (2)$$

2. La taille de l'entrefer est d'environ 40 mm. le gradient du champ magnétique est de l'ordre de  $10^{-25} \times 10^{-4}\text{ T/cm}$ . (la publication de Stern et Gerlach originelle est peu claire à ce sujet...)

Le sous-espace associé à un spin  $j$  (tel que  $\hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle$  et  $\hat{J}_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle$ ) est de dimension  $2j+1$ . Cependant, d'après le constat de la sous-section précédente, on doit trouver un entier  $j$  tel que  $2j+1=2$  ce qui est uniquement possible dans le cas où  $j$  est un demi entier. Unlenbeck et Goudsmid (1925) postulent et mettent en valeur l'existence d'un moment cinétique intrinsèque noté  $\vec{S}$ , appelé le **spin**. Le spin est une caractéristique purement quantique, intrinsèque au système quantique. Il n'y a pas d'équivalent classique à ce moment cinétique.

## 2 Spin 1/2 dans un champ magnétique oscillant-résonance

### 2.1 Motivations

Quand on place un moment magnétique dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , le hamiltonien  $H$  d'interaction s'écrit :

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} \tag{3}$$

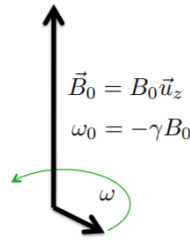
En prenant le cas simple d'un champ magnétique constant selon l'axe  $z$ , et en utilisant la relation 2,  $\hat{H}$  s'écrit sous la forme

$$\hat{H} = -\omega_0 \hat{\mu}_z \tag{4}$$

où on a défini la pulsation  $\omega_0 := -\gamma B_0$ . C'est cette pulsation que nous allons chercher à déterminer puisqu'elle donne accès au rapport gyromagnétique. Pour ce faire, on s'intéresse au spin d'une particule selon l'axe ( $Oz$ ) et on se place dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  définis tels que  $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ .

### 2.2 Méthode de Rabi (1930)

L'objectif de ce qui va suivre est de déterminer le rapport gyromagnétique introduit précédemment pour lié le moment magnétique et le moment cinétique total. On choisit de mettre en exergue la méthode utilisée par Rabi. Pour cela, on rajoute un champ magnétique oscillant transverse à  $\vec{B}_0$ .



$$\vec{B}_1 = B_1 \cos(\omega t) \vec{u}_x + B_1 \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\gamma B_1 & \omega &\sim \omega_0 \\ |\omega_1| &\ll |\omega_0| \end{aligned}$$

FIGURE 2 – Champ magnétique total.

On a donc le champ magnétique total qui s'exprime comme :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) \tag{5}$$

On va utiliser dans la suite le formalisme de Dirac pour pouvoir résoudre le problème. Pour cela, rappelons que l'opérateur de spin  $\hat{S}$  peut s'écrire à l'aide des matrices de Pauli.

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i \quad i = x, y, z \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

On peut réécrire l'Hamiltonien  $\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot \vec{B}$  tel que

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} [B_0 \hat{\sigma}_z + B_1 \cos(\omega t) \hat{\sigma}_x + B_1 \sin(\omega t) \hat{\sigma}_y] \quad (10)$$

En posant  $\omega_0 = -\gamma B_0$  et  $\omega_1 = -\gamma B_1$  on peut écrire le Hamiltonien suivant :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{+i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

On a un hamiltonien qui dépend du temps. On peut citer quelques ordres de grandeur de champ magnétique :  $B_0 \approx 1 T$  et  $B_1 \approx 10^{-4} T$ . A l'aide de l'ordre de grandeur du rapport gyromagnétique  $|\gamma| \approx 10^6 - 10^{11} \text{ rad/s/T}$ , on peut estimer un ordre de grandeur des fréquences  $f \approx 1\text{MHz} - 100\text{GHz}$ .

## 2.3 Résolution

L'équation d'évolution d'un état  $|\Psi\rangle$  est donnée par l'équation de Shrodinger.

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi\rangle \quad (12)$$

où on développe  $|\Psi\rangle$  dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  telle que  $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix}$

On a alors le système couplé suivant :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a}_+(t) = \hbar \frac{\omega_0}{2} a_+ + \frac{\omega_1}{2} \exp(-i\omega t) a_- \\ i\hbar \dot{a}_-(t) = \hbar \frac{\omega_1}{2} \exp(+i\omega t) a_+ - \frac{\omega_0}{2} a_- \end{cases} \quad (13)$$

en posant  $b_{\pm}(t) = a_{\pm}(t)e^{\pm i\omega t/2}$ , le système se simplifie en :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{b}_+(t) = \frac{\omega - \omega_0}{2} b_+ + \frac{\omega_1}{2} b_- \\ i\hbar \dot{b}_-(t) = \frac{\omega_1}{2} b_+ - \frac{\omega - \omega_0}{2} b_- \end{cases} \quad (14)$$

en dérivant et en substituant les termes dans chaque équation, on retrouve une équation d'oscillateur harmonique :

$$\ddot{b}_{\pm} + \frac{\Omega^2}{4} b_{\pm} = 0 \quad (15)$$

avec  $\Omega^2 = (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2$  que l'on nomme **la pulsation de Rabi**. Ces deux équations d'oscillateurs harmoniques préfigure des oscillations de probabilités entre les états  $\{|+\rangle$  et  $|-\rangle\}$ . L'évolution temporelle du spin oscille entre deux états.

L'objectif de ce qui suit est de caractériser ces oscillations entre deux états sachant l'état initial du spin. Pour cela, on suppose que l'on a préalablement préparé les spins dans l'état  $|+\rangle$ , cela se traduit par les conditions initiales suivantes :  $b_-(0) = 1$  et  $b_+(0) = 0$ . À l'aide de ces conditions initiales et du système d'équations 14, on peut exprimer l'évolution temporelle de  $a_+$  et  $a_-$  comme :

$$a_+(t) = \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \quad (16)$$

et

$$a_-(t) = i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\omega t/2} \quad (17)$$

## 2.4 Résonance

On cherche la probabilité de trouver le spin dans l'état  $\{|-\rangle$  à l'instant  $t$  :

$$P_-(t) := |a_-(t)|^2 \quad (18)$$

$$P_-(t) = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (19)$$

On définit l'amplitude de probabilité  $A(\omega)$  :

$$A(\omega) := \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} \quad (20)$$

On peut remarquer que l'amplitude est une lorentzienne dont la largeur permet d'établir une incertitude-type sur la mesure de  $\omega_0$  : la largeur à mi-hauteur de la distribution en fréquence vaut  $2\omega_1$  donc on aboutit à une incertitude relative sur la résolution en pulsation de résonance sous la forme :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\omega_1}{\omega_0} \tag{21}$$

L'incertitude relative de mesure est alors inversement proportionnelle au rapport  $B_0/B_1$  supposé de  $10^4$  dans les ordres de grandeur qui ont été donnés. Deux figures indiquent respectivement la dépendance temporelle de  $P_-$  pour différentes pulsations  $\omega$  et la forme de l'amplitude en fonction du rapport  $B_0/B_1$ .

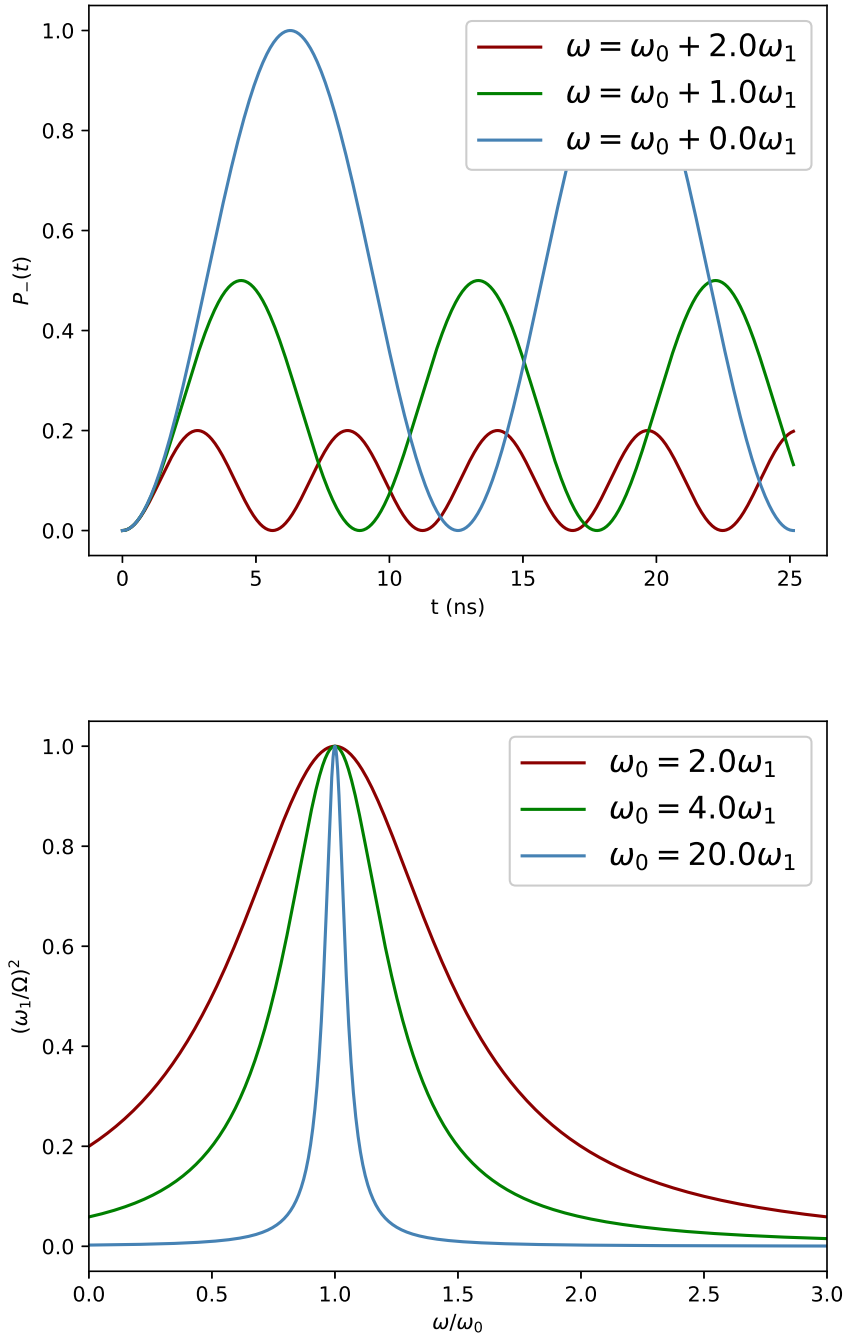


FIGURE 3 – Dépendance temporelle de  $P_-$  et de l'amplitude en fréquence associée.

### 3 Application de la résonance magnétique à la mesure de moments magnétiques

On décrit ici l'expérience réalisée par Rabi en 1939, elle lui vaudra un prix nobel en 45. L'objectif est de mesurer de manière précise un rapport gyromagnétique en développant le formalisme précédent qui permet d'exhiber une pulsation de résonance reliée à cette constante. On utilise deux appareils de Stern et Gerlach qui jouent le rôle de séparateurs d'états :

- Un premier séparateur pour ne sélectionner en entrée que les états dans l'état  $|+\rangle$
- Un champ magnétique tournant
- Un deuxième séparateur pour ne sélectionner en sortie que les états dans l'état  $|+\rangle$

Le setup est présenté figure 4 : Si  $\omega \neq \omega_0$ , les transitions sont très peu probables, donc l'intensité mesurée est la même

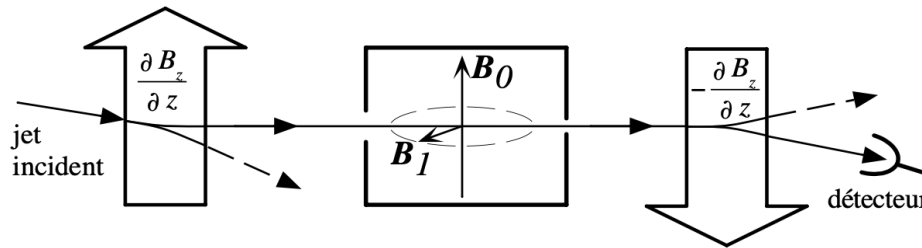


FIGURE 4 – Schéma du montage expérimental utilisé par Rabi.

que celle du faisceau en sortie de premier appareil de SG. Pour  $\omega = \omega_0$ , la transition est possible si le temps de séjour  $\tau$  de la particule dans le champ tournant est assez grande. On le choisit typiquement pour qu'il soit égal à un quart de période de Rabi : cela correspond au temps au bout duquel  $P_-(\tau) = 1$ . L'intensité du faisceau décroît alors fortement. On mesure ainsi le pic en fréquence qui correspond à la pulsation de résonance.

En pratique, on fait varier  $B_0$  à pulsation  $\omega$  fixée. C'est ce qu'a présenté Rabi dans son article (voir figure 5), pour  $B_1 = 10^{-4}T$  et  $\omega/2\pi = 4MHz$ .

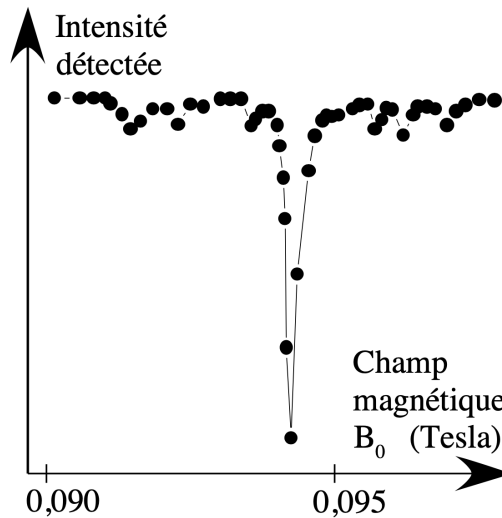


FIGURE 5 – Mesure de l'intensité pour un faisceau de particules incidentes de HD (Dalibard - chap 12).

Pour comparer les rapports gyromagnétiques de différentes particules, on définit le facteur adimensionné dit de Landé  $g$  tel que :

$$\gamma = g \frac{q}{2m} \tag{22}$$

On peut généraliser la discussion pour un spin  $j$  quelconque et aboutir à la formule :

$$\frac{|\mu|}{j} = \frac{\hbar\omega_0}{B_0} \text{ où } |\mu| := |\gamma| \sqrt{j(j+1)} \tag{23}$$

Trois exemples de particules mesurées par Rabi en 1939 :

- ${}^3\text{Li}^6$  -  $g = 0.820$  - spin 1
- ${}^3\text{Li}^7$  -  $g = 2.167$  - spin 3/2
- ${}^9\text{Li}^{19}$  -  $g = 5.243$  - spin 1/2

Une autre méthode de mesure de moment magnétique se base sur la **précession de Larmor**. On place en ensemble de moments magnétiques dans un champ  $\vec{B}_0$  constant. Ces derniers vont alors précesser autour de la direction du champ appliqué (*cf* Théorème d'Ehrenfest, Dalibard chap 12), à une pulsation  $\omega_0 = -\gamma B_0$ . Ces moments vont alors, si on place une boucle de courant proche d'eux créer un courant induit qui permet une mesure de  $\gamma$ .

**Commentaire important post-leçon :** *On notera qu'ici, pour les mesures de rapports gyromagnétiques d'édifices complexes, c'est-à-dire un assemblage proton-neutron-electron, on doit négliger le moment cinétique intrinsèque du noyau pour appliquer ce formalisme, notamment vis à vis du sélecteur de Stern et Gerlach.*

## 4 Remarques

Le choix a été fait, dans cette leçon, de présenter l'expérience de Stern & Gerlach pour arguer que le spin 1/2 est un "vrai" système à deux niveaux, contrairement à la molécule d'ammoniac qui n'est qu'un système à deux niveaux effectifs, une fois négligés tous les niveaux d'énergies bien supérieures correspondant aux autres (nombreux) degrés de liberté de la molécule. Cette partie introductive présente aussi l'avantage d'introduire le dispositif expérimental qui resservira en troisième partie. Cependant, il ne faut pas occulter le fait que même le spin 1/2 n'est pas un système purement à deux niveaux, à cause du spin du noyau qui "splitte" chacun des deux niveaux en  $2S'+1$  sous-niveaux, avec  $S'$  le moment cinétique du noyau. C'est seulement en faisant la moyenne de ces  $2S'+1$  sous-niveaux qu'on trouve un paquet centré en plus ou moins 1/2, d'où un système à deux niveaux effectifs là encore. D'une manière générale, la discussion physique semble plus riche, lorsqu'on discute les hypothèses qui permettent de se ramener à deux niveaux effectifs, que lorsqu'on cherche à établir un "vrai" système purement à deux niveaux.

La partie centrale, telle que présentée, donne un peu trop de détails calculatoires au détriment de la physique, et traite directement tous les aspects de la dynamique d'un système à deux niveaux en présence d'un forçage. Il pourrait être judicieux de procéder de façon pédestre :

- D'abord sans coupler les deux niveaux (donc avec le champ  $\vec{B}$  selon  $z$ ), chacun évolue à sa propre fréquence, qui est une valeur propre du hamiltonien.
- Ensuite en couplant les deux niveaux avec un champ transverse  $\vec{B}_1$  constant. Là encore, il y a une évolution propre, mais il faut changer de base (cela permet d'introduire le premier changement de variables, mais aussi une partie importante de la physique, qui est qu'en couplant des états propres du hamiltonien initial on obtient des oscillations entre ces deux états, oscillations dont l'amplitude est d'autant plus grande que le couplage est fort. Une analogie avec la molécule d'ammoniac pourrait s'avérer parlante).
- Enfin on introduit un forçage avec le champ  $\vec{B}_1$  qui dépend du temps, ce qui motive le second changement de variable où on se place dans la base tournante (ici il ne faut pas manquer de distinguer l'évolution "rapide", dans la base initiale, de l'évolution "lente", dans la base tournante).

On peut même envisager de mentionner une analogie avec la toupie, voire avec votre exemple préféré en optique, le but étant de montrer que vous ne vous noyez pas dans les calculs mais que vous avez une idée claire et précise de la physique derrière), et à ce moment-là on peut parler de résonance (notez que parler de résonance dès l'introduction est maladroit, car c'est une notion un peu vague et fourre-tout qui dépend beaucoup du contexte ; il serait donc plus raisonnable d'utiliser une définition "locale" juste au moment où on en a besoin). Le double but de cette démarche pas-à-pas est (1) de rendre le "noyau dur" de la leçon plus digeste, en introduisant les détails calculatoires petit à petit en montrant bien pourquoi ils sont nécessaires, et (2) de mieux dégager la physique, qui est ce que le jury attend principalement.

## 5 Questions

- Quelle question auriez-vous envie que le jury vous pose ?
- Pouvez-vous justifier le niveau de la leçon ?
- Aurait-on pu imaginer un autre système à deux niveaux qui n'évoquent pas le spin ?

- A-t-on une prédiction sur le signe du rapport gyromagnétique?
- Quel nombre quantique est associé au moment cinétique orbital de l'atome? Comment écrire le spin total de l'électron? L'argent est-il vraiment un système à deux niveaux, quelle approximation fait-on?
- Comment définiriez-vous une résonance de manière générale?
- Que devraient retenir les élèves de cette leçon?
- Pourquoi avoir évoqué la précession de Larmor?
- Où situer la leçon dans la progression dans l'année?
- Comment définir un moment magnétique? Prouver l'expression de l'énergie d'un moment magnétique dans un champ magnétique.
- Comment décrire avec les mains ce qu'il se passe quand on retire le champ magnétique oscillant? En considérant un réseau de spins soumis à un champ magnétique extérieur, comment expliquer le paramagnétisme dans la nature?
- Que rajouteriez-vous avec 20 minutes de plus?
- Ce phénomène a-t-il des applications pratiques autre qu'une mesure des caractéristiques fondamentales de la matière? IRM? RMN?
- Pourrait-on réaliser une analogie optique avec le formalisme qui vient d'être développé?