

# LP43' : EVOLUTION TEMPORELLE D'UN SYSTEME A DEUX NIVEAUX. APPLICATION.

Année : 2021-2022

Passage : Guillaume Deplus

Correcteurs : Youssef Trifa et Léo Mangeolle

## Commentaire général

### A propos du titre

Par rapport à la version précédente, le mot "quantiques" a disparu. Il faut probablement en déduire que le jury ne veut pas qu'on se lance tête baissée dans la mécanique quantique sans expliquer pourquoi subitement on se met à écrire des matrices hermitiennes  $2 \times 2$ . Il n'est pas interdit de traiter des systèmes quantiques à deux niveaux, mais notez qu'on peut faire globalement la même chose avec des systèmes mécaniques (deux pendules couplés par un fil de torsion ou par un système de vérins, par exemple) ou électroniques (deux RLC couplés par, au choix : une résistance, un condensateur, une bobine). Vous pouvez réfléchir d'ailleurs à l'analogie électromécanique pour ces systèmes couplés.

Par ailleurs, le mot "application" est apparu (au singulier). Que faut-il en conclure ? Une fois encore, que le jury n'aime pas qu'on fasse des calculs brutaux sans contexte et sans donner "l'esprit du truc". Pour l'usage du singulier, c'est libre d'interprétation et il ne faut peut-être pas donner au jury des intentions cachées partout. Un corollaire de cette partie "application", cependant, c'est que si on part sur des systèmes couplés électromécaniques il va falloir innover pour sortir de la recette traditionnelle maser+RMN.

### A propos des endroits où l'on trouve des systèmes à deux niveaux

Comme on l'a vu ci-dessus, il n'est pas nécessaire de faire de la mécanique quantique ni de parler de spins pour trouver des systèmes à deux niveaux. La recette est simple : prenez deux systèmes à un niveau, couplez-les, et vous aurez un système à deux niveaux. En pratique, peu importe que leurs énergies soient initialement les mêmes ou pas, puisque de toute manière le couplage se chargera de lever la dégénérescence.

Notons toutefois un gros avantage des systèmes quantiques par rapport aux systèmes clas-

siques : leur équation d'évolution (Schrödinger ;  $i\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ ) est d'ordre 1 en temps, ce qui veut dire qu'un degré de liberté correspond à exactement une valeur propre, ce qui est bien pratique. Pour les systèmes classiques, en effet, c'est généralement plus compliqué puisque l'équation d'évolution (typiquement, le PFD, ou en élec la fonction de transfert) est généralement d'ordre 2 en temps, avec deux valeurs propres dégénérées ( $\pm i\omega$ ). Notez que ceci est une justification tout à fait valable (que vous pourriez même sortir au jury, a priori) pour choisir d'axer votre leçon sur les systèmes quantiques plutôt que classiques.

Juste pour info, il existe des systèmes classiques dont l'équation d'évolution est d'ordre 1 en temps, ce sont nos amis les solides en rotation dans l'approximation gyroscopique. Il est d'ailleurs assez intrigant que ce soient justement les objets classiques qui ressemblent le plus à des spins, mais je m'é gare.

### Système à deux "vrais" niveaux vs système à deux niveaux effectifs

Dans sa leçon, Guillaume a choisi de présenter l'expérience de Stern & Gerlach pour arguer que le spin  $1/2$  est un "vrai" système à deux niveaux, contrairement à la molécule d'ammoniac qui n'est qu'un système à deux niveaux effectifs, une fois négligés tous les niveaux d'énergies bien supérieures correspondant aux autres (nombreux) degrés de liberté de la molécule.

Sur la forme, bien qu'un peu hors sujet (il faut plutôt centrer la leçon sur l'aspect "évolution temporelle"), cette partie introductive présente l'avantage d'introduire le dispositif expérimental qui resservira en troisième partie, donc bon, pourquoi pas.

Sur le fond, cependant, il est déraisonnable de chercher à démontrer que le spin  $1/2$  est un vrai beau système purement à deux niveaux. En effet, bien que le spin de l'électron soit effectivement un pur système à deux niveaux, l'électron n'est pas tout seul : il est (faiblement) couplé au spin du noyau, qui "splitte" chacun des deux niveaux en

$2S' + 1$  sous-niveaux, avec  $S'$  le moment cinétique du noyau. C'est seulement en faisant la moyenne de ces  $2S' + 1$  sous-niveaux qu'on trouve un paquet centré en plus ou moins  $1/2$ , d'où un système à deux niveaux effectifs là encore.

Si l'on veut travailler proprement, il vaut d'ailleurs mieux parler de  $J' = L' + S'$  (et puis en plus il faut connaître le nombre de neutrons et donc ça dépend de l'isotope - bref c'est compliqué). Notez que ce phénomène est le fameux couplage hyperfin, qui, dans le cas du césium 133, permet de générer des sous-niveaux suffisamment proches pour qu'on puisse asservir des systèmes électroniques dessus afin de faire fonctionner les horloges atomiques. Notez aussi que le fait que le spin qu'on mesure est majoritairement celui de l'électron (avec des petites corrections apportées par le spin du noyau) vient directement de la masse qui apparaît au dénominateur du facteur gyromagnétique - cf la LP04 sur la précession.

PS : notez que même si le couplage hyperfin n'existait pas, le spin de l'électron serait toujours couplé (même très faiblement) par interaction dipolaire à tous les autres spins de toutes les autres particules de l'univers. Donc dans tous les cas, trouver un vrai système à deux niveaux c'est juste peine perdue.

Pour conclure cette partie, je dirais qu'il est toujours plus intéressant (et plus réaliste) de discuter des approximations qui permettent de se ramener effectivement à une certaine situation théorique (par exemple, le système à deux niveaux). A l'inverse, vouloir montrer qu'il existe dans la nature des systèmes parfaits est (1) voué à l'échec et (2) moins intéressant finalement puisqu'on a moins d'approximations à discuter, de compromis à faire, etc.

## A propos de l'enrobage des calculs

Le problème de la partie "centrale" de cette leçon, c'est qu'on risque fortement de tomber dans le piège des calculs à n'en plus finir au détriment de la physique. Il semble déraisonnable de vouloir traiter directement, en un seul gros calcul, tous les aspects de la dynamique d'un système à deux niveaux en présence d'un forçage. Il pourrait être judicieux de procéder de façon pédestre :

- D'abord, sans coupler les deux niveaux (donc, dans l'exemple du spin, avec le champ  $\mathbf{B}_0$  constant selon l'axe  $z$ ), chacun évolue à sa propre fréquence, qui est une valeur propre

du hamiltonien.

- Ensuite, en couplant les deux niveaux de façon statique (dans l'exemple du spin, avec un champ transverse  $\mathbf{B}_1$  constant) : là encore il y a une évolution propre, mais il faut changer de base (cela permet d'introduire le premier changement de variables, mais aussi une partie importante de la physique, qui est qu'en couplant des états propres du hamiltonien initial on obtient des oscillations entre ces deux états, oscillations dont l'amplitude est d'autant plus grande que le couplage est fort. Si on a choisi de traiter le spin  $1/2$ , une analogie avec la molécule d'ammoniac pourrait s'avérer parlante à ce moment-là.
- Enfin, on introduit un forçage avec le champ  $\mathbf{B}_1$  qui dépend du temps, ce qui motive le second changement de variable où on se place dans la base tournante (ici il ne faut pas manquer de distinguer l'évolution "rapide", dans la base initiale, de l'évolution "lente", dans la base tournante - on peut même envisager de mentionner une analogie avec la toupie, voire avec votre exemple préféré en optique, le but étant de montrer que vous ne vous noyez pas dans les calculs mais que vous avez une idée claire et précise de la physique derrière). A ce moment-là on peut parler de résonance (notez que parler de résonance dès l'introduction est maladroit, car c'est une notion un peu vague et fourre-tout qui dépend beaucoup du contexte ; il serait donc plus raisonnable d'utiliser une définition "locale" juste au moment où on en a besoin).

Le double but de cette démarche pas-à-pas est (1) de rendre le "noyau dur" de la leçon plus digeste, en introduisant les détails calculatoires petit à petit en montrant bien pourquoi ils sont nécessaires, et (2) de mieux dégager la physique, qui est quand même ce que le jury attend principalement.

## A propos de l'application

Les principales applications auxquelles on peut penser sont plutôt du côté des systèmes quantiques, avec l'imagerie par résonance magnétique et l'effet maser. Dans les deux cas, il faut bien voir que les principales propriétés physiques auront déjà été distillées au cours de la seconde partie de la leçon, donc si on veut faire une troisième partie "application" il faudra trouver un angle

d'approche pas trop redondant - par exemple une présentation du dispositif expérimental. Attention, cette partie ne doit pas être hors sujet : il faut bien continuer de parler de l'évolution temporelle d'un système à deux niveaux, quitte à forcer un peu le concept au chausse-pied dans votre discours dès que l'occasion se présentera.

On peut aussi envisager de redécouper la leçon autrement, pour éviter ce genre de situation - c'est ce que je préconiserais, par exemple en faisant deux parties différentes pour bien séparer l'évolution sans forçage et l'évolution avec forçage (et la résonance qui en découle).



FIGURE 1 – Quand y'en a 1, ça va !