LP47 – Dispersion et absorption. Application aux fibres optiques

26 novembre 2021

Jean-Maxime Schlachter & Léa Bessonart

Niveau : L3

Commentaires du jury

Jusqu'en 2019, le titre était : *Propagation avec dispersion* (LP 25/26).

1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.

2012 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

Bibliographie

- ✍ *Électromagnétisme*, **Pérez** ⟶ Propagation dans un DLHI, susceptibilité électrique, modèle du câble coaxial (équation des télégraphistes).
- ✍ *Composition de Physique (A) Agrégation 2005*, ⟶ Paquets d'ondes, cohérence, dispersion. Exemple du sillage d'un bateau.
- ✍ *Problème de Physique (C) Agrégation 2009*, ⟶ Indice optique d'un matériau homogène linéaire, effet de la dispersion et de l'absorption dans un diélectrique placé à l'intérieur d'une cavité de Pérot-Fabry sur ses modes (pas évoqué dans la leçon).
- ✍ *BUP 649 Propagation des ondes vitesse de phase - vitesse de groupe*, **B. Lahay** ⟶ Notions de vitesse de phase, de groupe, absorption et dispersion. Exemples : vibration d'une corde et ondes à la surface de l'eau.
- ✍ *ressources.univ-lemans.fr* ⟶ Propagation d'un paquet d'ondes gaussien, pas mal http ://ressources.univ-lemans.fr/ AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html
- ✍ *Ondes lumineuses*, **Champeau** ⟶ Fibre optique, vraiment bien. Chap12.8, exos 1.3 et 1.4 pp59-61 (solution à la fin).
- ✍ *Optique physique*, **Taillet** ⟶ Fibre optique, moins bien que Champeau et présente quelques erreurs de calcul. Figures intéressantes pour parler de la dispersion.
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Exemples d'utilisation de la fibre optique, historique
- ✍ *Acoustique des instruments de musique*, **Chaigne** ⟶ Acoustique si le titre ne contraint pas à la fibre optique.
- ✍ *Physique des instruments de musique à vent : des sons cuivrés à la propagation NL en guides d'ondes non uniformes*, **Joël Gilbert** ⟶ Conférence sur l'acoustique NL à l'intérieur des instruments à vent : preopagation des harmoniques dans un tuyau ouvert aux deux extrémités dans le cas de faible NL (pas de forme analytique).

Prérequis

- Notion d'onde et de paquet d'ondes
- Equations de Maxwell dans le vide, propagation d'une onde EM dans le vide
- Relations de Maxwell dans un DLHI, polarisation, champ créé par une sphère uniformément polarisée
- Optique géométrique : loi de Snell-Descartes
- Guides d'ondes, adaptation d'impédance
- Diffusion thermique, effet de cave

Expériences

- Réflexion d'une onde dans un câble coaxial à vide
- Simulation de la propagation d'un paquet d'ondes gaussien

Table des matières

Introduction

Les phénomènes ondulatoires sont extrêment courants en physique : par exemple, les équations de l'électromagnétisme dans le vide ont pour solution des ondes planes progressives harmoniques, l'effet de cave est la réponse en température d'un système à une variation sinusoïdale de la température extérieure, l'acoustique étudie des ondes de pression que nous entendons... Dans chacun de ces cas, l'onde progressive harmonique associée est décrite par ce qu'on appelle une pulsation et un vecteur d'onde. Seulement, il y a des différences entre la forme d'une onde EM dans le vide et une onde thermique ou acoustique : la première, c'est la vitesse à laquelle elle se propage, une autre est que l'onde thermique va être atténuée exponentiellement, ce qui n'est pas le cas d'une onde EM dans un vide infini. Ceci révèle l'importance du modèle décrivant le phénomène étudié et découle de l'expression de k en fonction de ω, qu'on appelle la **relation de dispersion**. Le but aujourd'hui sera de comprendre pourquoi on donne ce nom à ce type de relations, ce qu'elle implique sur l'onde et comment elle intervient dans le transport d'informations.

Je vais maintenant vous montrer une illustration d'une relation de dispersion pour des ondes électromagnétiques dans un matériau, qui est différente de celle dans le vide. Nous avons déjà tous utilisés un câble coaxial pour mesurer une tension sur un oscilloscope, mais nous sommes-nous posés la question au préalable de savoir si l'information qui circule dans le câble et qu'on veut mesurer n'est pas altérée ? Pour accentuer les phénomènes liés à la propagation dans un câble coaxial, je vais prendre un câble long, d'une centaine de mètres environ et je vais envoyer un pulse dedans. Si je laisse le câble à vide, le pulse va voir une impédance infinie en bout de câble et sera totalement réfléchi. En acquérant la tension à l'entrée du câble, nous allons donc voir un signal correspondant au pulse envoyé dans le câble, et un second signal qui sera le même pulse réfléchi en bout de câble et qui sera revenu. Ceci nous permettra de voir qualitativement comment a évolué le signal pendant sa propagation dans le câble, et si le signal s'est peu déformé au bout d'un aller-retour alors on considérera que le câble coaxial peut bien être utilisé pour transmettre un signal à l'oscilloscope.

Propagation dans un câble coaxial

Envoyer un signal carré dans un câble coaxial de 100 m, commenter la forme du signal réfléchi par rapport au pulse envoyé.

Nous allons expliquer la déformation d'un signal lors de sa propagation. En particulier, deux phénomènes interviennent : la dispersion et l'absorption.

I Propagation d'un paquet d'ondes

I.A Propagation et absorption

On fera l'hypothèse d'ondes planes progressives harmoniquesdans un milieu ène, cette dernière hypothèse permettant une étude scalaire des ondes. On les écrit alors sous la forme

$$\underline{A}(x,t) = A\exp\left[i(\underline{k}(\omega_0)x - \omega_0 t + \varphi)\right]$$

De manière générale, le vecteur d'onde $\underline{k}$ est complexe, et est une fonction de la fréquence. On adopte la notation

$$\underline{k} = k' + ik''$$

qui conduit à l'expression suivante de l'OPH :

$$\underline{A}(x,t) = A\exp\left[-k''(\omega_0)x\right]\exp\left[i(k'(\omega_0)x - \omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

On trouve donc que dans le cas général, l'onde progressive harmonique est atténuée du fait de la partie imaginaire du nombre d'onde, tandis que sa propagation a pour origine sa partie réelle.

Nous avons vu un signal à la fois atténué mais aussi déformé sur l'oscilloscope. Si l'atténuation se comprend facilement à partir de la forme que prend l'OPH, il est difficile de voir pourquoi un signal se déformerait. Nous allons maintenant étudier plus en détails la propagation non pas d'une onde dans un milieu infini, mais d'un paquet d'ondes, dans des milieux infinis et finis.

I.B Milieu dispersif

Les ondes progressives harmoniques, même si elles sont solutions de l'équation du modèle, n'en sont pas pour autant physique : elles sont illimitées en temps et en espace. Si l'équation régissant le problème est **linéaire**, alors on peut raisonner en termes de *paquets d'onde* en sommant une infinité d'ondes progressives harmoniques, chacune étant solution de l'équation d'onde. Le paquet d'onde se met sous la forme (on peut inclure l'atténuation exponentielle dans le facteur de pondération) :

$$\underline{f}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} A(\omega) \exp\left[i(k'(\omega)x - \omega t + \varphi(\omega))\right] \,\mathrm{d}\omega$$

En faisant un DL à l'ordre 1 de $k'(\omega)$ et $\varphi(\omega)$:

$$k'(\omega) \simeq k'_0 \frac{\omega-\omega_0}{v_g} \quad ; \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(\omega_0)$$

on aboutit à

$$\underline{f}(x,t) = F\left(\frac{x}{v_g} - t\right) \exp\left[i(k'_0 x - \omega_0 t + \varphi_0)\right] \quad ; \quad F\left(\frac{x}{v_g} - t\right) = \int_{\mathbb{R}} A(\omega) \exp\left[i(\omega-\omega_0)\left(\frac{x}{v_g} - t + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)\right)\right] \,\mathrm{d}\omega$$

Ceci correspond à la propagation d'une porteuse de pulsation ω_0, modulée par une enveloppe. Toutes les composantes de l'enveloppe se propagent à la même vitesse et le paquet ne se déforme pas. L'enveloppe se propage alors à la vitesse v_g. La porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \omega_0/k'_0$.

Dessin

Eventuellement, faire un dessin d'un paquet d'ondes, en évoquant l'interprétation interférentielle (stationnarité de la phase) : le centre du paquet correspond à des interférences constructives pour toutes les pulsations, en bout il y a interférences destructrices. Préciser Δx sur le schéma et les principes de Heisenberg $\Delta x \Delta k = 4\pi$, $\Delta\omega\Delta t = 4\pi$. L'onde est spatialement et latéralement limitée du fait de son spectre limité.

Si on poursuit le DL de $k'(\omega)$ à l'ordre 2 :

$$k'(\omega) \simeq k'_0 + \frac{\omega-\omega_0}{v_g} + \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 k'}{\mathrm{d}\omega^2}$$

on obtient

$$\underline{f}(x,t) = \exp\left[i(k'(\omega_0)x - \omega_0 t + \varphi_0)\right] \int_{\mathbb{R}} A(\omega) \exp\left[i(\omega-\omega_0)\left(\frac{z}{V(\omega)} - t + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)\right)\right] \,\mathrm{d}\omega$$

avec $\frac{1}{V(\omega)} = \frac{1}{v_g} + \frac{\omega-\omega_0}{2}\frac{\mathrm{d}^2k'}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega_0)$. Ici, $V(\omega)$ est la vitesse d'une composante du paquet d'onde (v_g est pris à ω_0). Le fait qu'elle dépende de la pulsation implique une déformation du paquet d'ondes ; on appelle cela la **dispersion**. Cette dispersion étant liée à la pulsation, on la qualifie d'**intramodale**.

Etalement

Dans la LP25 de 2015, l'étalement au deuxième ordre est estimé. Le raisonnement a porté sur $v_g(k)$ et non $V(\omega)$, mais cela doit revenir au même puisque le calcul se fait par la dérivée de v_g qui est issu du du DL à l'ordre 1 de $k(\omega)$; on obtient

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 \sqrt{1 + (t/t_{disp})^2} \quad ; \quad t_{disp} \simeq \frac{\Delta x_0^2}{\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2}$$

Simulation de la propagation d'un paquet d'ondes gaussien

✍ ressources.univ-lemans.fr ⏲

Aller sur le site pour la simulation. Choisir une relation de dispersion ($\omega = Ak^2$ correspond à la relation de dispersion d'un électron libre ou d'ondes capillaires en eau profonde ; $v_g = 2v_\varphi = Ak$. $\omega = A\sqrt{k}$ pour des ondes de gravité en eau peu profonde ; $v_g = v_\varphi/2 = A/2\sqrt{k}$) (cf BUP). La dispersion se voit meiux pour un paquet étroit.

Dans un cours sur les guides d'ondes, qui est un milieu de dimension finie, vous avez appris que la partie réelle du nombre d'onde dans un guide dépend du mode de propagation ; cette dépendance est liée à des parcours différents dans le guide qui séparent des paquets d'onde de même pulsation centrale arrivant en même temps dans le guide. On dit alors que la dispersion est **intermodale**.

La relation de dispersion, qui lie le vecteur d'onde complexe à la pulsation, caractérise donc l'évolution d'une onde lors de sa propagation. Dans la pratique, on cherche à minimiser l'absorption pour que le signal se propage sur de longues distances, mais aussi la dispersion qui déforme le signal et altère l'information. Nous allons étudier l'origine de ces phénomènes à partir d'un modèle sur la matière.

II Origines de l'absorption et de la dispersion

II.A Propagation dans un DLHI

Dans un DLHI, les champs complexes $\mathbf{x_0} \exp[i(\underline{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ vérifient $\nabla \cdot \mathbf{E_0} = 0$ et $\nabla \wedge \mathbf{B_0} = -i\frac{\omega}{c^2}\underline{\varepsilon_r}\mathbf{E_0}$. En utilisant l'identité vectorielle sur $\nabla \wedge \nabla\wedge$, on obtient la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 0$$

On remarque que la relation de dispersion, est liée à la permittivité diélectrique du milieu et donc que son expression va nous permettre de caractériser l'absorption et la dispersion dans un milieu infini.

Pour connaître $\underline{\varepsilon_r}$, il faut un modèle de la réponse de la matière au champ électrique. On va donc utiliser la notion de **polarité***.*

II.B Modèle de Drude-Lorentz

Essayons de comprendre l'origine de la dispersion et de l'absorption à partir d'un modèle sur la matière, en particulier comment les électrons réagissent aux champs qu'on leur applique. Expérimentalement, et d'un point de vue classique, tout se passe comme si un électron dans un milieu matériel était soumis à une force de rappel élastique $-m\omega_0^2\mathbf{r}$ et un amortissement visqueux $-m\mathbf{v}/\tau$ où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ représentent respectivement la position de l'électron vis-à-vis du noyau et sa vitesse et m sa masse. Appliquons le principe fondamental de la dynamique (PFD) à un électron plongé dans un champ EM $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ dans le référentiel du noyau :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}}{\tau} - \omega_0^2\mathbf{r}$$

Dans un DLHI, la vitesse d'un électron est très inférieure à la vitesse de phase, donc on peut négliger le terme magnétique dans le bilan des forces.

Champ électrique

Concernant $\mathbf{E}$, dans un diélectrique uniformément polarisé, il vaut $\mathbf{E_{ext}} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$; si on ne tient pas compte de cette correction, $\mathbf{E} = \mathbf{E_{ext}}$. Les équations restent la même, pour l'interprétation il ne faut pas oublier que le milieu doit se polariser en un temps fini et que cette réponse est à l'origine de la relation de dispersion non triviale.

On résout l'équation du mouvement en régime sinusoïdal forcé (l'onde EM est sinusoïdale), soit $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{r_0} \exp[-i\omega t]$. Il vient, en notant x_0 les amplitudes des champs :

$$\mathbf{r_0} = \frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau)} \mathbf{E_0}$$

On a abouti à une expression sur la réponse d'un électron à un champ électrique, mais l'équation de dispersion fait intervenir $\underline{\epsilon_r} = 1 + \underline{\chi}$. On va donc utiliser la polarisation $\underline{\mathbf{P}} = nq\underline{\mathbf{r}}$ (n nombre d'électrons par unité de volume) car :

$$\mathbf{P_0} = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \mathbf{E_0} \quad ; \quad \underline{\chi}(\omega) = \frac{nq^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}$$

On appelle communément $\omega_p = \sqrt{nq^2/m\varepsilon_0}$ la **pulsation plasma**. Nous pouvons séparer les parties réelles et imaginaires de la susceptibilité électrique $\underline{\chi} = \chi' + i\chi''$:

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad ; \quad \chi''(\omega) = \frac{\omega_p^2 \omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau 2}$$

Ces relations exhibent trois comportements du diélectrique différents :

- $\omega \ll \omega_0$: $\underline{\chi}(\omega) \simeq \omega_p^2/\omega_0^2$ **P** et **E** sont en phase, ou encore le matériau répond instantanément au champ local.
- $\omega = \omega_0$: $\underline{\chi}(\omega) \simeq \exp[i\pi/2]\tau\omega_p^2/\omega_0$ **P** et **E** sont en quadrature.
- $\omega \gg \omega_0$: $\underline{\chi}(\omega) \simeq -\omega_p^2/\omega^2$ **P** et **E** sont en opposition de phase, et la susceptibilité tend vers 0. Les électrons n'ont pas le temps de répondre aux fluctuations du champ, le matériau devient totalement transparent aux grandes fréquences.

Pour le verre (cf Pérez), la pulsation propre est $\omega_0 = 1.5 \times 10^{16}\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ contre $\omega \simeq 1 \times 10^{15}\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. En optique, on travaille donc à $\omega \ll \omega_0$. Pour τ, l'ordre de grandeur est $1 \times 10^{-12}\,\mathrm{s}$; on vérifie alors $\omega/\tau \ll \omega^2, \omega_0^2$. On obtient alors

$$\underline{\chi} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La susceptibilité est réelle et quasiment constante sur l'ensemble du spectre visible ($\omega \in [2 \times 10^{15}; 4 \times 10^{15}]$rad/s). Elle croît avec la pulsation.
Cette étude permet de déterminer la permittivité relative complexe et l'indice optique complexe $\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega) = \underline{n}^2$. En posant $\underline{n} = n' + in''$, on obtient les relations suivantes :

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon_r' \quad ; \quad 2n'n'' = \varepsilon_r''$$

On peut les relier aux vecteur d'onde complexe à partir de la relation du II.A :

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c}(n' + in'')$$

et on trouve l'expression de la vitesse de phase et de l'amortissement :

$$v_\varphi = \frac{c}{n'} \quad ; \quad k'' = \frac{\omega}{c} n''$$

Dans le régime optique, pour le verre, on obtient un indice optique réel qui augmente avec la pulsation (l'expérience montre qu'il y a dispersion donc $n' \neq 0$ et la deuxième relation implique $n'' = 0$. Un autre argument serait de dire que la vitesse de phase serait infinie si $n' = 0$ ce qui n'est pas possible). Il s'agit du phénomène observé quand on regarde le spectre de la lumière passant par un prisme, cette dispersion est qualifiée de **normale**.
Pour $\omega \in [\omega_0 - \frac{1}{2\tau}; \omega_0 + \frac{1}{2\tau}]$, la partie réelle de la susceptibilité décroît et la susceptibilité est dominée par sa partie imaginaire : dans cette zone, de forte absorption, l'indice optique diminue avec la pulsation, on dit dans ce cas que la dispersion est **anormale**.

Autres phénomènes

Tous les phénomènes d'absorption/dispersion n'ont pas été pris en compte, il y a par exemple d'après la Fig.8.18 du Taillet de la diffusion de Rayleigh : le rayonnement dipolaire n'est pas pris en compte ici.

Maintenant qu'on a compris pourquoi un milieu matériel infini disperse et absorbe, je vais rappeler un résultat sur les guides d'onde : la dispersion peut aussi provenir d'un confinement.

II.C Dispersion dans un guide d'ondes

On va considérer un guide d'ondes constitué de deux diélectriques différents (cœur et gaine) d'indices réels n_c et n_g, mais pour simplifier on va étudier un guide rectangulaire infini, dont l'épaisseur du cœur est a. Vous avez vu, dans un cours sur les guides d'ondes, que dans ce cas, la relation de dispersion s'écrit

$$\tan\left(\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k^2} + \frac{p\pi}{2}\right) = \frac{k^2 - k_g^2}{k_c^2 - k^2}$$

où $k_i = \frac{\omega n_i}{c}$ et $p = 0; 1$ en fonction de la parité du champ électrique (cos ou sin). Cette relation de dispersion n'est évidemment pas triviale, on va donc avoir dispersion intermodale. On peut "résoudre" graphiquement cette relation de dispersion pour estimer le nombre de modes qui se propagent dans la fibre.

Dispersion dans une fibre optique

C'est complique, même pour une fibre à saut d'indice, à cause de la géométrie cylindrique. Elle fait intervenir plusieurs types de fonctions de Bessel ; si on n'arrive pas à la résoudre analytiquement ça ne sert à rien de perdre du temps dessus dans la partie III, l'étude de Δt donne facilement les limites de débit.

Maintenant qu'on a vu divers mécanismes d'absorption et de dispersion, on va s'intéresser à leurs effets sur le transport d'information dans des fibres optiques.

III Fibre optique

La fibre optique est un moyen de télécommunication qui s'est développé après l'invention du laser. Elle permet aujourd'hui de transmettre de l'information sur de grandes distances comme par exemple avec la fibre transatlantique (premier câble en 1988 France - Angleterre - Etats-Unis, débit 140 Mbits/s par fibre ; 4 fibres en tout ; 40000 conversions téléphoniques simultanées vs aujourd'hui débit de l'ordre du TBits/s), et à un haut débit. Deux phénomènes limitent l'utilisation d'une fibre et son débit ; il s'agit de l'absorption qui diminue l'amplitude du signal, donc fixe une limite à la longueur de la fibre, ainsi que la dispersion dans la fibre, qui étale le paquet d'onde et limite la fréquence du signal à transmettre (impulsion 1 scalaire impulsion 2 $= 0$ sinon perte d'information). L'absorption est bien maîtrisée aujourd'hui ; en effet on travaille à une longueur d'onde particulière vers 1550 nm telle que l'absorption par la silice soit minimale. L'atténuation de l'intensité d'une onde EM à cette longueur d'onde, définie par $A = 10\log[I(1km)/I_0]$, est d'environ 0.2 dB/m, soit une absorption d'environ 5% de l'intensité initiale. Cependant, ce qui nous intéressera plus dans cette leçon est la dispersion qui limite le débit d'une fibre. Pour rappel, la dispersion a deux origines dans un guide d'onde : la dispersion intramodale due au matériau et la dispersion intermodale due aux conditions aux limites dans la fibre. On va voir quel est l'impact de la dispersion intermodale sur le débit maximal de la fibre, et comment on peut minimiser cette dispersion.

Il existe plusieurs types de fibres, nous allons en étudier deux en particulier et comparer le débit qu'elles permettent.

III.A Fibres à saut d'indice

Une fibre à saut d'indice est constituée de deux diélectriques en forme de cylindre emboîtés l'un dans l'autre, comme représenté sur ce schéma. L'intérieur est appelé le *cœur* et l'extérieur la *gaine*. On note n_c les indices optiques respectifs. On considère également $n_c > n_g$ et $n_c - n_g \ll 1$.
Le but d'une fibre optique est de guider le signal, en utilisant la réflexion totale de la lumière aux interfaces cœur/gaine. En effet, si la réflexion n'était pas totale aux interfaces, une partie non négligeable de l'énergie de l'onde passerait dans la gaine et est possiblement perdue. Au bout de quelques réflexions, l'intensité lumineuse devient nulle et il n'y a plus de signal.

Réflexion non totale

En vrai c'est plus compliqué, il y a réflexion à l'interface gaine/air ou gaine1/gaine2, voir les fibres à trois couches par exemple.

Si α est l'angle du rayon lumineux par rapport à l'axe de la fibre, alors cet angle est retrouvé à l'interface cœur/gaine comme on le voit sur le schéma. En prenant $i = \pi/2 - \alpha$, la loi de Snell-Descartes donne, pour une réflexion totale,

$$\cos(\alpha_L) = \sin(i_L) = \frac{n_g}{n_c}$$

Traduisons la réflexion totale comme une condition sur l'angle d'incidence θ_i dans la fibre. La loi de Snell-Descartes donne :

$$n_0 \sin(\theta_i) = n_c \sin(\alpha)$$

Une condition nécessaire pour qu'il y ait réflexion totale dans la fibre est que l'angle d'incidence soit inférieur à un angle limite $\theta_{i,L}$ tel que $n_0 \sin(\theta_{i,L}) = n_c \sin(\alpha_L)$. En effet, augmenter l'angle d'incidence θ_i à partir de $\theta_{i,L}$ augmente l'angle de propagation α dans la fibre ce qui fait apparaître un rayon transmis dans la gaine. $\theta_{i,L}$ représente alors l'angle d'incidence maximal tel que le faisceau se propage dans la fibre. La condition se réécrit alors

$$ON = n_0 \sin(\theta_{i,L}) = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

ce qui définit l'*ouverture numérique* de la fibre.

Maintenant qu'on a compris que la condition pour qu'un rayon se propage est un intervalle continu d'angles, donc de modes (de nombre infini *a priori*[1]), on va se demander quelle est la dispersion intermodale maximale dans la fibre. Le chemin le plus rapide dans la fibre est la ligne droite soit $\theta = \pi$; le schéma et un petit calcul vont nous convaincre que le mode tel que $\theta = \theta_L$ conduit au chemin le plus long.
On raisonne sur le trajet d'un rayon entre deux réflexions, d'abscisses $z = 0$ et z. La longueur de ce trajet est $l = z/\sin(i)$. Le trajet le plus long est donc pour i minimal, soit l'angle d'incidence θ_L. La longueur de ce trajet est alors $l = zn_c/n_g$ et son retard par rapport au rayon d'incidence normale à l'abscisse z vaut

$$\Delta t = \frac{n_c z}{c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right)$$

On trouve donc une dispersion en temps proportionnelle à $n_c - n_g$. Pour minimiser la dispersion dans une fibre à saut d'indice, il faut donc choisir des indices optiques les plus proches possibles. Ce faisant, on réduit également le l'intervalle d'angles d'incidence transmis et le nombre de modes dans la fibre. Dans la pratique, on cherche à ce qu'un seul mode puisse se propager dans le fibre, celui d'incidence normale.
On va retravailler cette expression pour la rendre plus compacte en posant $2\Delta = 1 - n_g^2/n_c^2 \ll 1$. Alors on obtient $n_c/n_g \simeq 1 + \Delta$ et

$$\Delta t \simeq \frac{zn_c}{c}\Delta$$

La question qui vient maintenant qu'on a vu la dispersion intermodale dans la fibre est de savoir quel est le débit que l'on peut transmettre. On va procéder comme suit : des impulsions de largeur t_0 sont émises dans la fibre à intervalles de temps $1/F$, chaque impulsion représentant un bit (et format RZ, retour à zéro entre chaque bit). Comme le faisceau lumineux associé à une impulsion n'est pas unidirectionnelle (angle d'ouverture $\alpha \neq 0$), l'impulsion va être propagée sous plusieurs modes dans la fibre. Soit Δt la dispersion temporelle de l'impulsion, L_{max} la longueur maximale de la

1. En pratique, les ondes interfèrent entre elles, et donc un nombre limité d'ondes se propagent, celles pour lesquelles les interférences sont constructives. On peut le voir du fait que la relation de dispersion fait intervenir le rayon du cœur, voir le Taillet. On arrive à restreindre le nombre de modes à 1 en utilisant un petit rayon de cœur (fibres monomodes).

fibre, telle que les impulsions ne se recouvrent pas, $B = L_{max}F$ la bande passante de la fibre en Hz · km (!!!). La condition de non recouvrement impose $t_0 + \Delta t < 1/F$. En supposant $t_0 \ll \Delta t$, on trouve

$$B = \frac{c}{\Delta n_c}$$

Application numérique : $n_c = 1.50,\ n_g = 1.47,\ F = 100\,\mathrm{MHz} \rightarrow B = 10.1\,\mathrm{MHz}\cdot\mathrm{km},\ L_{max} = 101\,\mathrm{m}$
La communication longue distance est impossible à ce débit.

Pour diminuer la dispersion, on peut envisager l'emploi d'un deuxième type de fibres optiques, celles à gradient d'indice.

III.B Fibres à gradient d'indice

On considère une fibre composée d'un cœur d'indice variable et d'une gaine. On modélise la fibre par cette expression :

$$n(r) = \begin{cases} n_c\sqrt{1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^q}, & r < a \\ n_c\sqrt{1-2\Delta} = n_g, & r > a \end{cases}$$

L'idée est que dans ce cas, un rayon hors d'axe voit un indice plus faible que celui d'incidence normale, sa vitesse de propagation est donc plus grande ce qui compense la dispersion temporelle.
On peut voir cette fibre comme un ensemble de petits cylindres d'indice $n(r)$. Si on applique la loi de Snell-Descartes à chaque interface entre cylindres, on voit que la trajctoire du rayon est courbée et on trouve que $m = n(r)\cos(\theta(r))$ est une quantité conservée le long de la trajectoire du rayon, où θ est défini par rapport à la direction parallèle à l'axe de la fibre. Le cos est borné à 1 et $n_g < n_c$; avec la condition que le rayon à l'interface avec la gaine est totalement réfléchi, soit $\theta(r_{max}) = 0$, il vient $n_g < m < n_c$.
Avec m, l'abscisse curviligne s'écrit $ds = dr/\sin(\theta) = dr/\sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}}$. Le chemin optique parcouru par un rayon entre $r(z_0) = 0$ et $r(z_1) = r_{max}$ (point de courbure noté T) est donc

$$\mathcal{L} = \int_0^{r_{max}} \frac{n^2(r)}{\sqrt{n^2(r) - m^2}}\ \mathrm{d}r$$

Au point T, $\theta(r_{max}) = 0$ donc $m = n(r_{max})$. On pose alors $u = r/r_{max},\ p = 2\Delta(r_{max}/a)^2 = 1 - m^2/n_c^2$, on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{n_c^2}{\sqrt{2\Delta}}\left(\frac{a}{r_{max}}\right)^{q/2} r_{max}\int_0^1 \frac{1 - pu^q}{\sqrt{1-u^q}}\ \mathrm{d}u$$

D'un autre côté, la distance parcourue est

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{r_{max}} \frac{m}{\sqrt{n^2(r) - m^2}}\ \mathrm{d}r \\ &= \frac{m}{\sqrt{2\Delta}}\left(\frac{a}{r_{max}}\right)^{q/2} r_{max}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^q}}\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Le temps parcours dans la fibre de longueur $L \gg Z$ est donné par $\tau = \mathcal{L}L/Zc$. En utilisant des égalités entre intégrales explicitées dans le Champeau, on obtient :

$$\tau = \frac{L}{c}\frac{n_c^2}{m}\left[1 - \frac{2}{q+2}\left(1 - \frac{m^2}{n_c^2}\right)\right]$$

Le temps de parcours est minimal pour $m^{min} = n_c\sqrt{q/2}$ et vaut

$$\tau^{min} = \frac{4}{2+q}\sqrt{\frac{q}{2}}\frac{n_c L}{c}$$

On peut remarquer que le temps de trajet minimal n'est plus le cas de l'incidence normale !
On revient aux conditions sur m. m doit vérifier $m \in [n_g, n_c]$ et q doit minimiser la variation de τ dans la fibre. La courbe de $\tau(m)$ étant décroissante jusqu'à m^{min} puis croissante, alors pour rendre τ minimal, il faut que m^{min} ne soit pas un bord de l'intervalle. La courbe $\tau(m)$ atteint donc son maximum pour n_g ou n_c. Si $\tau(n_g) = \tau(n_c)$, alors

τ^{max} est minimal (on ne peut pas diminuer τ^{max} en changeant n_c à n_g fixé par exemple). Le paramètre de la fibre qui vérifie la dernière égalité est $q = 2n_g/n_c$, on aboutit à

$$\Delta t = \frac{n_c L}{c} \frac{1}{1+\frac{n_g}{n_c}} \left(1 - \sqrt{\frac{n_g}{n_c}}\right)^2 \simeq \frac{\Delta^2}{8} \frac{n_c L}{c}$$

La bande passante pour cette fibre est donc

$$B = \frac{8c}{\Delta^2 n_c} = \frac{8}{\Delta} B_{saut}$$

Application numérique : $B = 4\,\text{GHz} \cdot \text{km}$, $\text{L}_{\text{max}} = 40\,\text{km}$
Le gradient nous a permis d'augmenter significativement la distance de parcours de l'information, mais toujours pas à grande échelle.

Conclusion

Aujourd'hui, nous avons vu qu'un signal se déforme et est atténué au cours de sa propagation dans un milieu matériel fini. La dispersion d'un signal a deux origines, la première liée au matériau, la seconde aux frontières du matériaux. Pour envoyer un signal dans un guide et l'analyser en sortie, il faut minimiser ces deux phénomènes, ce qui est fait dans les fibres optiques en choisissant bien la longueur d'onde de travail et en utilisant des fibres à gradient d'indice ou monomodes. Dans une prochaine leçon, il sera intéressant d'étudier le modèle du câble coaxial que nous n'avons pas pu faire aujourd'hui.

Ce qui a été fait

Introduction condensée : l'absorption et la dispersion sont des phénomènes sur des ondes, et peuvent donc être trouvés dans différents domaines de la physique : EM/optique, diffusion, méca flu/acoustique (diapo). Onde EM dans une vide infini versus l'effet de cave : est-ce qu'une onde EM dans un milieu peut avoir la même forme que celle de l'effet de cave ? → illustration : le câble coaxial.
Diapo avec les longues formules de la partie I. Au tableau : insister sur DL1 donne v_g indépendant de ω, pas le cas si DL2. Simulation de la propagation d'un paquet d'ondes : sans dispersion et avec dispersion.
II.A : Relation de dispersion et liens avec l'indice optique. Vitesse de phase en fonction de n', absorption en fonction de n''.
II.B : Modèle de Drude-Lorentz au tableau. Dans le domaine optique, pour le verre, il n'y a pas d'absoprtion mais la dispersion est observée donc $n'' = 0$ et $n' \neq 0$ (et sinon $v_\varphi \to \infty$). n' fonction croissante de ω donc dispersion normale.
II.C : Passé en quelques secondes sur diapo (ça n'a pas plu, il aurait mieux valu la sauter). Différence entre dispersion intramodale et dispersion intermodale.
III.A : Conditions de réflexion totale et implication sur l'angle d'incidence (ouverture numérique). Dispersion temporelle dans une fibre. Diapo : schéma pour l'étalement d'une impulsion et la bande passante mais pas le temps de l'aborder.

Questions

- Origine de la dispersion et de l'atténuation dans un câble coaxial ? → Courant de fuite entre les deux conducteur dans le diélectrique + pertes par effet joule (dielectriques et conducteurs pas parfaits).
- Comment tu as choisi les paramètres pour la manip avec le câble coaxial ? Pourquoi prendre une fréquence de 1MHz ? → Il faut éviter recouvrement entre les pulses (délai burst : 1 ms).
- Faire un schéma des origines de la dispersion et de l'absorption. → On se place dans le cadre de l'ARQS pour un élément élémentaire du câble, puis dessin du circuit électrique équivalent (voir Pérez par ex., équation des télégraphistes).
- Il existe une condition pour ne pas avoir de dispersion dans le câble, du coup pourquoi on a des câbles qui dispersent ? → Condition de Heaviside (voir LP26 2018) qui lient des paramètres dépendant des matériaux choisis et pas contrôlables expérimentalement.
- Est-ce que la dispersion peut etre utile ? → Spectrométrie pour séparer longueur d'onde.
- L'indice k'' est lié atténuation exponentielle de l'onde, est ce que c'est toujours le cas ? → Cela dépend du signe de k'' car il y a un signe $-$ dans l'exponentielle. Dans un milieu amplificateur, $k'' \neq 0$ ce qui permet l'amplification.
- Est-ce qu'il y a un lien entre k' et k'' ? → On a vu dans le modèle de Drude qu'ils avaient la même origine, donc ils sont liés physiquement. Du point de vue mathématique, ces grandeurs sont reliées par les relations de Kramers-Kronig.
- Différence entre atténuation et absorption ? → Dépend du mécanisme lié à la décroissance de l'onde. Pour une onde sphérique ? → Pour une onde sphérique, l'énergie sur la surface équiphase est conservée, on parle d'atténuation quand on s'éloigne du centre. L'absorption correspond en fait à un échange d'énergie entre l'onde et la matière.
- Faut-il un mécanisme de dissipation pur avoir absorption, atténuation ou dispersion ? → dans Drude : on a χ et la dissipation vient du terme de frottement fluide, dans ce cas la susceptibilité est réelle. Sans dissipation, l'atténuation se fait car l'énergie doit se conserver au cour de la propagation du paquet d'ondes.
- Comment appelle-t-on n' et n'' ? → n'=indice de réfraction et n''= indice d'extinction.
- Hypothèses du modèle de Drude ? → Non relativiste, classique, équilibre thermique et $\lambda_E >>$taille atome pour le considérer comme uniforme.
- Origine de la forme de la force de frottement et de rappel ? → Le rappel vient de la loi de modération de Lenz : le déplacement des électrons induit un moment dipolaire qui exerce une force opposée à celle du champ sur les électrons. Les froteements se font sur le réseau, mais il faut garder en tête que ces forces sont phénoménologiques, "tout se passe comme si".
- Parfois on utilise une autre type de force. Laquelle ? → Une force en $\mathrm{d}^3r/\mathrm{d}r^3$, symbolise le Bremsstrahlung.
- Pourquoi se concentrer sur les diélectriques dans cette leçon ? → Diélectrique dans fibres optiques et dans câble coaxial.
- Dans Drude, si il n'y pas de champ extérieur, est ce que l'électron peut se retrouver en r=0 sur le noyau ? → Il y a toujours un champ local qui existe (dû aux autres particules chargées) et il y a une raison quantique (vision classique amène au fait que le Bremsstrahlung fait s'écraser l'électron sur le noyau : modèle planétaire, classique, faux).
- Est-ce que les ODG donnés pour le verre sont des grandeurs classiques ou pas ? En fait pour un matériau polarisable on retrouve toujours ces ordre de grandeurs.
- Pourquoi on parle de dispersion normale ? → C'est la première rencontrée expérimentalement, avec les primes.
- Il a des dispersions anormales aussi ? Tracer χ en fonction de ω. → Cas pente positive : normale, cas pente négative : anormale.
- La dispersion anormale est-elle utilisée en physique ? → La dispersion anormale est utilisée pour comenser la dispersion normale par ex. dans une fibre optique, au niveau des répétiteurs. Les lasers femtosecondes utilisent la dispersion anormale pour compresser les paquets d'ondes.

- Pourquoi seulement certains modes peuvent se propager dans un guide d'onde ? → Modes qui raisonnent et d'autres pas car ils ne vérifient pas les conditions limites. On peut voir ça comme des interférences (voir le Taillet pour les interférences dans une fibre optique, version optique géométrique).
- Comment fonctionnent les amplificateurs dans les répétiteurs ? → Méthode optique avec émission stimulée.
- Pourquoi est-il mieux de procéder avec une méthode optique qu'électronique ? → Méthode optique plus rapide. on gagne en latence.
- Ordre de grandeur de la latence ? Latence entre un serveur et un utilisateur ? → $\Delta t = \frac{Dn_c}{c}$. Comment peut-t-on faire mieux ? → En utilisant des indice optiques très proches de 1.
- La dispersion intermodale limite le débit, pourquoi ? → Format RZ (retour à zéro entr chaque bit). Si l'étalement du paquet (=1 bit) devient trop important, deux paquets successifs fusionnent et on perd l'information.
- Est-ce qu'il y a des fibres qui limitent la dispersion intermodale ? → Fibre a gradient d'indice mieux que fibre à saut d'indice. Pourquoi ? → Les rayon hors d'axe voient un indice optique plus faible donc une vitesse de phase plus grande.
- Comment calculer la trajectoire des rayons dans le cas d'une fibre à gradient d'indice ? → Equation eikonale.
- D'où vient l'équation eikonale ? C'est quoi le principe de Fermat ? Avec quelle équation fondamentale dans un autre domaine peut-on faire l'analogie du principe de Fermat ? → L'équation eikonale est l'analogue pour l'optique de l'équation de Euler-Lagrange. Il s'agit d'un principe variationnel.
- Est-ce que tu connais les solitons ? → Ce sont des ondes telles que la dispersion est nulle : des phénomènes non-linéaires compensent la dispersion ; de plus elles conservent leur énergie donc pas d'atténuation.
- Est-ce qu'il y a encore mieux qu'une fibre à gradient d'indice ? → Les fibres monomodes. On sélectionne un mode (en prenant un rayon du cœur très faible) donc pas de dispersion intermodale.
- ODG rayon du cœur ? → 20 -30 microns et pour monomode 5 microns
- Différence d'indices entre le coeur et la graine ? → De l'ordre du centième.
- Record de débit sur les fibre optique ? → 10^{16} bits par seconde , débit actuelle sur 11km.

Remarques

- Leçon un peu longue (a un peu débordé).
- Forme : leçon bien présentée à par le support où tu lances de grandes formules. Beaucoup de couleur et du lien entre les parties : bien.
- Bonne idée d'avoir introduit la vitesse de groupe avant la vitesse de phase.
- Bien articulé, bien d'avoir donné des ODG de temps à autre et pour l'aspect historique.
- Intro bien, on voit des domaines de la physique différents. Expérience intro top, permet de voir les phénomènes en vrai.
- Problème un peu sur les formules sur le diapo qui ne sont pas commentées. (côté mathématique du sujet de la leçon pas terrible)
- Explication plus simple et rapide sur la dispersion : voir la LP25 2015, faire un schéma au tableau.
- Animation : bien, dommage qu'on voit mal l'enveloppe du paquet d'ondes, et que la vitesse de groupe est différente de la vitesse de phase. Faire un code python grâce auquel on simule la dispersion en mettant en avant un point de l'enveloppe et un point de la porteuse : on voit mieux la différence de vitesses.
- Partie Drude un peu longue mais besoin de faire un calcul pendant la leçon et contient beaucoup de physique.
- Tracer $\chi(\omega)$ une fois qu'on l'a obtenue.
- La partie II.C fait écho à la partie III.A : les deux traitent des guides d'ondes, donc on peut enlever la II.C.
- Dommage de ne pas avoir sorti une fibre optique.

- On pourrait illustrer la condition de réflexion totale avec une simulation, une vidéo ou bien encore une manip. Par ex. (le jet d'eau joue le rôle de guide) https ://www.youtube.com/watch ?v=XrWB0KLXpn8 .
- La partie III.B (non traitée pendant la leçon) est intéressante mais très calculatoire et longue : penser à une façon d'introduire la fibre à gradient d'indice de façon plus qualitative.
- Pour le fond plus ça avançait mieux c'était car on finit par tirer des généralités. Pas d'erreur dans les notions.
- Faire un conclusion où on dit qu'on a vu un cas particulier mais qu'il s'agit de propriétés générales (exemple étalement) (voir la biblio : acoustique, ondes à la suface de l'eau ou sillage d'un bateau (BUP, agreg 2005),...).
- Cours sur les ondes : http ://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf .
- Questions : très bien pour les réponses mais tu pars trop loin. Ne pas montrer que tu sais trop de choses.
- Parler d'énergie quand on parle d'atténuation et d'absorption.
- Ne pas oublier que la condition d'absorption est sur le produit de k' et k'' (précisé dans le Pérez chap28).