

LP 6 SYSTÈME TERRE-LUNE

8 avril 2022

Oui

Nathan Berrit & Juliette Colombier

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✦ *Mécanique PCSI/MPSI*, **P Brasselet**¹
- ✦ *Sujet agreg blanche chimie 2019*, **G. Laibe**

- Cool sur les marées et très clair.
- C'est random mais dur de trouver des refs sur l'éloignement

Prérequis

- Théorèmes mécanique
- Forces centrales
- Référentiels non galiléens

Expériences



Table des matières

1	Problème à deux corps	2
1.1	Réduction du problème	2
1.2	Calcul de trajectoire	3
2	Le phénomène de marées	3
2.1	Le référentiel géocentrique	4
2.2	Phénomène de marées	5
2.3	Influence des marées sur la mécanique Terre-Lune	6
3	Question	7
4	Remarques	8

1. Par soucis de place toujours, je pense pas qu'il soit nécessaire de mettre les références exactes surtout pour un livre classique.

Introduction

1 Problème à deux corps

On va dans un premier temps chercher à évaluer la trajectoire de la lune autour de la Terre. Pour cela, oublions tout le reste et considérons le système Terre -Lune comme un système isolé. Notons m_L la masse de la lune, m_T la masse de la Terre. On a

$$m_T = 5,9722 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

et

$$m_L = 7,342 \cdot 10^{22} \text{kg}$$

et

$$TL \sim 684000 \text{km}$$

.

Masse de la Terre et de la Lune

Comment sont déterminées ces masses ?

Pour celle de la Terre, à partir de la constante gravitationnelle géocentrique - plusieurs manières pour déterminer cette constante.

Pour la lune, historiquement à partir du phénomène de marée.

Pour la distance Terre Lune, on a placé un miroir sur la lune pour pouvoir mesurer avec un laser.

On note $\vec{r}_t = \vec{OT}$ et $\vec{r}_l = \vec{OL}$ les positions de respectivement le centre de la Terre et celui de la Lune. On considère donc le système Terre Lune dans un référentiel galiléen de centre O.

On pourrait vouloir appliquer le PFD à la Terre et la Lune, mais on se rend compte que dans ce cas on va avoir deux équations couplées. Du coup on va plutôt décomposer en un mouvement d'ensemble, celui du barycentre, et dans un second temps le mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre.

1.1 Réduction du problème

On définit le barycentre comme :

$$(m_l \vec{OL} + m_t \vec{OT}) = (m_l + m_t) \vec{OG} \quad (1)$$

Si on dérive puis qu'on reporte dans le PFD, la loi de conservation de la quantité de mouvement nous donne :

$$\frac{d}{dt} [(m_l + m_t) \vec{v}_G] = 0 \quad (2)$$

Ainsi le barycentre est en mouvement rectiligne uniforme pour un système isolé, il nous suffit d'étudier l'évolution de $\vec{r}(t) = \vec{TL}$

Ok donc maintenant on se place dans le référentiel barycentrique. On va considérer une particule fictive de position \vec{r} et de masse la masse réduite du système

$$\mu = \frac{m_l m_t}{m_l + m_t} \quad (3)$$

Si on écrit les équations du mouvement de la Terre et de la Lune dans le référentiel barycentrique, on obtient :

$$m_T \frac{d^2 \vec{GT}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} m_t m_l}{r^2} \vec{u} \quad (4)$$

et de même

$$m_L \frac{d^2 \vec{GL}}{dt^2} = \frac{\mathcal{G} m_t m_l}{r^2} \vec{u} \quad (5)$$

On trouve donc :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} m_t m_l}{r^2} \vec{u} \quad (6)$$

Ok on a bien réduit notre problème ! Maintenant regardons la forme de la trajectoire de notre point fictif.

Variable r

Attention à bien préciser parce que après on réutilise r en passant en coordonnées polaires. Ce serait peut-être mieux de changer en \vec{x} ici.

1.2 Calcul de trajectoire

Pour simplifier, on va dans un premier temps noter la force $F(r)$. En cylindrique :

$$\mu[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta] = F(r)\vec{e}_r \quad (7)$$

D'où en projetant

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (8)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (9)$$

On a donc un système pas facile à résoudre, on va donc utiliser une astuce et considérer $r(\theta(t))$ et alors

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

En introduisant la constante des aires qu'on a déjà vue. De même on trouve

$$\ddot{r} = -C^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (10)$$

et de plus

$$-r\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^3} \quad (11)$$

Ok super réécrivons l'équation en remplaçant et en faisant le changement de variable

$$u = 1/r \quad (12)$$

Et donc finalement :

$$-\mu C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = F(u) \quad (13)$$

Appliquons ça à notre force maintenant, toujours pour alléger on note $K = \mathcal{G}m_t m_l$ et du coup on a

$$-\mu C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -K u^2 \quad (14)$$

Soit

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2} \quad (15)$$

Ah bah niquel on sait résoudre ça !

$$u = \frac{K}{mC^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (16)$$

D'où

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (17)$$

(bon on peut faire bcp plus rapide en passant par Runge Lenz mais bon)

On reconnaît l'équation d'une conique d'excentricité e et de paramètre $p = \mu C^2 / K$. Physiquement, p traduit la compétition entre la conservation du moment cinétique qui tend à maintenir la particule loin de la masse centrale, et la gravité qui tend à faire tomber cette particule. On rappelle également que pour $e < 1$, la trajectoire est fermée. On peut montrer que $e = \frac{c}{a}$ avec c la distance entre le centre de la trajectoire et un des foyers et a le demi grand axe.

Ramenons nous maintenant à la trajectoire des deux corps. Par homothétie, chacun des corps réels décrit dans le référentiel barycentrique une conique dont le centre de masse occupe l'un des foyers. La valeur de e détermine la nature de la conique. Le calcul pour la Lune donne une excentricité comprise entre 0,0255 et 0,0775. On a donc bien une trajectoire elliptique. Regardons ce que ça donne numériquement : programme python qui calcule les homothéties). Faire le lien avec la première loi de Kepler.

Pour conclure, on voit que la trajectoire est très proche d'être circulaire. La période de rotation de la Lune autour de la Terre : 29,5 jours.

2 Le phénomène de marées

✦ Brasselet

2.1 Le référentiel géocentrique

Commençons par quelques rappels : on définit le **référentiel de Copernic** \mathcal{R}_C : son origine est le centre de gravité du système solaire (\sim centre du soleil) et ses trois axes sont dirigés vers des étoiles "fixes" très éloignées.

Le **référentiel géocentrique** \mathcal{R}_G a lui pour origine le centre de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ainsi \mathcal{R}_G est en translation par rapport à \mathcal{R}_C galiléen.

Appliquons le PFD à la Terre dans le référentiel de Copernic ; elle est soumise aux forces gravitationnelles des autres astres et on note T son centre

$$M_T \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(T) = \sum_i M_T \vec{\mathcal{G}}_i(T) \quad (18)$$

En notant $\mathcal{G}_i = \frac{GM_i}{D_i^2}$.

On peut calculer en odg ces champs pour voir lesquels vont avoir le plus d'importance :

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
M (kg)	2.10^{30}	7.10^{22}	5.10^{24}	6.10^{23}	2.10^{27}
D (m)	1.10^{11}	4.10^8	4.10^{10}	8.10^{10}	6.10^{11}
\mathcal{G} (m.s ⁻²)	1.10^{-2}	3.10^{-5}	2.10^{-7}	6.10^{-9}	4.10^{-7}

FIGURE 1 – Caption

Bon on s'y attendait, c'est le soleil le plus important mais on voit que le deuxième c'est la lune. Regardons plus en détail.

Pour cela on va appliquer le PFD à un corps de masse m situé non loin de la surface de la Terre, en un point P . Comme on l'a vu, le référentiel géocentrique est en translation par rapport à celui de Copernic, il faut donc tenir compte des forces d'inertie. On note \vec{F} les forces extérieures autres que celles de gravitation.

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}_G} = \vec{F} + m \vec{\mathcal{G}}_T(P) + \sum_i m \vec{\mathcal{G}}_i(P) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad (19)$$

On a tout de suite que $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ puisque pas de rotation, et que

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(T)$$

Coup de chance on vient d'écrire cette accélération, on a alors

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}_G} = \vec{F} + m \vec{\mathcal{G}}_T(P) + \sum_i m (\vec{\mathcal{G}}_i(P) - \vec{\mathcal{G}}_i(T)) \quad (20)$$

Le terme différentiel est appelé **terme de gravitation différentielle** ou encore **terme de marée**.

Regardons en odg la valeur de ce terme : pour cela on fait un petit DL en considérant qu'on regarde un point de la surface de la Terre donc la distance entre le centre de la Terre T et le point P est très petite devant la distance aux astres. Notons d la distance entre P et T , D_i la distance la distance entre l'astre i et la Terre :

$$|\mathcal{G}_i(P) - \mathcal{G}_i(T)| \approx \frac{GM_i}{(D_i - d)^2} - \frac{GM_i}{D_i^2} \quad (21)$$

Donc

$$|\mathcal{G}_i(P) - \mathcal{G}_i(T)| \approx \frac{GM_i}{D_i^2} \left(\frac{1}{(1 - d/D_i)^2} - 1 \right) \approx \frac{GM_i}{D_i^2} \left(1 + \frac{2d}{D_i} - 1 \right) \approx \frac{2GM_i d}{D_i^3} \quad (22)$$

Calculons en odg les valeurs de ce terme, en considérant P à la surface de la Terre soit $d \approx 6400$ km :

On voit que le terme de marée est plus grand pour la lune que le soleil !

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
$ \mathcal{G}_i(\text{P}) - \mathcal{G}_i(\text{T}) \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$	5.10^{-7}	1.10^{-6}	7.10^{-11}	1.10^{-12}	8.10^{-12}

FIGURE 2 – Caption

Ok on a vu que les marées océaniques étaient principalement dues à la Lune, maintenant regardons comment on peut expliquer qualitativement ce qu'on voit au niveau des marées.

2.2 Phénomène de marées

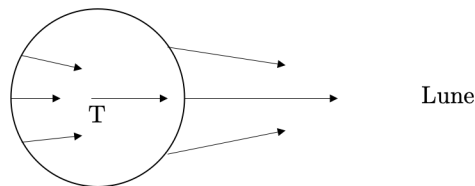


FIGURE 3 – Schéma du champ de lune

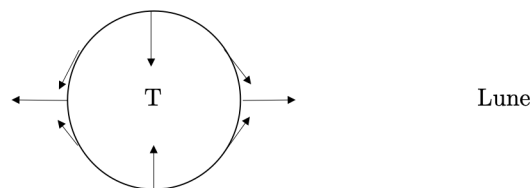


FIGURE 4 – Schéma du terme différentiel

On comprend ici la création de deux bourrelets océaniques (on parle des marées même si les zones "solides" ressentent la même force car la Terre est principalement recouverte d'océans).

Maintenant qu'on a compris regardons les marées en elle-même pour en voir leurs principales caractéristiques : <http://maree.info/52>. On observe plusieurs choses :

- Il y a deux marées par jour, on passe par deux maxima et deux minima.
- Les marées ne sont pas de la même importance.
- Le décalage des heures de marée varie de jour en jour.

On va maintenant chercher à expliquer ces observations.

DEUX MARÉES PAR JOUR

On sait que la Terre tourne sur elle-même en 24 jours alors que la Lune tourne autour de la Terre en environ 30 jours. On peut donc en première approximation négliger son déplacement. Comme la Terre fait un tour en un jour, un point de la surface des océans passe deux fois par jour au niveau d'un bourrelet. Un point passe donc deux fois par un maxima et deux fois par un minima.

IMPORTANCE DES MARÉES

On le voit sur le site par le coefficient de marée, qui est lié à leur hauteur. Regardons l'évolution de la hauteur des marées sur un cycle lunaire : Ok on voit une certaine synchronisation avec les phases de la Lune : mais qu'est-ce que ça changerait ? Ah bah ces phases dépendent du soleil ! C'est en fait du à sa contribution dans le terme de marée. En effet, selon la position du soleil par rapport à la Terre, les contributions du soleil et de la lune s'additionnent ou non. Faire un schéma pour expliquer les forces dans les deux cas.

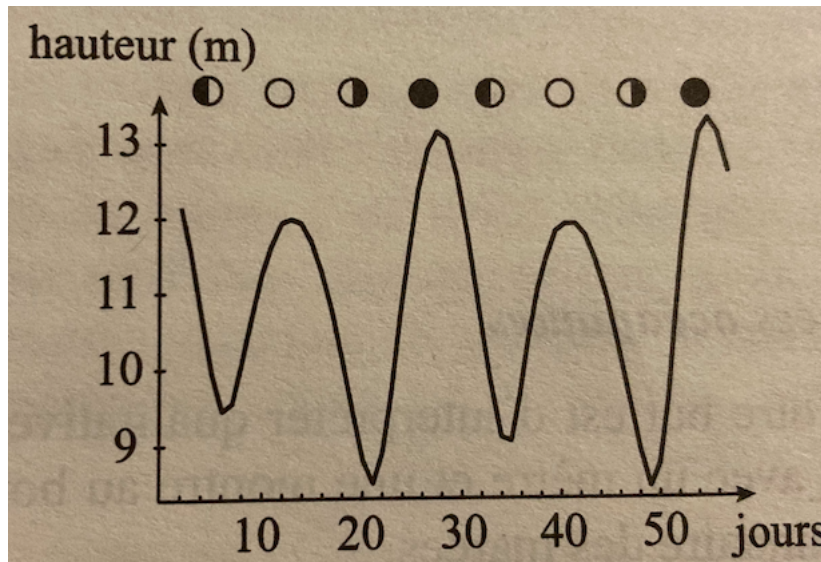


FIGURE 5 – figure prise au Brasselet, hauteur entre février et mars 98

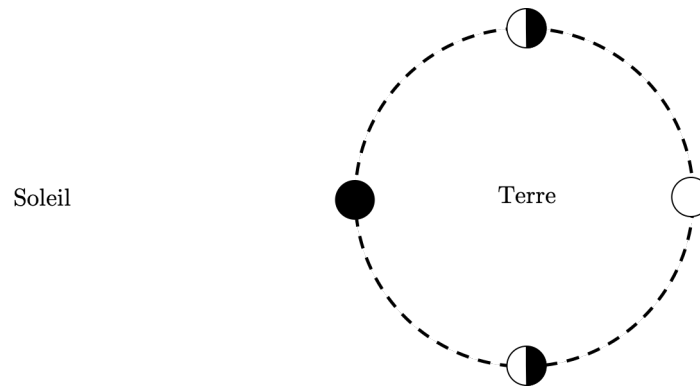


FIGURE 6 – Caption

2.3 Influence des marées sur la mécanique Terre-Lune

Pour l’instant on n’a parlé que de la déformation des océans, mais la croûte terrestre se déforme également. Le phénomène de marée océanique entraîne des forces visqueuses dans les océans, et celui de marée planétaire implique des forces visqueuses entre les couches de la croûte terrestre : les deux vont donc dissiper l’énergie mécanique du système. On comprend que cette dissipation d’énergie va ralentir la rotation propre de la Terre.

Faisons l’approximation que la trajectoire de la Lune est circulaire, on a vu précédemment que ce n’était pas si loin de la réalité. On peut alors écrire la pulsation ω :

$$m_L \frac{(TL)^2 \omega^2}{TL} = \frac{\mathcal{G}m_t m_t}{(TL)^2} \tag{23}$$

D’où

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_t}{(TL)^3}} \tag{24}$$

Et donc le moment cinétique s’écrit :

$$l = m_L \sqrt{\mathcal{G}m_t (SL)} \tag{25}$$

Or si on considère le système Terre-Lune comme un système isolé, on peut écrire la conservation du moment cinétique, en notant Ω la vitesse de rotation de la Terre et :

$$\frac{dL}{dt} = J\Omega + m_L \sqrt{\mathcal{G}m_T (SL)} = 0 \tag{26}$$

Rq : on néglige le moment cinétique de rotation de la Lune car $I = \frac{2}{5}m_l R_L$

On voit donc que la diminution de la vitesse de la rotation de la Terre va s'accompagner d'une augmentation de la distance Terre Lune. On remarque également que d'après l'expression de la vitesse angulaire, la vitesse de rotation de la lune va augmenter.

Vérifions que notre approche qualitative est raisonnable avec ce qu'on sait sur ces systèmes. Expérimentalement, on mesure une variation de la distance Terre Lune de 3,8 cm/an, soit une augmentation de presque 9% sur 4 milliards d'années. De même, la durée du jour s'allonge de 1ms par siècle. Ainsi, on estime qu'il y a 400 millions d'années le jour était de 22 heures et qu'il y a avait ainsi 400 jours par an.

Égalité période sidérale et période de rotation (première loi de Cassini)

La période sidérale de la Lune est rigoureusement égale à sa période de rotation autour de la Terre : elle nous montre donc toujours la même face. Cela s'explique par le même phénomène que celui que nous venons de décrire. Les marées dues à la Terre subies par la Lune l'ont déformé et donc l'ont freiné jusqu'à cette synchronisation. Le fait que cette synchronisation soit déjà atteinte alors qu'on en est loin pour la Terre s'explique par la différence en ODG de l'action de la Terre sur la lune qui est bien plus importante que celle de la Lune sur la Terre.

3 Question

- **Tu peux redonner la distance Terre Lune ? Tu sais comment on la mesure aujourd'hui ?** Historiquement c'était avec les éclipses. Aujourd'hui on utilise un laser et des miroirs qu'on a placé dessus.
- **Calcul d'odg : compare la précision de la mesure laser avec ce qu'on obtient des forces de marée** Pour le laser, la limite c'est la mesure du temps de parcours. On peut être précis à la nanoseconde au moins. Pour l'autre méthode, on peut estimer une incertitude relative : on prendrait le rapport l'incertitude sur la hauteur des marées (le m) sur la distance Terre Lune. Pour le laser l'incertitude sur le temps de parcours du laser total par rapport à la mesure du temps.
- **Comment tu ferais en utilisant les éclipses ?** On peut estimer le cône et l'angle entre la Terre et la Lune. On regarde à quel moment on commence à voir l'ombre, et quand on arrête.
- **Tu donnes la période de rotation de la Lune : 29,5j Est-ce que ça correspond à ce que prédit la troisième loi de Kepler ?** On fait un calcul en odg avec la loi de Kepler : on trouve 10^7 s. Un jour c'est 86000s. On a un résultat cohérent.
- **Au début tu considères le système Terre Lune isolé. Plus tard tu considères le Soleil. A quel point cette hypothèse te semble justifiée ?** Je sais que si on rajoute le Soleil, ça change peu.
- **C'est quoi la différence entre référentiel de Copernic et Géocentrique ?** Y'en a un c'est le centre du Soleil, l'autre le centre de gravité du système Solaire.
- **Quand tu calcules les termes de marée, tu fais la compare deux termes au niveau du point P. Pour comparer tes termes tu places P où ?** Je le place à la surface de la Terre et je calcul le pls gros terme, donc je met P vers la Lune.
- **Sur tes images, il y a des hauteurs en m pour les marées. C'est par rapport à quoi ?** La référence c'est la plus basse marée possible. La définition est un peu complexe.
- **T'as dit qu'il y avait corrélation entre phase de la Lune et hauteur des marées. Sur le graphe c'est pas hyper clair.** C'est un peu décalé oui mais c'est un problème du au graphe.
- **Tu as tjrs négligé la rotation de la Terre dans ton étude. Est-ce que ça joue un rôle ?** oui, en fait c'est pas négligeable dans une étude plus approfondie. Déjà il faut le prendre en compte pour la formation des bourrelets océanique, et ça va également induire un aplatissement de la Terre qui peut laisser penser que la hauteur d'eau va être plus importante à l'équateur.
- **T'as d'autres idées de phénomènes abordables pour cette leçon ?** On peut parler des éclipses. Et aussi les points de Lagrange.
- **C'est quoi la difficulté de la leçon pour toi pour l'élève ?** C'est la particule fictive qui est un peu dure à comprendre et à étudier. Aussi le dernier raisonnement avec l'éloignement de la Lune.

4 Remarques

- Faire les schémas plus tôt, éventuellement en mettre sur diapo ou faire attention à ne pas oublier un élément. (cf schéma pour les marées où il manquait la position de la lune au début)
- T'es allée un peu vite sur la résolution de la particule fictive. C'était bien fait mais ça peut être un peu dur à suivre.
- Le traitement de la formule de l'ellipse était un peu rapide aussi.
- Le dernier calcul, pas la peine de le détailler : tu as montré avant que tu savais calculer.
- Bonne gestion du temps, la partie 2 commence à 19min.