

LP Mouillage

24 mai 2022

Niveau :L3

Commentaires

Prérequis

- Tension de surface
- Ecoulement de Poiseuille
- Loi de Laplace

Expériences



Bibliographie

- ✦ *Hydrodynamique physique, 3e édition, Guyon, Hulin, Petit*¹ → Tous les développements simples en statique et en dynamique du mouillage.
- ✦ *Gouttes, bulles, perles et ondes, de Gennes, Brochard-Wyart, Quéré*² → Démonstration de la goutte aplatie.
- ✦ *Thermodynamique, Diu, Guthmann, Lederer, Roulet*³ → Pour une approche thermodynamique plus rigoureuse et plus poussée.

Table des matières

1	Statique du mouillage	2
1.1	Paramètre de mouillage	2
1.2	Angle de Mouillage	2
2	Compétition avec la gravité	3
2.1	Nombre de Bond	3
2.2	Épaisseur d'une goutte lourde	4
2.3	Loi de Jurin	5
3	Dynamique du mouillage	7
3.1	Goutte peu étalée	7
3.2	Goutte très étalée	7
3.3	Résultats expérimentaux	8

Introduction

Suppose déjà faite une leçon sur la tension de surface (loi de Laplace, énergie de tension de surface). Les élèves connaissent déjà des bases de mécaflu.

La tension de surface domine à de petites échelles, au niveau de l'interface entre différentes phases, liquide gaz, liquide liquide par exemple.

On va alors parler dans cette leçon d'interfaces liquide - solide.

1 Statique du mouillage

1.1 Paramètre de mouillage

On cherche à quantifier la stabilité d'un système à trois phases {gaz+liquide+solide} par rapport à celui à deux phases {gaz+solide}. Pour ce faire, on compare les énergies de surface correspondantes $\mathcal{E}_{GLS} = (\gamma_{SL} + \gamma)S$ et $\mathcal{E}_{SG} = \gamma_{SG}S$.

γ_{SG} d'une part et $\gamma_{SL} + \gamma$ d'autre part jouent des rôles analogues. On cherche à les ordonner pour savoir quelle situation est la plus stable.

Définition : Paramètre de mouillage \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma \quad (1)$$

Si $\mathcal{S} > 0$, la phase liquide recouvre toute la phase solide. On parle de mouillage total. Si $\mathcal{S} < 0$, la phase liquide recouvre le moins possible la phase solide. Elle ne peut pas disparaître complètement mais elle se concentre au maximum. Etudions ce cas.

1.2 Angle de Mouillage

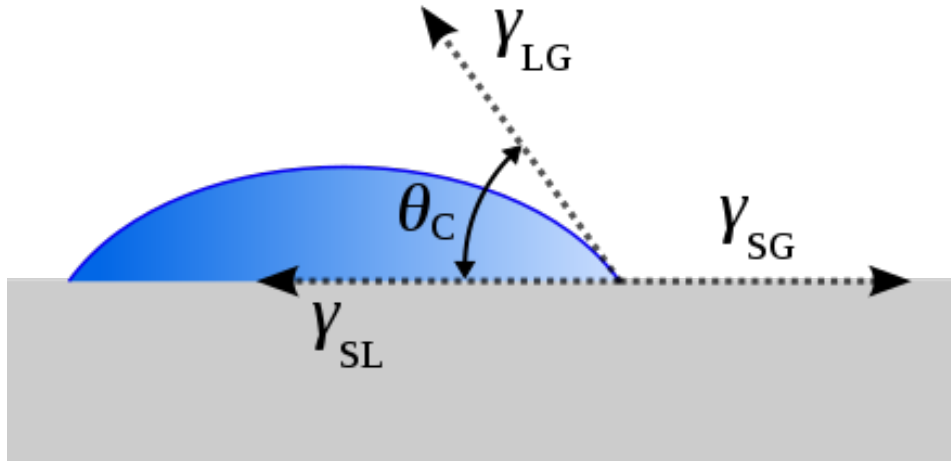


FIGURE 1 – Angle de Mouillage visible sur la ligne triple de profil, avec les forces linéiques (tensions de surfaces) orientées. *Source : Wikipedia*

Pour simplifier cette étude, on suppose que la goutte est symétrique par rotation autour de l'axe vertical.

On considère le système représenté à la figure 2. On prévoit de faire tendre dx et dz vers 0. Les forces s'appliquant sur ce système sont le poids, vertical, les forces de tension de surface, proportionnelles à dy , les forces de pression, normales aux surfaces et proportionnelles à $dx dy$, $dx dz$ ou $dy dz$, et les contraintes internes au solide, symétriques horizontalement et de composante non nulle selon la verticale. On applique le PFD à ce système (qui est fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen)

$$m \vec{r} = \vec{p} + \sum \vec{f}_\gamma + \sum \vec{f}_P + \vec{f}_{\text{Young}} = \vec{0}. \quad (2)$$

La projection selon \vec{e}_x permet de supprimer le poids, la résultante des contraintes internes et les forces de pression selon \vec{e}_y et \vec{e}_z . En faisant tendre dx et dz vers 0, on annule la contribution des forces de pression. On ne garde que

$$-\gamma_{SG} + \gamma_{SL} + \gamma \cos \theta = 0 \quad (3)$$

Ceci donne une expression de l'angle de mouillage en fonction de la nature des phases en présence :

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma} \quad (4)$$

Comme $\cos \theta$ est borné entre -1 et 1, on retrouve la situation de mouillage intégral si $\mathcal{S} > 0$, qui correspond à $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma} > 1$.

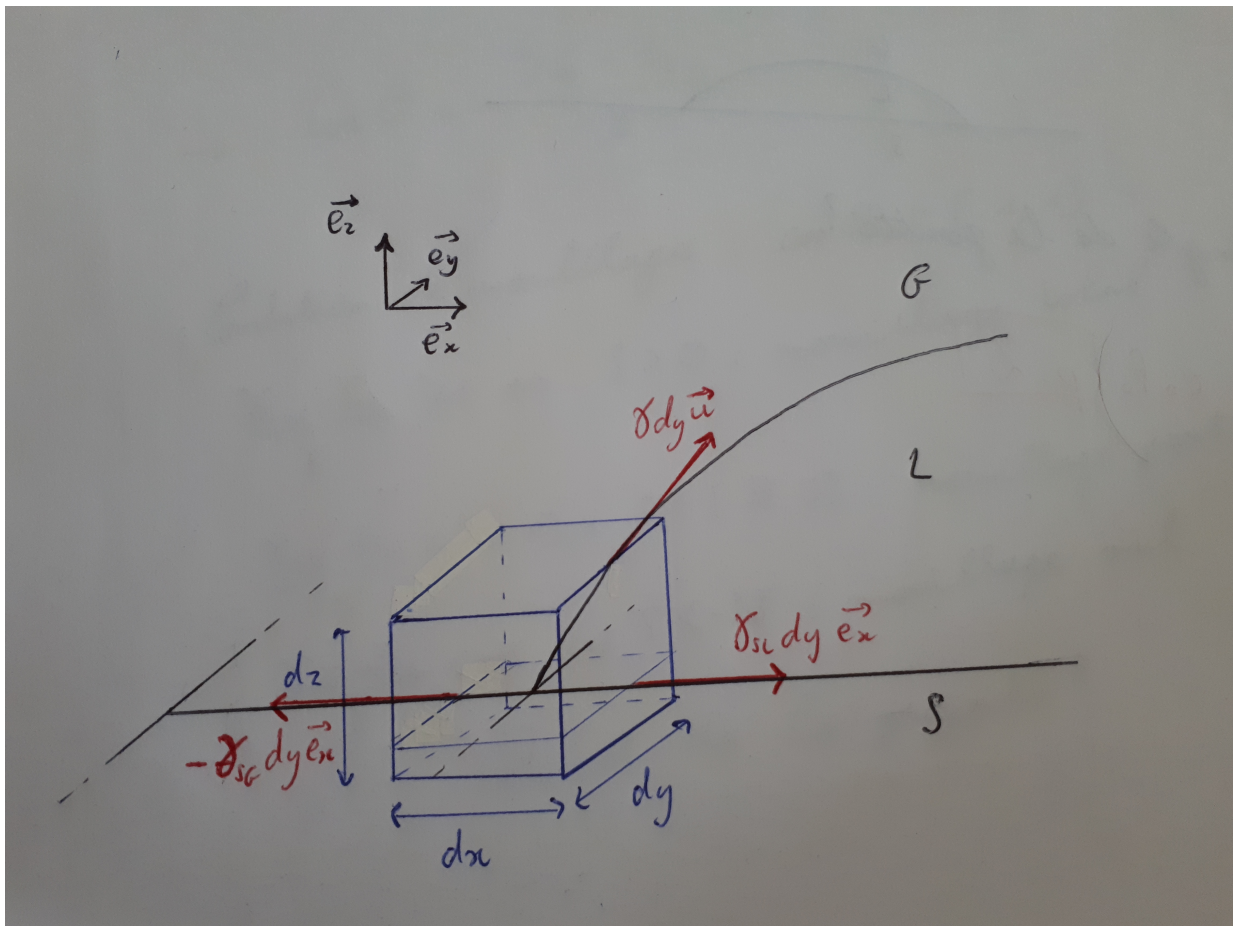


FIGURE 2 – Système considéré pour la détermination de l'angle de mouillage. Le vecteur \vec{u} se décompose sur la base donnée comme $\vec{u} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ avec θ l'angle entre l'horizontale et \vec{u} .

L'autre condition extrême est le mouillage nul, pour $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma} < -1$, soit $S < -2\gamma$.

Transition

On arrive à une limite du modèle : si la goutte touche le solide en un unique point, il faudrait une pression infinie pour compenser le poids de la goutte. Sur le Hg, liquide peu mouillant, on voit bien que les gouttes ne sont plus sphériques au bout d'une taille donnée. Ajoutons le poids à la modélisation

2 Compétition avec la gravité

2.1 Nombre de Bond

On cherche à comparer les effets de la gravité à ceux de la tension de surface. On peut les comparer en terme de pression. La surpression due au poids est, en ordre de grandeur, celle de la surpression hydrostatique. Celle due à la tension de surface de part et d'autre d'une interface est donnée par la loi de Laplace :

$$P_{\text{poids}} = \rho g h \quad ; \quad P_{\gamma} = \frac{2\gamma}{R} \quad (5)$$

Définition : Nombre de Bond

$$Bo = \frac{P_{\text{poids}}}{P_{\gamma}} = \frac{\rho g h}{2\gamma/R} \sim \frac{\rho g l^2}{\gamma} \quad (6)$$

En considérant que h et R sont du même ordre de grandeur correspondant à la taille caractéristique du problème l et en négligeant le facteur $\frac{1}{2}$. On peut ainsi définir une taille pour laquelle les effets de gravitation et de tension de surface sont comparables.

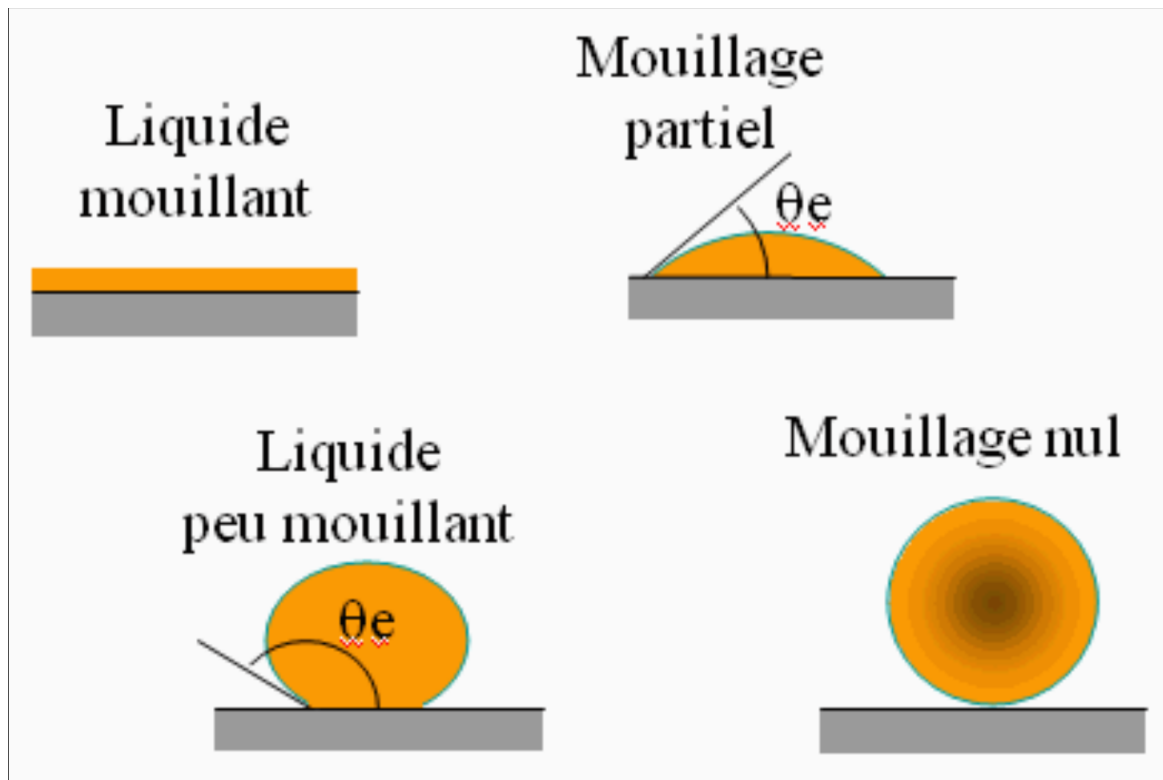


FIGURE 3 – Mouillages pour différents angles, Source : WordPPress

Définition : Longueur capillaire

l_c tel que $Bo = 1$ soit

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (7)$$

Transition

Utilisons ces outils dans des cas plus concrets.

2.2 Épaisseur d'une goutte lourde

A partir d'une certaine taille, les gouttes s'éloignent d'une forme arrondie et s'aplatissent sous l'effet de leur propre poids. A l'inverse de la partie précédente, dans laquelle nous avons négligé le poids, nous pouvons ici considérer le cas

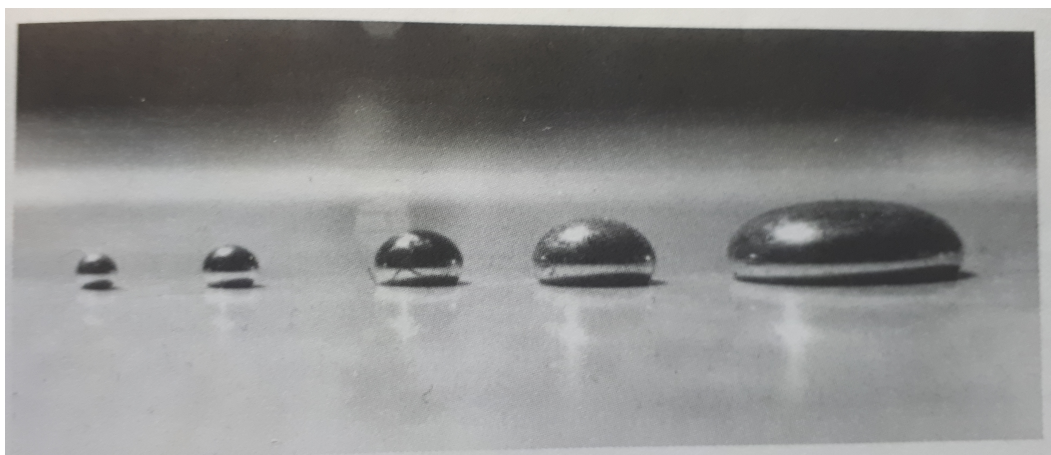


FIGURE 4 – Gouttes de mercure aplaties par leur poids. Source : Hydrodynamique physique, Guyon Hulin Petit.

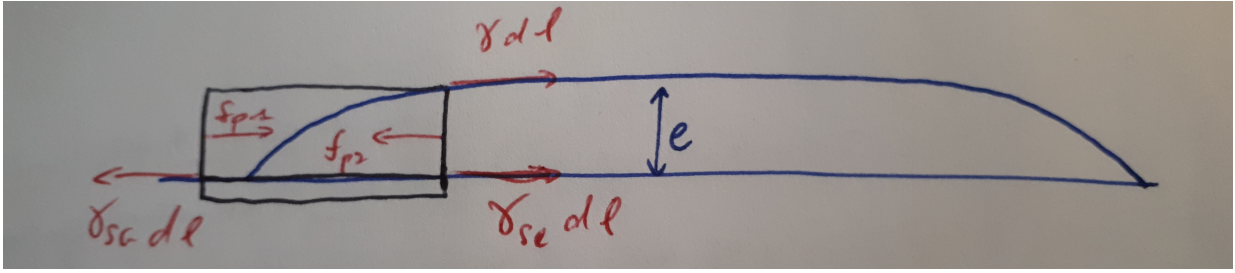


FIGURE 5 – Schéma de la goutte aplatie et système considéré

où le poids est prédominant et déterminer la hauteur limite de la goutte.

On considère le système encadré sur la figure 5. Qui est cette fois macroscopique et qui encadre toute la zone courbée de la goutte jusqu'à la zone où elle est d'épaisseur constante e . Le système est de profondeur dl . On ne s'intéresse qu'au bilan des forces extérieures selon \vec{e}_x . Sur ce système, la force de tension de surface entre le liquide et le gaz est purement horizontale puisque l'interface au niveau de la bordure du système est horizontale. De plus, les forces de pression ne sont plus négligeables sur ce système puisque les surfaces ne sont pas amenées à tendre vers 0.

Puisque l'interface considérée au sommet de la goutte est plane, il n'y a pas de différence de pression due à la loi de Laplace. La différence de pression entre les faces gauche et droite n'est due qu'à la surpression hydrostatique dans la goutte :

$$f_{p2} - f_{p1} = \int_0^e \rho g z dz dl = \rho g \frac{e^2}{2} dl \quad (8)$$

On écrit le PFD appliqué au système et projeté selon \vec{e}_x .

$$0 = -\gamma_{SG} dl + \gamma_{SL} dl + \gamma dl - \frac{\rho g e^2}{2} dl \quad (9)$$

$$e = \sqrt{\frac{2}{\rho g} (\gamma + \gamma_{SL} - \gamma_{SG})} = \sqrt{2l_c^2 \left(1 - \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma}\right)} = 2l_g \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \quad (10)$$

L'expression de e fait apparaître la longueur capillaire, donc la compétition entre phénomènes de tension superficielle (liquide-gaz) et gravité. On a aussi une dépendance en tensions superficielles (entre les 3 phases) dans l'angle de mouillage θ .

2.3 Loi de Jurin

Un autre domaine dans lequel on constate une compétition entre mouillage et poids est l'ascension capillaire. On remarque que de l'eau a un niveau plus haut dans un tube de verre que sur la surface libre en contact. Cette différence est d'autant plus prononcée que le tube est fin (c.f. figure 6). Ce phénomène a des répercussions comme les phénomènes d'infiltration de l'eau dans les murs après une inondation. Mettons ce problème en équation.

On considère le dispositif présenté sur la figure 7. On cherche à exprimer la pression au point A . D'une part, la loi de Laplace permet de l'exprimer en fonction de la pression en B en considérant l'interface sphérique :

$$P_A = P_B - \frac{2\gamma}{R}, \quad (11)$$

où R est le rayon de courbure de l'interface. On le relie au rayon r du tube et à l'angle de mouillage θ par $\frac{r}{R} = \cos \theta$, d'où

$$P_A = P_B - \frac{2\gamma \cos \theta}{r}. \quad (12)$$

D'autre part, la pression hydrostatique permet de déterminer

$$P_A = P_D - \rho g h. \quad (13)$$

De plus, $P_D = P_C$ d'après la loi de Laplace au niveau de l'interface plane et $P_C \simeq P_B$ d'après l'expression de la pression hydrostatique dans l'air, de masse volumique négligeable. En égalisant l'expression des deux surpressions,

$$\frac{2\gamma \cos \theta}{r} = \rho g h \rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = 2 \frac{l_c^2}{r} \cos \theta. \quad (14)$$

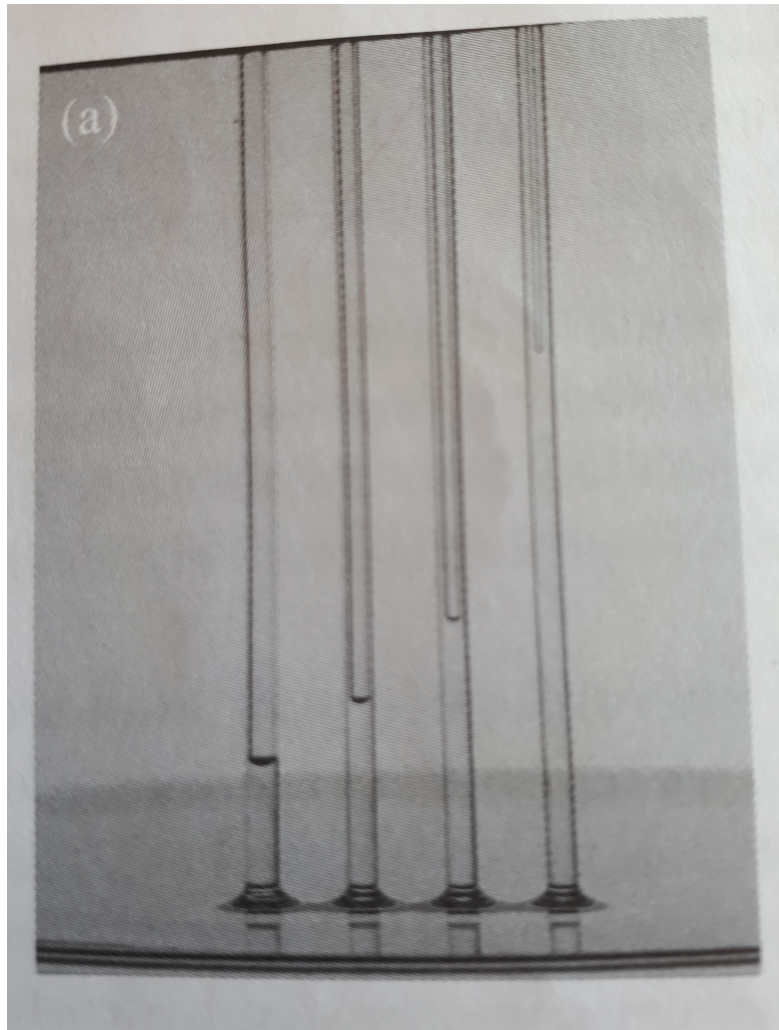


FIGURE 6 – Loi de Jurin illustrée. Source : Hydrodynamique physique, Guyon Hulin Petit.

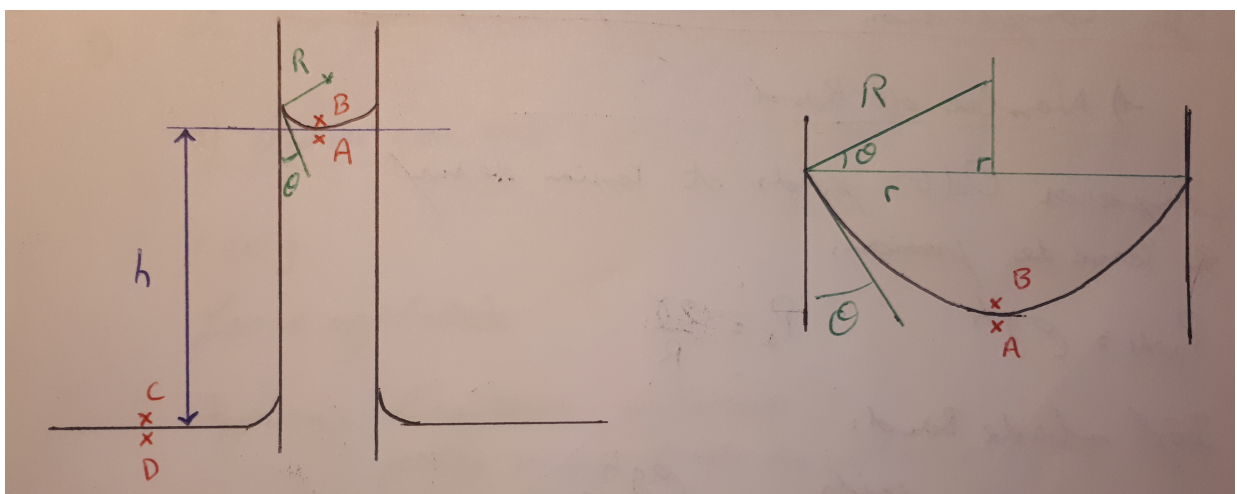


FIGURE 7 – Mise en équation de l'ascension capillaire.

Ce résultat est connu sous le nom de "loi de Jurin". On retrouve la longueur capillaire dans l'expression de la hauteur d'eau, signe de la compétition entre poids et tension de surface. On retrouve aussi la décroissance de la hauteur quand on augmente le rayon r .

Transition

On a vu jusque là des propriétés du mouillage à l'équilibre. Le mouillage concerne aussi la durée hors équilibre pendant laquelle la phase liquide prend sa forme d'équilibre.

3 Dynamique du mouillage

On présente ici une approche qualitative de l'étalement d'une goutte de liquide totalement mouillant sur une surface donnée en fonction du temps. Deux régimes limites sont considérés en fonction de la taille de la goutte. Les calculs exhaustifs sont exposés dans *Hydrodynamique physique 3^e édition*, **Guyon Hulin Petit** aux pages 399 à 403.

Pour modéliser l'étalement d'une goutte, on peut se placer dans deux cas limite.

3.1 Goutte peu étalée

Quand la goutte est peu étalée, la tension de surface lui fait garder une forme en portion de sphère. On peut faire une approche énergétique de l'écoulement en considérant que l'énergie cinétique du liquide résulte de l'énergie potentielle de pesanteur gagnée par affaissement de la goutte, de l'énergie superficielle gagnée en échangeant l'interface solide-gaz par deux interfaces solide-liquide et liquide-gaz. A cette énergie, il faut retirer l'énergie perdue sous forme d'effets visqueux. Les modèles numériques de l'écoulement au sein de la goutte permettent de déterminer une expression du rayon r_g de la goutte (au niveau de l'interface avec le solide) en fonction du temps :

$$r_g(t) \propto \left(\frac{\gamma \Omega^3 t}{\eta} \right)^{1/10}, \quad (15)$$

où on note η la viscosité et Ω le volume total de la goutte.

Qualitativement, on constate que l'étalement est d'autant plus rapide que

- la tension de surface est grande,
- la viscosité est faible,
- le volume de la goutte est grand.

On constate aussi que ce régime est caractérisé par une croissance de la goutte en $t^{1/10}$ et qu'il ne dépend pas du poids du fluide.

3.2 Goutte très étalée

Pour des gouttes plus étalées, la courbure de la surface devient faible (rayon de courbure grand), ce qui rend négligeables les effets de la surpression de Laplace devant les effets de gravité. La goutte est alors mieux modélisée par un disque de hauteur uniforme (excepté aux bords) et qui s'aplatit uniformément. L'écoulement dans la goutte est supposé horizontal (i.e. radial) et on détermine analytiquement l'expression du rayon de la goutte en fonction du temps à partir d'un bilan énergétique. On trouve :

$$r_g(t) = \left(\frac{\Omega}{\pi} \right)^{3/8} \left(\frac{16 \rho g t}{3 \eta} \right)^{1/8}. \quad (16)$$

Qualitativement, l'écoulement est d'autant plus rapide que

- le poids de la goutte est grand,
- la viscosité est faible,
- le volume de la goutte est grand.

Dans ce régime, le poids domine l'étalement et la tension de surface n'intervient plus dans l'étalement. Ce régime est caractérisé par une croissance de la goutte en $t^{1/8}$.

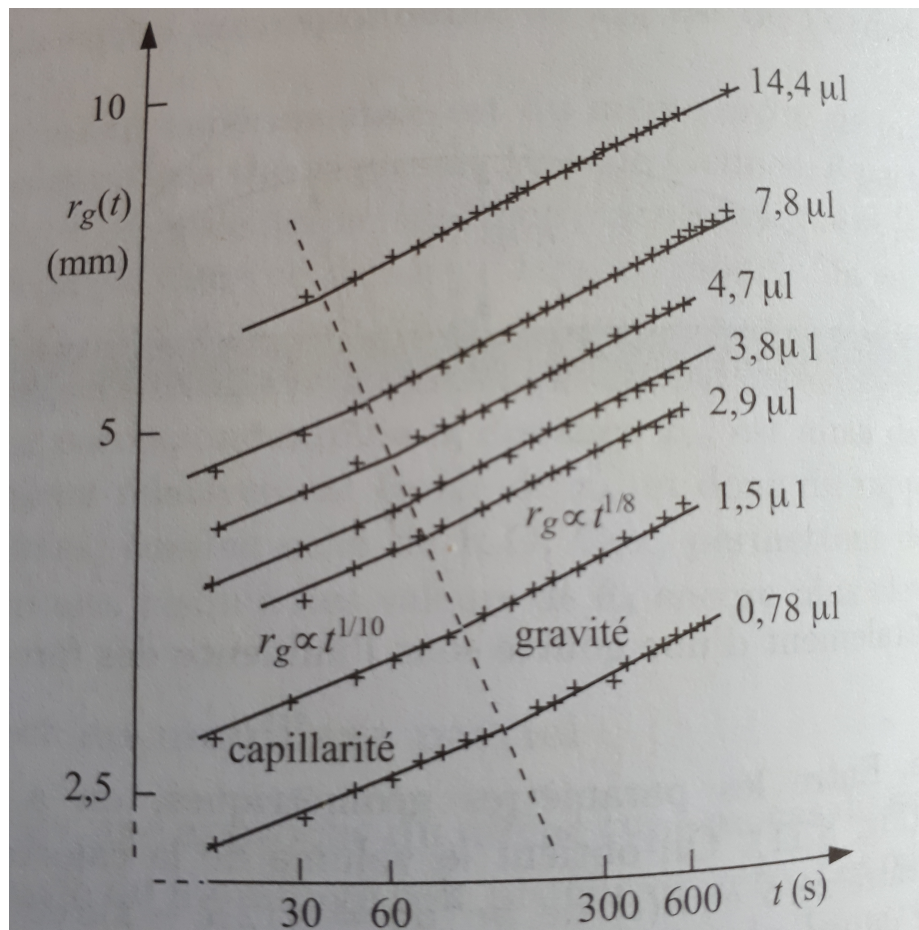


FIGURE 8 – Croissance du rayon d'une goutte d'huile silicone totalement mouillante en fonction du temps. Source : Hydrodynamique physique, Guyon Hulin Petit.

3.3 Résultats expérimentaux

Cette expérience a été réalisée avec de l'huile silicone de viscosité $\eta = 210^{-2}$ Pa et de tension de surface $\gamma = 20 \text{ mN m}^{-1}$ pour différents volumes de goutte. Les valeurs de rayon en fonction du temps sont tracés en échelle log-log en figure 8.

On constate que les gouttes s'étalent en suivant successivement les dynamiques de goutte peu étalée puis de goutte très étalée. On constate par ailleurs que, plus une goutte a un grand volume et plus elle passe vite dans le régime très étalé. Ce résultat se comprend qualitativement : le poids d'une goutte est proportionnel à son volume Ω alors que sa surface est proportionnelle à sa surface $S \propto \Omega^{2/3}$. Plus le volume d'une goutte augmente et plus les effets du poids augmentent par rapport aux effets de tension de surface. On peut aussi voir que, quand le volume d'une goutte augmente, sa taille caractéristique augmente. Ainsi, son nombre de Bond augmente, ce qui revient à dire que le poids prend une plus grande importance par rapport à la tension de surface.

Compléments

Questions

- **Reprendre le dernier graphique (aplatissement d'une goutte en fonction du temps quand mouillage total)** On considère plusieurs façons pour la vitesse d'élargissement d'une goutte pour un mouillage total, donc on suppose que pour capillarité dominante on a une sphère qui prend un rayon de courbure de plus en plus grand. (gauche du graphe, aplatissement rapide et extension lente)

Dans l'autre cas, augmentation du rayon de la courbe de façon différente, augmentation du rayon selon autre coefficient, donc on a des brisures de droites en log log.

Plus la goutte est grosse plus elle s'aplatit vite au centre avec aplatissement uniforme (la droite en pointillés sépare les deux régimes et elle est décroissante en (t)).

- **Pourquoi c'est une droite qui sépare les deux régimes ?** En échelle log-log, cela correspond à une loi de

puissance. La délimitation entre les deux régimes se fait quand les effets de gravitation prennent le pas sur les effets capillaires. Puisque les rayons sont fonction de $\Omega^3 t$, cette intersection arrive pour une même valeur de $\Omega^3 t$, ce qui se traduit par $t \propto \Omega^{-3}$, soit $\log \Omega = -\frac{1}{3} \log t + K$. On a bien l'équation d'une droite.

- **C'est quoi les conditions initiales pour ce graphe ?** Conditions a priori non maîtrisées (dépôt de la goutte sur le solide). Mais ça n'impacte pas la tendance.
- **Si on prolonge les points de la courbe du domaine de capillarité, on arrive aux conditions initiales.**
- **Quel liquide utilisé ?** Huile silicone sur surface totalement mouillante.
- **Il semble sur le graphe que la vitesse d'étalement augmente. Comment justifier à un étudiant que la vitesse augmente alors qu'il y a dissipation énergétique ?** On est pas en mécanique du point. La vitesse est celle de la ligne triple, qui ne correspond pas à la vitesse d'une particule donnée. On a roulement de l'eau, les particules tombent sur le bord, font avancer la ligne triple, se collent sur le bord et d'autres venant de la goutte avancent. On a au total perte d'énergie, juste gain par chute d'une partie de la goutte. Le TEC sur la goutte complète est bien diminuant. La portion du fluide qui avance diminue en volume.
- **Comportements asymptotique pour les gouttes ?** Taille critique à partir de laquelle l'énergie des interactions de Van der Waals compensent le poids et donc elle arrête de s'étaler.
- **Modification des courbes pour un liquide plus visqueux ?** Pentas diminuent, car écoulement plus lent. Et on passe plus vite de capillarité à gravité dominante.
- **Liquide plus dense ?** La partie droite de la courbe est moins pentue. Le second régime arrive plus tard.
- **Diminution tension de surface ? (avec un surfactant)** La partie gauche de la courbe est moins pentue. Le premier régime finit plus tôt.
- **C'est quoi un surfactant ?** Molécule amphiphile, parties polaire et apolaire, se place sur la surface d'un liquide et rend stable la surface (diminution de l'énergie de surface).
- **Interprétation microscopique surfactant ?** Sur l'eau, tête polaire orientée vers les molécules d'eau et queue apolaire orientée vers l'extérieur. Ça rend plus simple le contact phase aqueuse - air ou phase organique.
- **Pourquoi avoir fait différents bilans dans la leçon et pas seulement des bilans d'énergie ?** Bien pour les élèves de varier, montrer qu'il y a plusieurs approches à un même domaine, et puis plus simple de faire certains calculs avec des forces ou avec des énergies.
- **Pourquoi le système est différent entre étalement des gouttes et loi de Young Dupré ?** Pour l'angle de contact, on a veut uniquement une loi locale dans la zone de la ligne triple. Pour l'épaisseur, on cherche une propriété globale de la goutte : on doit prendre un système étendu qui englobe à la fois la zone avec ligne triple et la zone avec épaisseur constante. C'est sur cette échelle que la différence de pression se fait ressentir.
- **Application numérique longueur critique de Bond ?** Pour l'eau en CNTP, c'est 3 millimètres. On est à 2mm pour le mercure dans les mêmes conditions.
- **Tension de surface eau - air ?** entre 68 et 72 N m⁻¹
- **Longueur capillaire et tension capillaire du Hg ?** 1.9mm et 487mN/m
- **Construction de la leçon ? D'autres refs / mesures en direct ?** : Montrer des manips, Expérience de la balance d'arrachement, ascension capillaire, forme de la goutte pendante. permet de faire une mesure de tension de la tension de la face. Retrouver la masse d'une goutte.
- **Autre expérience :** eau dans une cuve en forme de coin. On voit l'eau monter de plus en plus au niveau de l'intérieur du coin.

Commentaires

- Très intéressant, on adhère facilement
- Liens logiques assez évidents et bien faits.
- Points de progrès : dynamisme
- Sur une leçon comme celle ci, on veut voir des **expériences**. On peut en proposer plusieurs. Et des **OdG!!**

- Dans les annales il y a des leçons sur la capillarité, et dans les rapports : **s'appuyer sur une thermodynamique rigoureuse et appuyer sur les origines microscopiques du phénomène.**
- On aurait pu donc parler de rugosité pour l'approche microscopique du phénomène.
- Pas convaincu par : La façon de justifier la non contribution des forces pressantes pour la goutte en mouillage partiel, trouver un meilleur argument ? **et** Réponse à la question sur l'énergie de surface à minimiser et forme d'une goutte sphérique dans l'air.