LPS 14 : Ondes acoustiques.

Alexandre Pricoupenko

Niveau : L2

Prérequis : Ondes progressives/stationnaires. Cable coaxial. Impédance. Thermodynamique.

Expérience quantitative : Mesure de la célérité du son dans l'air.

Table des matières

Introduction

Le son ne se propage pas dans le vide.
→ Les ondes acoustiques ont besoin d'un milieu matériel pour se propager.

Les caractéristiques de ces ondes (célérité etc ..) dépendent fortement du milieu dans lequel elles se propagent (air, eau, acier etc ...) [1].

Aujourd'hui, on s'intéressera plutot aux ondes acoustiques dans les fluides (ex du cas de l'air qui est le plus récurrent) et on laisse le cas des solides pour plus tard.

Une image pour comprendre comment l'onde sonore se met en place, c'est celle du haut parleur où on voit la membrane bouger : le fluide étant compressible, cela va provoquer des perturbations de pression de la couche d'air à son voisinage. Prenons une compression : l'inégalité de pression provoque alors le déplacement de la tranche d'air voisine qui est alors comprimée à son tour.

Video / image haut parleur ?

→ Les perturbations de pression se propagent ainsi de proche en proche dans le milieu à une célérité c. On va donc également avoir des perturbations en vitesse et en densité dans le fluide. On a des ondes mécaniques, longitudinales.

1. Par exemple, on connait tous cette image des Indiens qui écoutaient aux rails pour être au courant de l'arrivée des trains. Célérité plus rapide. moins d'atténuation du signal (?) et ne dépend pas du vent ! ATTENTION etre au taquet sur la notion de guide d'onde du coup qui fait la différence fonda avec l'air en 3D ici.). Ils utilisaient ça aussi avec le sol pour connaitre l'arrivée des troupeaux de bisons.

I Equation de propagation

I.1 Approximation acoustique

Décrire les ondes acoustiques, c'est donc décrire la propagation d'ondes de pression. On suppose que le fluide est initialement au repos dans le réf du labo supposé galiléen (le champ de vitesse est pris uniformément nul), de masse volumique uniforme $\rho = \rho_0$ et de pression $p = p_0$.

→ En présence d'une perturbation [2], les champs de pression, masse volumique et vitesse sont modifiées.

Hypothèses :

→ On se place dans la suite dans le cadre d'une approximation linéaire appelée approximation acoustique, où on considérera que les perturbations sont de faibles amplitudes et où les calculs seront limités à l'ordre 1. On note :

$$\begin{aligned} P(M,t) &= P_0(M) + P_1(M,t) \qquad & |P_1| \ll P_0 \\ \rho(M,t) &= \rho_0 + \rho_1(M,t) \qquad & |\rho_1| \ll \rho_0 \\ \mathbf{v}(M,t) &= \mathbf{0} + \mathbf{v}_1(M,t) \qquad & |\mathbf{v}_1| \ll c \end{aligned} \tag{1}$$

→ On suppose le fluide parfait (pas de viscosité) et on néglige les transferts thermiques (tous les phènomènes diffusifs sont ainsi négligés) : l'écoulement est alors adiabatique et réversible, i.e. isentropique [3].

On a donc 5 inconnues, il nous faut donc 5 équations pour résoudre le sytème.

Evolution isentropique

$$\rho \approx \rho_0 + (P - P_0)\frac{\partial \rho}{\partial P}|_S \tag{2}$$

On introduit donc le coefficient de compressibilité isentropique χ_S

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}|_S = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}|_S \tag{3}$$

Donc au 1er ordre

$$\rho_1 = P_1 \rho_0 \chi_S \tag{4}$$

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{5}$$

Au 1er ordre on obtient (cf $\rho_1 \ll \rho_0$ et $v \ll c$) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 div(\mathbf{v}_1) = 0 \tag{6}$$

Equation du mouvement : Equation d'Euler

$$(\rho_0 + \rho_1)\Big(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1.\mathbf{grad})\mathbf{v}_1\Big) = -\mathbf{grad}(P_0 + P_1) + (\rho_0 + \rho_1)\mathbf{g} \tag{7}$$

2. Fluide reste en eq. thermodyn. local.
3. Les ondes sonores ont en général un faible amortissement au sein du fluide où elle se propage (cf expériences) : on va donc négliger les phénomènes dissipatifs (conduction thermique + viscosité). On peut montrer que la conditionn d'adiabaticité est que $\lambda \gg l$, où l est le libre parcours moyen (Voir Hprepa Ondes)

Au 1er ordre on obtient (cf $\rho_1 \ll \rho_0$ et $v \ll c$ + terme pesanteur $f \gg g/c$ [4]) :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\mathbf{grad} P_1 \tag{9}$$

<u>Retour sur l'hypothèse d'adiabaticité</u> :
$\tau_{diff} \sim \dfrac{\lambda^2}{D_{th}} \gg T$, on trouve $f \ll \dfrac{c^2}{D_{th}}$. ODG pour l'air $f \ll 6.10^9 Hz$

I.2 Equation de d'Alembert

Avoir au préalable encadrer les 3 équations Eq.4, 6, 9. On élimine la variable ρ_1 (substitution de Eq.4 dans Eq.6) pour obtenir un système d'éq. couplé sur $(P_1, \mathbf{v}_1)$:

$$\begin{aligned} \partial_t P_1 &= -\frac{1}{\chi_S} div(\mathbf{v}_1) \\ \partial_t \mathbf{v}_1 &= -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} P_1 \end{aligned} \tag{10}$$

On prend par ex la divergence de l'Eq. d'Euler :

$$\rho_0 div(\partial_t \mathbf{v}_1) = -\Delta P_1 \tag{11}$$

On développe avec Cauchy Schwartz etc ..., et on obtient :

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c^2} \partial_{t,t} P_1 = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \tag{12}$$

On retrouve une Eq de d'Alembert [5] pour la supression, typique des phénomènes ondulatoires qu'on a étudiés précédemment. On montre également que la vitesse suit une équation de d'Alembert avec la même célérité.

SI TIME (ou a l'oral) En effet, on sait que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{v}_1) = \mathbf{grad}(div \mathbf{v}_1) - \vec{\Delta} \mathbf{v}_1 \tag{13}$$

On peut montrer que $\mathbf{rot}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, i.e. l'écoulement est irrotationnel, et on en déduit facilement l'Eq de d'Alembert correspondante.

Comment ? En prenant l'Eq d'Euler on montre que le rotationnel est seulement fonction de l'espace. Si on suppose les paramètres $(P_1, \rho_1, \mathbf{v}_1)$ de valeur moyenne nulle dans le temps on retrouve le résultat car $\mathbf{rot}\mathbf{v}_1 = <\mathbf{rot}\mathbf{v}_1> = \mathbf{rot} < \mathbf{v}_1 >$. [6]

<u>Ordre de grandeurs de la célérité</u>

Pour un gaz parfait, l'évolution étant isentropique on a :

$$PV^\gamma = cste \text{ donc } \chi_S = \frac{1}{\gamma P} \to c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} \tag{14}$$

On utilise la loi des gaz parfaits :

4. Il faut en fait l'expression de c pour montrer cela (et on suppose également $\mathbf{g}$ uniforme) :

$$\frac{|-\mathbf{grad} P_1|}{|\rho_1 g|} \sim \frac{P_1}{\lambda \rho_1 g} \sim \frac{1}{\lambda \rho_0 \chi_S g} \sim \frac{cf}{g} \gg 1 \quad \textit{i.e.} \text{ ODG pour l'air } \; f \gg g/c \approx 3.10^{-2} Hz \tag{8}$$

5. Comme on l'a vu, l'équation de d'Alembert étant une équation linéaire, le théorème de superposition et la décomposition en série de Fourier peuvent être utilisées afin d'étudier seulement des solution harmoniques.
6. Ou dire plus simplement et mieux peut etre (?) qu'on ne s'intéresse qu'aux phénomènes variants dans le temps.

$$P = \frac{\rho RT}{M} \text{ donc } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{15}$$

ODG : Pour l'air $\gamma = 7/5$ [7] A $\theta = 20C$ $c \approx 343m/s$

On explique alors, en appliquant les lois de Descartes de la réfraction, pourquoi on a l'impression de ne plus rien entendre quand on s'allonge sur la plage en été (analogie mirage optique et mirage sonore)

Liquide ? Densité plus grande $\rho_0^l \sim 10^3 \rho_0^g$ mais compressibilité beaucoup plus faible $\chi_S^l \sim 10^{-5} \chi_S^g$

ODG : Dans l'eau a 0C, $c \approx 1500m/s$

$\rightarrow$ La vitesse est donc généralement plus importante dans les liquides que dans les gaz.

Pour les solides ? [8] ODG : Dans le fer : $c \approx 5130m/s$

En général on retiendra $c^g < c^l < c^s$

EXPERIENCE QUANTITATIVE : Mesure de la vitesse du son dans l'air. Jolidon p.517.

I.3 Solutions

Contrairement à ce qu'on a pu voir avec les exemples d'ondes précédents (corde vibrante, cable coaxial) l'onde sonore peut se propager dans les 3 directions de l'espace. Néanmoins on va quand même s'intéresser aux ondes planes (la *fonction d'onde* ne dépendant que d'une coordonée cartésienne d'espace, notée x ici), qui décrivent ce qu'il se passe pour des systèmes à 1 dimension et qui sont en fait une bonne approximation de ce qu'il se passe loin des sources en 3D.

$$\partial_{x,x} P_1 - \frac{1}{c^2} \partial_{t,t} P_1 = 0 \tag{16}$$

P_1 est solutionde d'Alembert 1D :

$$P_1(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{17}$$

où f est une Onde Plane Progressive (OPP) se propagant dans le sens des x croissants et g dans le sens des x décroissants. On en déduit donc la vitesse $\mathbf{v}_1$ avec l'Eq. d'Euler :

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}_1 = -f'(x - ct) + g'(x + ct) \tag{18}$$

Par intégration [9]

$$\mathbf{v}_1(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} f(x - ct)\mathbf{e}_x - \frac{1}{\rho_0 c} g(x + ct)\mathbf{e}_x \tag{19}$$

$\rightarrow$ $\mathbf{v}_1$ est parallèle à $\mathbf{e}_x$: L'onde est longitudinale.

<u>Impédance acoustique</u>
Comme dans les leçons précédentes, on va définir une impédance, ici :

$$Z = \frac{p}{v} \qquad \text{Unité : } M.L^{-2}.T^{-1} \tag{20}$$

Pour une onde plane progressive se propageant :

7. (Cf Physique Statistique pour gaz diatomique sinon gaz monoatomique $\gamma = 5/3$)
8. Savoir que dans le *cas continu* de la chaine d'atomes $c_s = \sqrt{E/\rho}$ où E est le module de Young.
9. Terme constant nul car on considère vibrations, i.e. variations temporelle moyenne nulle de $\mathbf{v}_1$? ou dire que lors de la propagation d'une onde sonore, il n'y a pas de propagation de matière ? ou qu'on ne s'intéresse qu'aux phénomènes variant dans le temps

- Selon les x croissants : $Z = \rho_0 c$
- Selon les x décroissants : $Z = -\rho_0 c$

II Aspects énergétiques

II.1 Bilan d'énergie

Pour gagner du temps : FAIRE ANALOGIE AVEC CABLE COAXIAL $u \longleftrightarrow p$ et $v \longleftrightarrow i$ cf equation + deplacement de charge $\sim$ deplacement de particule et tension $\sim$ surpression. Calculer directement $div(p\mathbf{v}_1)$.

$$div(P_1\mathbf{v}_1) = P_1 div(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_1.\mathbf{grad}(P_1) = -\chi_S P_1 \partial_t P_1 - \rho_0 \mathbf{v}_1 \partial_t \mathbf{v}_1 = -\partial_t(\underbrace{\frac{1}{2}\chi_S P_1^2 + \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2}_{e_v}) \tag{21}$$

$\rightarrow$ On fait ainsi apparaître une équation locale de conservation de l'énergie.

e_V représente la densité volumique d'énergie sonore qui contient :

- Un terme d'énergie cinétique volumique de l'écoulement : $e_c = \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2$

- Un terme d'énergie potentielle élastique associée à la compression/dilatation des particules de fluide : $e_p = \frac{1}{2}\chi_S P_1^2$

$\rightarrow$ Si on intégre sur le volume on trouve que :

La variation de l'énergie sonore dans le volume V = énergie fournie au niveau de la surface Σ.

$\rightarrow$ Pour une OPP qui se propage selon les x croissants, on peut montrer que $e_c = e_p$ et $\vec{\pi} = e_v c \mathbf{e}_x$ i.e. l'énergie se propage à la vitesse c dans la direction de l'onde.
ou
On cherche à trouver une équation qui traduit la conservation locale de l'énergie comme on a pu le voir dans les cours précédents [10]. On considère un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ.

On fait face à une onde de pression. Calculons donc la puissance des forces de pression qu'exerce le fluide intérieur sur les particules sortant de Σ.

$$d\mathbf{F} = P\mathbf{dS} \tag{22}$$

La puissance rayonnée $\mathcal{P}$ est donc :

$$\mathcal{P} = \oiint (P_0 + P_1)\mathbf{v}_1.\mathbf{dS} \tag{23}$$

Puisque par la suite on s'intéressera à des valeurs moyennes, on peut s'intéresser seulement au terme de l'intégrale contenant P_1, l'autre étant de valeur moyenne nulle.

$$\tilde{\mathcal{P}} = \oiint P_1\mathbf{v}_1.\mathbf{dS} = \iiint div(P_1\mathbf{v}_1)dV \tag{24}$$

Par analogie avec le vecteur de Poynting, on définit $\vec{\Pi} = P_1\mathbf{v}_1$ le vecteur densité de courant dénergie de l'onde sonore. (en W/m^2).

Réécrivons maintenant $div(\vec{\Pi})$:

10. On peut d'ailleurs utiliser l'analogie avec le cable coaxial : Vitesse $\Longleftrightarrow$ Intensité et Surpression $\Longleftrightarrow$ Tension

II.2 Intensité sonore

Dans la vie de tous les jours on entend souvent parler d'intensité sonore ou de niveau sonore pour définir la puissance d'un bruit, à quoi cela correspond-il ?

On définit l'intensité sonore de cette onde, notée I, comme la valeur moyenne de $|\vec{\Pi}|$:

$$I =< |\vec{\Pi}| >=< |P_1 v_1| > \tag{25}$$

Si le domaine des fréquences accessibles s'étend de 20 Hz à 20 kHz, la gamme des intensités sonores accessibles est elle très large. Les seuils d'audibilité et de douleur dépendent de la fréquence. Typiquement à 1,5 kHz, le seuil d'audition minium est $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$ et le seuil de douleur à $I_d = 1 W.m^{-2}$. Puisqu'on a 12 ordres de grandeurs, il est utile d'utiliser une échelle logarithmique. On définit le niveau sonore L en décibels par :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{26}$$

Le niveau sonore max est de 130 dB à 1,5 kHz mais attention le seuil auditif dépend de la fréquence. Rue animée 75 dB. Reglementation boite de nuits = 105 dB ... oups ! Protégez vos oreilles !

ODG : OPPH de L = 100 dB. Air. $< |\vec{\Pi}| >= 10^{-2} W.m^{-2}$

Or $< |\vec{\Pi}| >=< |P_1 v_1| >= \frac{1}{Z} < P_1^2 >= Z < v_1^2 >$ et $Z \approx 440 kg.m^{-2}.s^{-1}$

On en déduit :

$P_1 \approx 2Pa \ll P_0$ et $v_1 \approx 5.10^{-3} m.s^{-1} \ll c$

III Changement de milieux

III.1 OPP sur interface plane en incidence normale

Soit une interface séparant deux milieux que l'on note A et B de masse volumique et de célérité a priori différentes. On s'intéresse à une onde plane incidente provenant du milieu A se propageant dans le sens des x croissants. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise. Faire un schéma !

On a 2 équations à l'interface [11] :

- Continuité de la vitesse perpendiculaire à l'interface $\mathbf{v}_1^A.\mathbf{n} = \mathbf{v}_1^B.\mathbf{n}$

- Continuité de la pression (cf PFD au piston de masse $M \to 0$ et de section S dans ref gal du labo $Ma(t) = S[P_1^A(x_0, t) - P_1^B(x_0, t)]$)

On définit un coefficient de reflexion r_{AB} et transmission t_{AB} en amplitude :

$$r_{AB} = \frac{P_{1r}(x_0, t)}{P_{1i}(x_0, t)} = -\frac{v_{1r}(x_0, t)}{v_{1i}(x_0, t)} \qquad t_{AB} = \frac{P_{1t}(x_0, t)}{P_{1i}(x_0, t)} = \frac{Z_B}{Z_A} \frac{v_{1t}(x_0, t)}{v_{1i}(x_0, t)} \tag{27}$$

Les deux relations de continuité donnent :

$$r_{AB} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_A + Z_B} \qquad t_{AB} = \frac{2Z_B}{Z_A + Z_B} \tag{28}$$

On définit également les coeff de reflexion et transmission en énergie (même surface ici) :

$$R = \frac{|\vec{\Pi}_r|}{|\vec{\Pi}_i|} = |r|^2 = \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_A + Z_B}\right)^2 \qquad T = \frac{|\vec{\Pi}_t|}{|\vec{\Pi}_i|} = \frac{Z_A}{Z_B} |t|^2 = \frac{4 Z_A Z_B}{(Z_A + Z_B)^2} \tag{29}$$

11. Attention l'interface bouge ! Mais puisque $vT \ll cT$, alors on peut négliger cette variation.

- On retrouve la conservation de l'énergie R+T =1.

- Lorsque $Z_A = Z_B$ il n'y a pas de reflexion et la transmission est totale. On parle d'adaptation d'impédance. C'est par exemple la raison pour laquelle on met du gel lors d'une échographie.

- Si $Z_A \gg Z_B$ (ou l'inverse) alors $R \rightarrow 1$ et on a pas de transmission. C'est notamment le cas au niveau d'une interface eau-air. $Z_{eau}. \sim 1.5.10^6 kg.m^{-2}.s^{-1}$ Ainsi quelqu'un dans l'eau entendra très mal quelqu'un qui parle dans l'air. Ce principe est aussi mis à profit dans la conception du double vitrage via interface air-verre.

Conclusion

Encore beaucoup de choses intéressantes.
Réfraction et lois de Descartes. On expliquera alors pourquoi on a l'impression de ne plus rien entendre quand on s'allonge sur la plage en été (mirage sonore) ou Comment des baleines peuvent elles communiquer à des milliers de kilomètres (guidage d'onde) ?
Ondes sonores stationnaires. Tubes acoustiques. Instruments.
Interférences. Diffraction. Effet Doppler
Acoustique architecturale

Remarques

ex : metro parisien on peut parler de quai a quai ellipse cf reflexion, communication lacs
whispering gallery st paul.
Utile en géosciences
Utile pour la télémétrie

Description du problème général (si le temps) :
— Paramètres p, ρ, T, v (6 inconnues)
— Conservation de la masse (1 eq)
— Équation du mouvement(3 eqs)
— Équation d'état (1 eq)
— Bilan énergétique : transferts thermiques, etc. (1 eq)

$\rightarrow$ 6 inconnues et 6 équations donc on peut résoudre le système, mais il est complexe : on va faire des approximations !