I - 1) Mise en équation

[schéma] + [schéma bout de corde]

Hypothèses

→ on néglige la pesanteur

→ on néglige toute source de dissipation : pas d'amortissement.

→ M très grande : on peut négliger son accélération due au mvt de la corde devant $\vec{g}$, elle a une grande inertie : $\vec{T}(L) = M\vec{g}$

pas clair.

→ on considère une corde homogène, de masse linéique μ

→ faibles déformations : $|\alpha| \ll 1$
$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

→ corde inextensible : mouvement purement vertical

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1}\, dx$$
$$\simeq \sqrt{1+\alpha^2}\, dx$$
$$\simeq dx \quad \text{au } 1^{er} \text{ ordre en } \alpha.$$

(le déplacement d'un élément de corde est petit devant sa longueur).

• PFD selon $\vec{e_x}$:

$$\mu\, ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\vec{T}(x)\cdot\vec{e_x} + \vec{T}(x+dx)\cdot\vec{e_x}$$

$$0 = -T(x)\cos[\alpha(x)] + T(x+dx)\cos[\alpha(x+dx)]$$

or au premier ordre en α, $\cos\alpha = 1$ d'où

$$T(x) = T(x+dx) = T = \|M\vec{g}\|$$

en tout point de la corde.

• PFD selon $\vec{e_y}$:

$$\mu\, ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left(\sin[\alpha(x+dx)] - \sin[\alpha(x)]\right)$$

or au premier ordre en α, $\sin\alpha = \alpha$ d'où

$$= T\left(\alpha(x+dx) - \alpha(x)\right)$$

$$\mu\, ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

et, toujours au premier ordre : $\begin{cases} ds = dx \\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$

d'où l'éq. d'onde :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Éq de d'Alembert sans second membre, célérité $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$.

Vous connaissez déjà les solutions de cette équation sous forme d'OPPS, mais il existe une autre base de solutions qui est plus adaptée à notre problème.

OS Onde telle que les dépendances spatiale et temporelle sont découplées.

Pour une solution qcq 1D de l'EOC, on peut écrire $\boxed{y(x,t) = f(x)\,g(t)}$, f, g réelles.
ce qui revient à chercher les solutions sous forme d'OS.

Pour qu'une telle fonction soit solution :

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2 g(t)}\frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

constante de séparation

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ g''(t) + c^2k^2 g(t) = 0 \end{cases}$$

On prend $k^2 > 0$ pour éviter une divergence de g lorsque $t \to +\infty$.

Finalement la solution OS s'écrit

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx + \Psi)\cos(\omega t + \varphi)} \quad \text{où } \omega = ck.$$

Pour pouvoir définir les modes, il nous faut considérer les conditions aux limites du problème.

$x = 0$: $y(0,t) = 0$ à tout t.

$x = L$: $y(L,t) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\Psi) = 0 \\ \cos(kL + \Psi) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Psi = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ -\sin(kL)\underbrace{\sin(\Psi)}_{\pm 1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

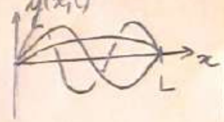
Le vecteur d'onde k ne peut prendre que certaines valeurs, qui sont telles que $\sin(kL) = 0$.

MODE Solution stationnaire de l'éq. d'onde qui vérifie les conditions aux limites.

n-ième mode : ($n \in \mathbb{N}^*$) $\boxed{k_n L = n\pi}$ associé à la pulsation $\boxed{\omega_n = c k_n}$

$n+1$ noeuds, n ventres

- Le confinement de l'onde entraîne une quantification des pulsations et vecteurs d'onde.
- Il y en a une infinité dénombrable.
- Il ne peut y avoir de modes que pour des fréquences particulières.



Les fréquences propres sont les fréquences permises par les conditions aux limites.

Application Fréquence fondamentale d'une corde de guitare de masse linéique $\mu = 3\ g.m^{-1}$ et soumise à une tension $T = 103\ N$, de longueur $L = 63\ cm$?

$$f_{(1)} = 1 \times \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{2L}$$
$$= \underline{147\ Hz}\quad (\sim ré_2)$$

On admet que la solution générale de l'équation d'onde correspond à une superposition de modes propres.
Quand on excite la corde en la pinçant comme sur une guitare, on excite plusieurs modes à la fois → harmoniques.

Énergie d'un mode

$$E_m = \int_0^L \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$
$$= \frac{T\pi^2}{4L} y_{0,m}^2\, m^2$$

→ dépend du # du mode
→ de son amplitude.

II – 1) Approximation acoustique

→ Référentiel galiléen, néglige pesanteur
→ milieu continu : $f \ll \frac{c}{lpm} \sim 3\ GHz$
→ évolution des particules de fluide quasistatique $\frac{1}{\tau} \gg f \sim 10^{10}\ Hz$
→ Éq thermo local (déf à chaque instant et en tt point les grd intensives)
→ —— isentropique : pas d'échange de chaleur, réversible
↳ $f \ll \frac{c^2}{D}$, $D \sim 10^{-5}\ m^2/s$
↳ pas de viscosité $f \ll \frac{c^2}{\nu}$, $\nu \sim 10^{-5}\ m^2/s$

Pour les grandeurs qui vont varier lors de la propag. de l'onde, on a :
$$X(\vec{r},t) = X_0 + X_1(\vec{r},t)$$
et $|X_1| \ll |X_0|$ en tout point
↳ pour ρ, $\vec{v}$, P.
et $\vec{v}_0 = \vec{0}$ pour un fluide au repos. ($|\vec{v}_1| \ll c$)

Compress isentrop :
$$\boxed{\chi_s = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_s}$$

2) Mise en équation

Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0$

Éq. d'Euler :
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}P$$

+ déf de χ_s qui relie ρ et P

Au premier ordre en X_1, à chaque fois, on obtient une éq. d'onde pour $\vec{v}$ et P :

$$\boxed{\Delta \vec{v} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}.$$

De la m̄ manière, on peut écrire les solutions sous forme d'OS, avec certaines conditions aux limites :

On définit l'impédance acoustique comme

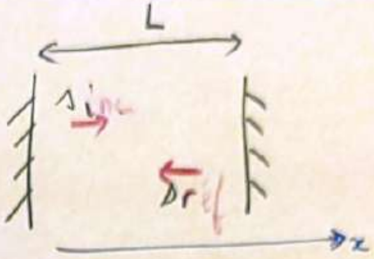
$$Z = \frac{p_1(x,t)}{S v_1(x,t)}$$

avec S la section de l'instrument.

- Les extrémités ouvertes d'une flûte en $z=0$ et $x=L$ correspondent à un noeud de pression.
- Une extrémité fermée (zB anche) correspond à un ventre de pression (noeud de vitesse)

⇒ Pour la m̄ longueur, clari joue une octave plus bas ($f/2$) que flûte.

III –



Coefficient de réflexion $r \in \mathbb{R}$ $=1$

Cavité parfaite.

Indice optique $n = 1$.

$$\cancel{s_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)}$$

$$\cancel{s_r(x,t) = A\cos(\omega t + k(x-L))}$$

~~On somme les deux :~~

$$\cancel{s(x,t) = 2A\cos\left(\omega t - \frac{kL}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{kL}{2}\right)}$$

$$k = \frac{p\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = p\frac{\lambda}{2}}$$

Ccl Prise en compte de la table d'harmonie de la guitare, de l'impédance de rayonnement en sortie des instrus à vent, $Z = Z_c(R+jX)$, sortie du Fabry-Pérot.