LP Systèmes couplés

3 juin 2022

Niveau : L2

Commentaires du jury

Prérequis

- ➢ Oscillateur harmonique 1D
- ➢ Phénomène de battements

Expériences

- Illustrer modes symétrique et antisymétrique avec deux oscillateurs couplés (deux pendules couplés par ressort P79.13, ou les quatre masses dont on immobilise celles aux extrémités)
- illustrer battements avec le même dispositif

Bibliographie

- ✍ *Les leçons* de **Abel Feuvrier et Nicolas Barros**, d'**Étienne Pinard** ⟶ Plan
- ✍ *Hprépa Ondes*, **JM Brébec** ⟶ Schémas, revoir les bases
- ✍ *Dictionnaire de Physique Expérimentale, tomes I et IV*, **Donnini, Quaranta** ⟶ Au point sur les couplages mécanique et électriques
- ✍ *Dictionnaire de physique*, **Richard Taillet** ⟶ Pour les définitions
- ✍ *Jolidon bleu*, **Joe Lidon** ⟶ N oscillateurs

Table des matières

Introduction

Des systèmes sont dits *couplés* dès qu'ils sont en interaction, c'est-à-dire qu'ils peuvent agir l'un sur l'autre. Il existe des couplages de plusieurs sortes ; nous nous intéresserons dans cette leçon seulement aux couplages élastiques entre systèmes simples : les oscillateurs. On négligera toute forme de dissipation.

1 Couplage de deux oscillateurs

1.1 Mise en équation

On utilise le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque masse dans le référentiel des supports supposé galiléen.

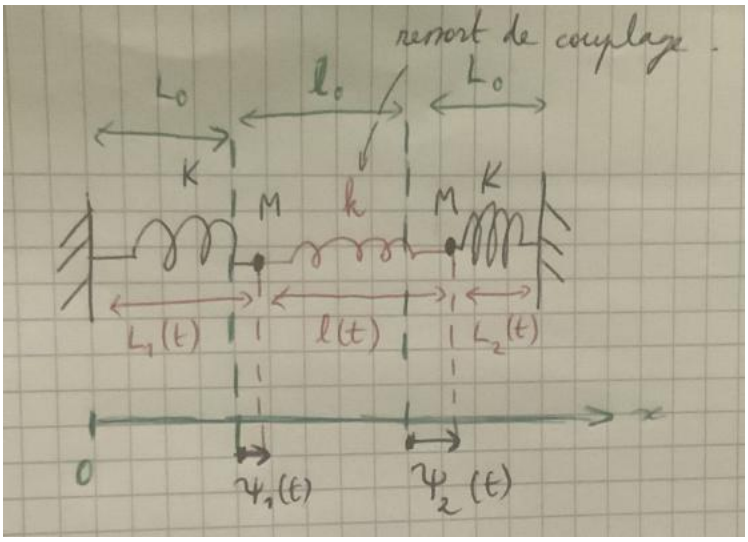

Figure 1 – Schéma de l'expérience

À gauche, sur la première masse :

$$\vec{F_1} = -K(L_1(t) - L_0)\vec{u}_{ressortversmasse}$$

À droite, toujours sur la première masse :

$$\begin{aligned}\vec{f_1} &= -k(l(t) - l_0)\vec{u}_{ressortversmasse} \\ &= -k(-\psi_1 + l_0 + \psi_2 - l_0)(-\vec{e}_x) \\ \vec{f_1} &= k(\psi_2 - \psi_1)\ \vec{e}_x\end{aligned}$$

PFD projeté selon x, idem pour la seconde masse (avec $f_2 = -f_1$: on considère le ressort de couplage sans masse). Finalement, on obtient deux **équations différentielles couplées** pour les déplacements :

$$M\ddot{\psi}_1 = -K\psi_1 - k(\psi_1 - \psi_2) \tag{1}$$

$$M\ddot{\psi}_2 = -K\psi_2 + k(\psi_1 - \psi_2) \tag{2}$$

Définition : Couplage

Lien entre deux systèmes leur permettant d'agir l'un sur l'autre.

Ici, couplage par la raideur k, élastique car le mouvement d'une masse dépend de la *position* de l'autre (et pas de sa vitesse ou de son accélération).

1.2 Résolution

Naturellement, on voit apparaître deux façons de découpler les équations :
Par (1) + (2)

$$M(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) = -K(\psi_1 + \psi_2) \tag{3}$$

et par (1) - (2) :

$$M(\ddot{\psi}_1 - \ddot{\psi}_2) = -K - 2k(\psi_1 - \psi_2) \tag{4}$$

On introduit la variable somme $\sigma = \psi_1 + \psi_2$ et la variable différence $\delta = \psi_1 - \psi_2$, qui sont découplées et répondent à des équations d'oscillateurs harmoniques.

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_0\ \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ \delta(t) &= \sigma_0\ \cos(\omega_a t + \phi_a)\end{aligned}$$

où $\omega_s = \sqrt{K/M}$ et $\omega_a = \sqrt{K+2k/M}$, et les amplitudes et les phases dépendent des conditions initiales.

Ces solutions nous permettent de remonter à des expressions de ψ_1 et ψ_2 en fonction du temps par combinaison linéaire :

$$\psi_1(t) = \frac{\sigma(t)+\delta(t)}{2}$$
$$\psi_2(t) = \frac{\sigma(t)-\delta(t)}{2}$$

1.3 Pulsations propres, modes propres

Deux pulsations caractéristiques du mouvement : ω_s et ω_a sont appelés **modes propres** du système.

Définition : Mode Propre

Etat d'oscillation où tous les éléments du système oscillent à la même pulsation

1.4 Limite de faible couplage

Cas particulier intéressant : $k \ll K$

Qu'observe-t-on si, pour **conditions initiales**, on donne une amplitude à une seule des deux masses et **pas de vitesse initiale** ?

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_0 \\ \psi_2(0) = 0 \\ \text{Pas de vitesse initiale} \end{cases} \tag{5}$$

On a

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \frac{\psi_0}{2}\left[\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)\right] \\ \psi_2(t) = \frac{\psi_0}{2}\left[\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)\right] \end{cases} \tag{6}$$

code python + faire l'expérience

Les masses oscillent *à tour de rôle*, on reconnaît un **phénomène de battements**.

Remarque

Mathématiquement, comment ça s'exprime ?

Formules de trigo :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On peut réécrire les déplacements en *produits de cosinus* :

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \psi_0 \cos\left(\frac{\omega_s+\omega_a}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_a-\omega_s}{2}t\right) \\ \psi_2(t) = \psi_0 \sin\left(\frac{\omega_s+\omega_a}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_a-\omega_s}{2}t\right) \end{cases} \tag{7}$$

On identifie alors *deux nouvelles pulsations caractéristiques* :

$\Omega = \frac{\omega_s+\omega_a}{2}$	et	$\Delta_\omega = \frac{\omega_a-\omega_s}{2}$
la pulsation moyenne		le demi-écart entre les pulsations

Or, dans la limite de faible couplage, $\Omega \approx \omega_s \approx \omega_a \gg \Delta\omega$.

On a donc une enveloppe qui oscille lentement ($\Delta\omega$) multipliée par un mouvement rapide, ce qui est bien caractéristique du phénomène de battements.

L'énergie est stockée alternativement dans l'un ou l'autre des deux oscillateurs : on comprend comment le couplage permet de **transmettre de l'énergie** et constitue un bon modèle pour décrire la **propagation**.

Transition

On a pu étudier un système de deux oscillateurs, on va chercher à étendre ce formalisme pour un nombre arbitrairement grand d'oscillateurs, puisqu'il s'agit du cas le plus commun.

2 Vers l'équation d'onde

2.1 Chaîne de N oscillateurs

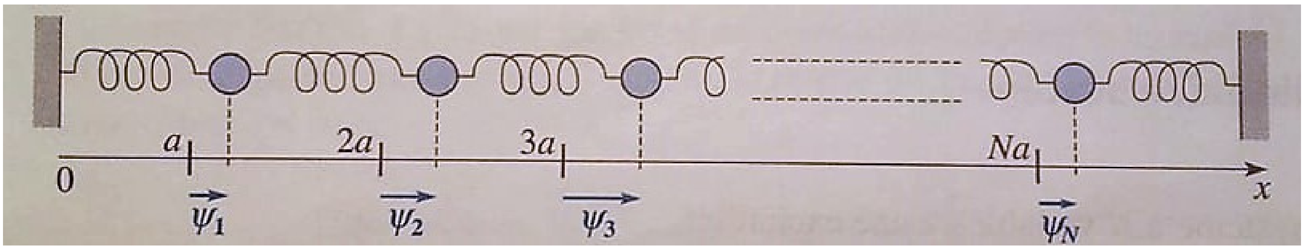

Figure 2 – Modèle utilisé pour les N oscillateurs couplés

Même raideur K, même longueur à vide l_0
PFD our la N-ième masse (c'est une redite, passer direct au résultat) :

$$\begin{aligned} M\ddot{\Psi} &= -K(l_n(t) - l_0) + K(l_{n+1}(t) - l_0) \\ &= -K(l_0 - \Psi_{n-1} + \Psi_n - l_0) + K(l_0 + \Psi_{n+1} - \Psi_n - l_0) \\ &= K(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n) \end{aligned}$$

D'où l'équation du mouvement pour la n-ième masse, qui dépend des déplacements des masses précédente et suivante :

$$M\ddot{\Psi}_n = -K(2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1})$$

On a donc un système de N équations différentielles couplées, qu'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Psi}_1 \\ \ddot{\Psi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\Psi}_N \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$, pourvu qu'on fixe les conditions aux limites sur les mobiles fictifs 0 et N+1 : $\Psi_0(t) = \Psi_{N+1}(t) = 0$
Valeurs propres de W :

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \\ &= 2\omega_0^2\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right) \end{aligned}$$

Retrouver les *modes propres* et *pulsations propres* du système revient à trouver les *vecteurs propres* et *valeurs propres* de cette matrice.

On sait de plus qu'elle est *diagonalisable*, car symétrique réelle.

Tout mouvement du système peut se décomposer sur la **base des modes propres**, et la solution générale est une **combinaison linéaire de ces modes propres**.

Finalement, avec les valeurs propres obtenues (les modes sont non dégénérés), on arrive à la conclusion qu'**un système de N oscillateurs identiques couplés** génère **N modes propres associés à N pulsations propres distinctes**.

Transition

La chaîne d'oscillateurs couplés élastiquement nous fournit, de plus, un *modèle simple pour la propagation du son dans les solides.*

2.2 Approximation des milieux continus.

On considère le solide cristallin : empilement régulier d'atomes.
Milieu

- Homogène, isotrope
- Force de rappel élastique vers sa position d'équilibre
- Longueur d'onde sonore $\lambda \gg$ dimension interatomique a.

Passage de Discret $\longrightarrow$ Continu, $\psi_n(t) \longrightarrow \psi(x,t)$

L'ensemble des valeurs $\psi_n(t)$ (N objets) décrit de manière quasi-continue les valeurs prises par la fonction $\psi(x,t)$ (1 seul objet).

Comme cette fonction est continue, on peut en faire un développement limité. Au 2ème ordre, pour $a \ll \lambda$ (dimension caractéristique de variation de ψ) :

$$\psi_{n+1}(t) = \psi((n+1)a,t) = \psi(na,t) + a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na,t) + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(na,t)$$
$$\psi_{n-1}(t) = \psi((n-1)a,t) = \psi(na,t) - a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na,t) + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(na,t)$$

Les premiers ordres se compensent, et l'équation du mouvement au point $x = na$ se met sous la forme d'une équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

où $c_s = \omega_0 a$.

On arrive à ce qu'on appelle l'**équation de d'Alembert sans second membre**, qui décrit la propagation d'une *onde* et dont on verra que les OPPM fournissent une base de solutions dans une prochaine leçon.

OdG :

$$\left| \begin{array}{l} c_{Pb} = 1230 \text{ m.s}^{-1} \\ c_{Fe} = 5130 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right. \gg c_{air} \sim 340 \text{ m.s}^{-1}$$

Conclusion

On a vu les couplages *élastiques*, mais on aurait pu voir les couplages dissipatifs (en $\dot{x}$) ou inertiels (en $\ddot{x}$), par exemple le couplage inductif (cf tablo).

Compléments

Questions

- **Combien de modes propres en continu ?** Une infinité.
- **Pourquoi dans le mode symétrique, par de constante de couplage.** Parce que la distance est constante, c'est comme s'il n'y avait pas d'interaction. Sur les équations, le mode symétrique intervient sur le centre masse du système, donc seules les forces extérieurs au système comptent .Couplage est une force intérieur au système.
- **Dans l'approximation des milieux continus. Pourquoi parle t on d'ondes accoustiques ?** Ondes longitudinales.
- **Le ω_0 donne un k qui est la raideur du "ressort". Est ce qu'on le connait ?** A partir des énergies de liaison inter atomiques.

	Mécanique	Electrocinétique
Equation	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{e}{L}\cos(\omega t)$
Variable	position x	charge q
Dérivée temporelle	vitesse dx/dt	intensité dq/dt
Inertie	masse m	inductance L
Dissipation	frottement α	résistance R
Raideur	raideur k	inverse d'une capacité $1/C$
Forçage	force F	tension e
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mk}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Figure 3 – Tableau d'analogie électromécanique

- **On peut faire le lien avec le module d'Young et la masse volumique, on fait le lien comment ?** En modèle 3D, avec pleins de chaînes pour avoir la masse volumique et pouvoir appliquer la force surfacique.
- **Autres domaines avec des systèmes couplés ?** Couplages inductifs et électrostatiques, couplage entre un champ et une particule, différent car avec des systèmes très différents.
- **Est ce que avec les deux masses sur des pendules on a la même chose (oscillateurs harmoniques ?) ?** Non, anharmonique pour les grands angles. Bien préciser que ce n'est pas le même système en fait.
- **Longueur d'onde du son dans les solides ? Ordres de grandeur ?**
- **Couplage en élec, inductif ou capacitif ?**
- **Oscillations isochrones ?** Période des oscillations qui ne dépendent pas des conditions initiales
- **C'est le cas de l'OH ? Du pendule pesant ?** Oui puis non.
- **Attention dans le couplage faible, mettre le plus grand moins le plus petit dans les pulsations pour éviter d'avoir d'avoir une pulsation négative.**
- **Cas du couplage pas faible ?** On a la même chose, mais les battements ne sont plus avec des pulsations suffisamment proche donc pas de battements.
-

Commentaires

- Attention, sur le Python, prendre un faible couplage (centième) pour bien voir les battements.
- Bien de faire des petites manips, genre ne pas coupler les deux oscillateurs dés le début, lacher sans ressort, montrer que les deux oscillent sans couplage. Puis les accrocher. Manips introductives, permettent de rendre l'intro + comestible.
- Bien de s'appuyer sur une manip en intro.
- Bien insister sur la différence de pulsation entre les modes anti et symétriques. Même faire la mesure des périodes directement, pour montrer que ça marche. Pousser un peu plus les manips.
- Temps bien géré, bon plan.
- Pour les modes propres, bien insister sur le fait que c'est **à une pulsation harmonique.**
- On pourrait montrer que avec fort couplage on trouve grosse différence entre les pulsations.
- Autre plan possible : oscillateurs classiques couplés puis oscillateurs quantiques couplés.
- Plan pourrait être plus large au niveau des système abordés, mais approche qui se tient, c'est bien de faire des choix. Le jury veut du concret, du pratique, du physique.