

N° d'ordre :
N° bibliothèque :

Année : 2013

**Laboratoire de Physique
de l'École Normale Supérieure de Lyon**



THÈSE

en vue d'obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Lyon,
délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : Physique

École Doctorale ED 52

présentée et soutenue publiquement le 16 octobre 2013

par Monsieur Baptiste BLANC

**Influence des variations de température
sur les matériaux granulaires**

Directeur de thèse : M. Jean-Christophe GÉMINARD

Après l'avis de :
M. Daniel BONAMY
M. Philippe CLAUDIN

Devant la commission d'examen formée de :

Mme Axelle AMON, Membre, Institut de Physique de Rennes
M. Daniel BONAMY, Rapporteur, CEA Saclay
M. Philippe CLAUDIN, Rapporteur, ESPCI
M. Olivier DAUCHOT, Membre, ESPCI
M. Jean-Christophe GÉMINARD, Directeur, ENS Lyon

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Quelques propriétés des matériaux granulaires	3
1.2	Effet des variations de température	15
1.2.1	Expériences "historiques"	15
1.2.2	Compaction d'une colonne granulaire soumise à des cycles de température	17
1.3	L'objectif de cette thèse	21
1.4	Le plan de cette thèse	23
2	Etude expérimentale de la compaction d'une colonne de grains soumise à des cycles de température	25
2.1	Présentation du dispositif	26
2.1.1	Méthode de sollicitations thermiques	26
2.1.2	Mesure de déplacement des grains à la paroi	32
2.1.3	Les protocoles et l'acquisition	34
2.2	Expériences préliminaires	35
2.2.1	Compaction par sauts	35
2.2.2	Texturation	42
2.2.3	Perturbation mécanique	44
2.2.4	Sans perturbation mécanique	47
2.2.5	Bilan	55
2.3	Réponses	58
2.3.1	Réponse à un changement d'amplitude	58
2.3.2	Réponse à un changement de fréquence	59
2.3.3	Dynamique à différentes hauteurs	60
2.4	Discussions et perspectives	61
2.4.1	Discussion des résultats	61
2.4.2	Perspectives	64

3	Un système modèle pour étudier l'influence des variations de température sur une assemblée de grains frictionnels	67
3.1	De l'expérience au modèle	68
3.2	Détails du modèle	70
3.2.1	Modélisation des effets de la dilatation thermique . . .	70
3.2.2	Réaction frictionnelle du support	72
3.2.3	Equations mécaniques régissant la dynamique d'un ré- arrangement interne	73
3.2.4	Adimensionnement des équations différentielles régis- sant le mouvement et procédure numérique	74
3.3	Le système constitué de 2 blocs	75
3.3.1	Système déterministe	75
3.3.2	Introduction du bruit	79
3.4	Augmentation de la taille du système	85
3.4.1	Etude du cas à 3 blocs	85
3.4.2	Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs	89
3.5	Discussion	95
3.5.1	Reptation d'un solide frictionnel	95
3.5.2	Quel est l'intérêt de notre modèle ?	98
3.6	Remarques	98
3.6.1	Sur la modélisation des effets de la température	98
3.6.2	Sur le choix de la loi de friction	99
4	Dynamique intermittente d'un système frictionnel modèle : lien avec les matériaux granulaires	101
4.1	Introduction et rappel du chapitre précédent	101
4.2	Dynamique intermittente	102
4.2.1	Sensibilité aux conditions initiales	102
4.2.2	Description statistique	105
4.2.3	Dynamique interne	111
4.2.4	Viellissement	116
4.3	Discussion	118
4.3.1	Rôle du coefficient de friction statique	118
4.3.2	Rôle du nombre de blocs	120
4.3.3	Conclusion	121
5	Conclusion	127

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Quelques propriétés des matériaux granulaires . . .	3
1.2	Effet des variations de température	15
1.2.1	Expériences "historiques"	15
1.2.2	Compaction d'une colonne granulaire soumise à des cycles de température	17
1.3	L'objectif de cette thèse	21
1.4	Le plan de cette thèse	23

1.1 Quelques propriétés des matériaux granulaires

Un matériau granulaire désigne, de manière générale, une assemblée de particules macroscopiques massives insensible à l'agitation moléculaire. Un critère quantitatif permettant de définir un tel matériau consiste à comparer l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule se déplaçant sur une distance de l'ordre de sa taille $\rho g R^4$ à l'énergie d'agitation thermique typique kT [29]. Pour une masse volumique de quelques milliers de kilogrammes par mètre cube, à température ambiante, le rayon R des éléments constituant ce type de milieu doit être supérieur à un micromètre. Les exemples de tels matériaux sont innombrables dans la vie quotidienne : une poudre pharmaceutique, du sable (Fig. 1.1), des céréales...

Compte tenu du grand nombre de particules qui le constituent, le comportement de ce type de système est difficile à prévoir. Par exemple, dans un paquet de riz de 1 kilogramme, il y a environ un million de grains. Même en



FIGURE 1.1 – Dune de sable [81]

supposant que chacun d'eux se comporte comme un solide parfait, 6 000 000 de variables (à savoir les positions du centre de masse et l'orientation de chaque grain) sont nécessaires à la détermination de l'état mécanique de ce système. Il est donc impossible d'étudier l'évolution de cet objet à partir des équations fondamentales de la mécanique. Comment est-il alors possible de prédire le comportement de ce système ? La physique statistique à l'équilibre a donné une réponse à cette difficulté au niveau atomique en utilisant la notion de chaos moléculaire. A cette échelle, les constituants élémentaires explorent de manière équiprobable les différentes configurations possibles en respectant les lois de conservation imposées (volume, énergie...). Grâce à cette approche probabiliste, il est possible de caractériser le système à partir d'un petit nombre de variables macroscopiques. Or, par définition, les matériaux granulaires ne sont pas sensibles à l'agitation thermique. Cette approche ne peut donc généralement pas être conduite. Au-delà de cette impossibilité théorique, le fait que ce type de matériau ne soit pas sensible au chaos moléculaire implique qu'il peut rester bloqué indéfiniment dans une configuration marginalement stable. C'est le cas d'un sablier qui s'arrête de couler. Il n'évolue pas spontanément vers un état macroscopique moyen qu'on peut caractériser par un petit nombre de paramètres. Même un bref apport d'énergie extérieur n'est pas suffisant pour faire évoluer le système vers un état d'équilibre. En effet, le milieu granulaire dissipe son énergie mécanique.

Contrairement à ce qui se passe à l'échelle microscopique où les lois de la physique sont invariantes par renversement du temps, les forces impliquées dans un milieu granulaire ne conservent pas l'énergie du système pour les degrés de liberté considérés (à l'échelle des grains). Par exemple, les grains subissent une force visqueuse lorsqu'ils se déplacent dans un fluide environnant. Ils lui transfèrent donc une partie de leurs énergies cinétiques. Ou, encore, les chocs entre grains sont inélastiques. Une partie de leurs énergies mécaniques est transformée en chaleur. Pour ces deux raisons, une bille de verre lâchée d'une certaine hauteur, n'atteint pas, après rebond, son altitude initiale. Pour un sac de billes, l'effet est encore plus frappant. Par la multitude des collisions entre billes, le système perd son énergie cinétique dès le premier contact avec le sol. Ces deux forces dissipatives interviennent quand la vitesse des particules est grande.

Dans un écoulement où les grains se déplacent lentement, ces interactions sont négligeables devant une autre force dissipative : la friction solide. Cette interaction entre deux particules en contact est donnée par les lois d'Amon-ton Coulomb [5]. Elles stipulent que deux objets solides glissent, l'un relativement à l'autre, lorsque la force tangentielle à leur surface dépasse une valeur seuil proportionnelle à la force normale. L'énergie dissipée lors de ce déplacement est alors proportionnelle à la force normale et à la distance de glissement. Ainsi, même lent, l'écoulement granulaire dissipe son énergie au travers de cette force.

Il est donc nécessaire de fournir constamment de l'énergie au milieu granulaire pour que ce dernier soit susceptible d'atteindre un régime stationnaire. Les expériences de Chicago [61] consistant à étudier la compaction d'une colonne de sable soumise à des vibrations mécaniques illustrent ce principe. Les auteurs montrent que pour des perturbations mécaniques suffisamment intenses, le système atteint un état de compacité stationnaire qui dépend alors uniquement de l'amplitude de l'accélération. Aux faibles perturbations, le système se densifie très lentement n'atteignant pas sur un temps d'expérience raisonnable un état de compaction stationnaire [61, 64, 73]. Nous allons voir que l'étude de la dynamique de compaction révèle également des propriétés caractéristiques de ces matériaux.

Analogie avec un matériau vitreux

Philippe et Bideau [64] étudient la dynamique de relaxation d'un empilement lâche de grains soumis à des accélérations verticales vers son état stationnaire. Ici, deux effets contraires sont mis en jeu. A mesure que le matériau granulaire se densifie, le volume d'espace vide dans l'empilement diminue freinant la dynamique de compaction. Cet effet de frustration géométrique

est cependant compensé par un mouvement d'ensemble de recirculation qui tend à décompacter le système [70]. Les auteurs observent que la hauteur h de l'empilement répond à l'équation suivante :

$$\psi(t) = \frac{h(\infty) - h(t)}{h(\infty) - h(0)} = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_f(\Gamma)}\right)^{\beta(\Gamma)}\right] \quad (1.1)$$

où Γ est l'accélération relative de la secousse $\Gamma = \frac{a_{max}}{g}$, avec a_{max} la valeur maximale de l'accélération du pot vibrant et g l'accélération de la pesanteur. $\tau_f(\Gamma)$ et $\beta(\Gamma)$ sont les deux paramètres libres de cette exponentielle étirée (Fig. 1.2).

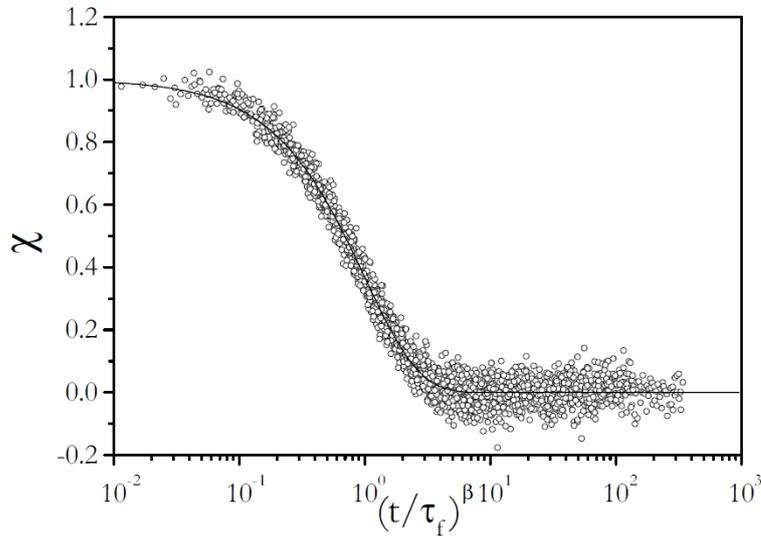


FIGURE 1.2 – $\chi(t) = \frac{h(\infty) - h(t)}{h(\infty) - h(0)}$ en fonction du paramètre $(\frac{t}{\tau_f})^\beta$ pour différentes valeurs de l'accélération $\Gamma = \frac{a_{max}}{g}$. La courbe en trait plein correspond à la fonction $\exp(-(\frac{t}{\tau_f})^\beta)$ (Eq. 1.1) [64]

En physique des verres, ce type de loi est interprété comme résultant de la superposition de plusieurs processus de relaxation exponentielle dont les temps caractéristiques sont différents [55]. Par la forme de sa relaxation vers l'état stationnaire, ce système granulaire hors équilibre ressemble donc à un système vitreux [47, 48, 62]. Lorsqu'on refroidit un liquide très rapidement jusqu'à une température inférieure à la température de transition liquide-solide, le liquide se fige dans une configuration non cristalline. À la transition de solidification, la viscosité du liquide croît de manière brutale. Le système n'a alors pas le temps de se réarranger pour minimiser son énergie.

Les contraintes internes du verre ainsi créées ne sont pas relaxées et l'ordre cristallin à longue portée n'est pas respecté. Cette trempe en température fige donc le système dans un état thermodynamiquement instable mais dont la cinétique de retour à l'équilibre est longue. Un liquide usuel soumis à une perturbation thermique relaxe de manière exponentielle avec un temps caractéristique de l'ordre de la picoseconde. À la transition vitreuse, on définit une température arbitraire T_g pour laquelle le temps typique de relaxation est de l'ordre de la durée de l'expérience (arbitrairement 1000 s). Ainsi quand la température varie d'un facteur 2 ou 3 relativement à T_g , le temps de relaxation change de 15 ordres de grandeur. Dans ce régime, la relaxation temporelle du verre n'est de surcroît exponentielle qu'à temps court, présentant à temps long une dépendance suivant une loi en exponentielle étirée [41]. Au-delà de la forme particulière de cette dynamique de retour à l'équilibre, une caractéristique essentielle d'un système vitreux est que, n'atteignant jamais son équilibre, ce dernier vieillit [42].

Le système expérimental de compaction granulaire présenté sur la figure 1.2 ne montre pas clairement de ralentissement de la dynamique de retour à l'équilibre. Il nous indique simplement que la relaxation du matériau granulaire vers son état stationnaire est un processus impliquant plusieurs échelles de temps. C'est sur un dispositif similaire où les grains sont immergés et soumis à de faibles secousses (50 à 300 nanomètres d'amplitude) qu'on peut observer un vieillissement de la structure de l'empilement (Fig. 1.3)[40]. En étudiant la fonction de corrélation de la lumière diffusée par les grains à différents instants t_w et $t_w + t$, notée $g(t_w, t)$, les auteurs montrent que le milieu granulaire se texture même quand il ne se compacte pas. En effet, $g(t_w, t)$ obéit à une loi en exponentielle étirée de temps caractéristique τ_f , ce dernier augmentant avec l'âge du système (Fig. 1.3). Cette expérience met en avant un point crucial dans la dynamique des matériaux granulaires : elle dépend de l'histoire des sollicitations du système.

Mémoire d'un milieu granulaire

Dans les matériaux granulaires, l'importance considérable de l'histoire du système sur sa dynamique ultérieure est certainement la conséquence de la présence de contact frictionnel entre les grains. En effet, quand le système est à l'équilibre mécanique, la loi de Coulomb ne donne qu'un encadrement de la force tangentielle, ce qui explique l'existence potentielle d'un grand nombre d'états métastables. C'est l'équilibre des forces qui permet de connaître la valeur de cette force et de lever cette dégénérescence. Cependant, dans certains cas, les conditions d'équilibre ne suffisent pas à déterminer l'état du

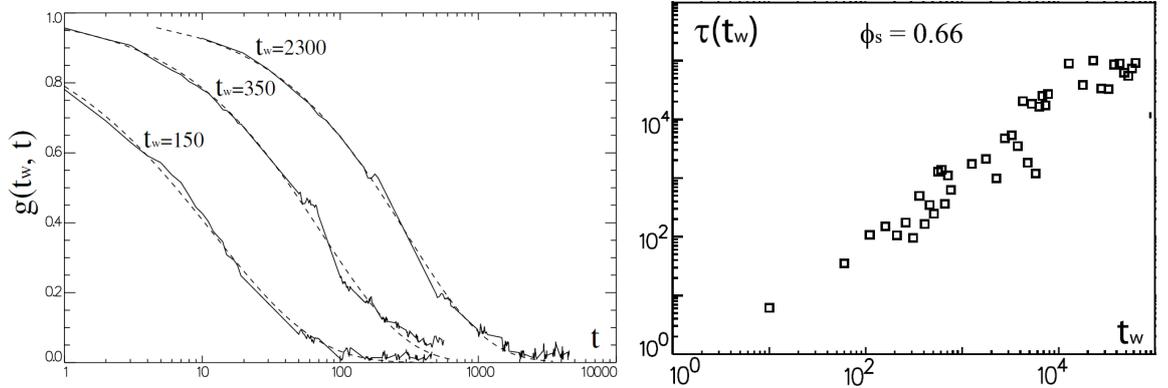


FIGURE 1.3 – A gauche, la fonction de corrélation $g(t_w, t)$ pour 3 différentes valeurs de t_w . Les lignes en trait plein et en tiret correspondent respectivement aux mesures expérimentales et aux interpolations par des fonctions sous forme d'exponentielle étirée. A droite, évolution du temps dynamique $\tau(t_w)$ en fonction du nombre de secousses mécaniques t_w pour un empilement dont la compaction est constante, égale à 0.66.

système. Un grain coincé dans un coin à angle droit, incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, est un exemple typique de cette situation (Fig. 1.4). En effet, le système ne glisse pas, donc les composantes tangentielles et les composantes normales doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |T_1| &< \mu_s N_1 \\ |T_2| &< \mu_s N_2 \end{aligned}$$

De plus, l'équilibre des forces et des moments s'écrit :

$$\begin{aligned} mg \cos(\theta) &= N_2 - T_1 \\ mg \sin(\theta) &= N_1 - T_2 \\ R(T_2 - T_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi ce système comporte 4 inconnues et nous ne disposons que de 3 équations pour le résoudre. L'unique moyen d'en connaître la solution serait de savoir comment cette bille a été posée sur son socle, c'est-à-dire d'en connaître l'histoire.

Ce problème d'indétermination de la force de friction va apparaître dans un empilement granulaire. L'histoire du système s'avère être essentielle à la caractérisation de son état. La distribution des forces dans un tas de sable illustre cette propriété. En effet, l'état de contrainte à la base de l'empilement dépend fortement de la façon dont le sable a été déposé. Contrairement

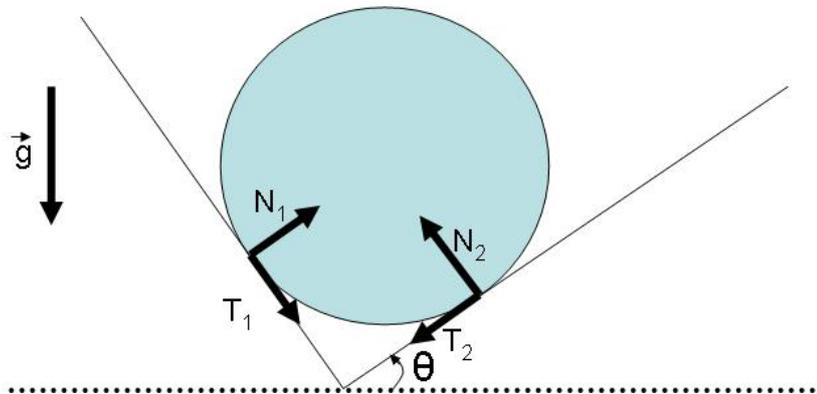


FIGURE 1.4 – Exemple d'un système simple où la façon dont a été déposée la bille est essentielle à la détermination des forces s'appliquant sur elle [65].

à l'intuition, Vanel et al [75] montrent qu'une pression plus faible peut exister à la verticale du sommet de ce tas de sable (Fig. 1.5). Plus précisément, quand les grains sont versés à partir d'une ouverture centrale, l'empilement se forme par avalanches successives. Au contraire, lorsque le tas de sable est construit à partir d'une pluie de grains, la construction est homogène. Bien que la forme générale finale de la pile de sable soit comparable et que la force totale exercée sur le support soit la même (égale au poids des grains) dans les deux cas, la répartition des contraintes au sein de l'empilement est fondamentalement différente. L'état de contrainte moyen caractérise donc très mal le système. D'un point de vue mécanique, le trou de pression observé au centre de la colonne est dû à une redirection des forces vers les côtés permettant de soutenir localement une partie de la composante du poids des grains. On parle dans ce cas d'effet de voûtes.

Une expérience historique [29] met en avant cet effet. Quand un matériau granulaire est versé dans un tube arrimé à un mur bouché à son extrémité par une balance nous permettant de mesurer la force appliquée sur elle, on observe que cette force ne correspond pas au poids des grains déposés. Comme les grains ont préalablement glissé sur les parois du récipient, la force de friction qu'elles exercent sur le matériau est mobilisée dans une direction opposée à la gravité réduisant le poids effectif du matériau. Là encore cette masse dépend de la préparation du système [63, 74]. Ainsi l'arrangement des grains et l'histoire de leur construction sont essentielles à la détermination de l'état de contrainte local de ce dernier.

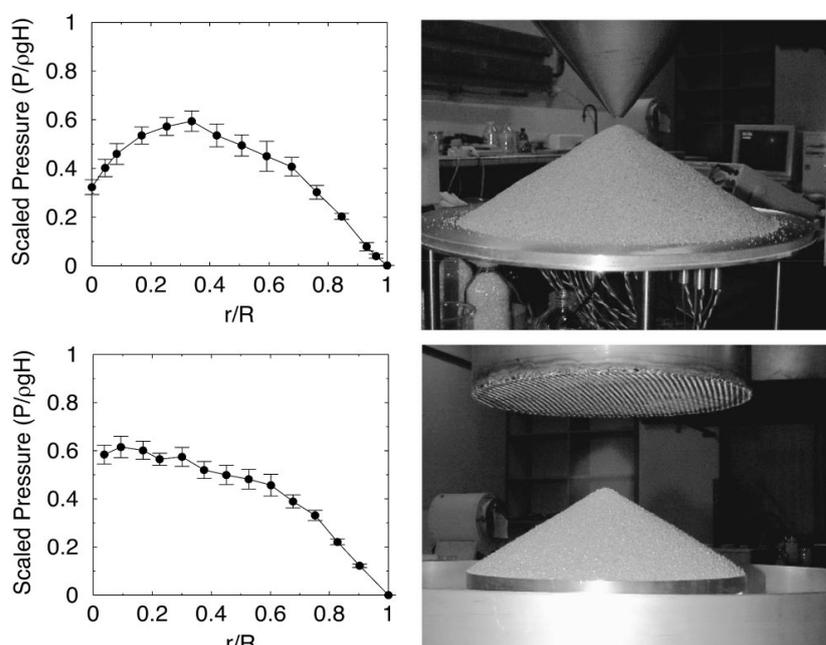


FIGURE 1.5 – Profil de pression P au bas d'une pile de sable normalisée par la pression hydrostatique ρgH , H étant la hauteur du sommet du tas, en fonction de la distance r au centre de l'empilement normalisée par le rayon du tas R , pour deux méthodes de construction. En haut, le sable est versé à partir d'un point fixe. En bas, le tas est construit à partir d'une pluie de grains. Les deux tas de sable sont en apparence identiques (même forme et même angle d'avalanche), mais les contraintes à leurs bases sont elles très différentes. À côté de chaque profil de pression se trouve une photographie illustrant la méthode de construction de la pile de sable correspondante [75].

Chaînes de force d'un empilement

La grande disparité de la contrainte moyenne locale qu'un empilement de grains exerce sur son support est le reflet de la large distribution de la contrainte exercée sur un grain composant l'empilement. La contrainte à l'échelle du grain qu'exercent les parois du récipient sur un matériau granulaire a pu être mesurée grâce à diverses astucieuses méthodes. Liu a utilisé un papier carbone qui noircit sous l'effet de la pression [49]. Les grains, supposés sphériques, interagissent entre eux et avec la paroi par des forces suivant la loi du contact de Hertz. Ainsi l'aire de contact dépend de la force appliquée. La mesure de la distribution des surfaces de contact permet donc de déduire la distribution des forces s'appliquant sur la paroi du récipient. Pour connaître

ces contraintes dans le volume du matériau granulaire, Tsoungui utilise une méthode similaire (il verse de la craie rouge sur les grains initialement blanc. Les zones de contact restent donc blanches). La mesure des aires de contact lui permet également de remonter à la distribution des forces de contact [72]. Ces expériences montrent que ces forces sont réparties de manière très hétérogènes entre les contacts, leur distribution obéissant à une loi exponentielle. En fait, en utilisant des grains photoélastiques, il a été possible de visualiser directement cette hétérogénéité de contraintes (Fig. 1.6). Cette observation directe a également révélé que les contraintes macroscopiques ne sont principalement portées que par un nombre limité de grains impliqués dans ce qui est dénommé "le réseau de chaînes de forces" [34, 51]. Des simulations numé-

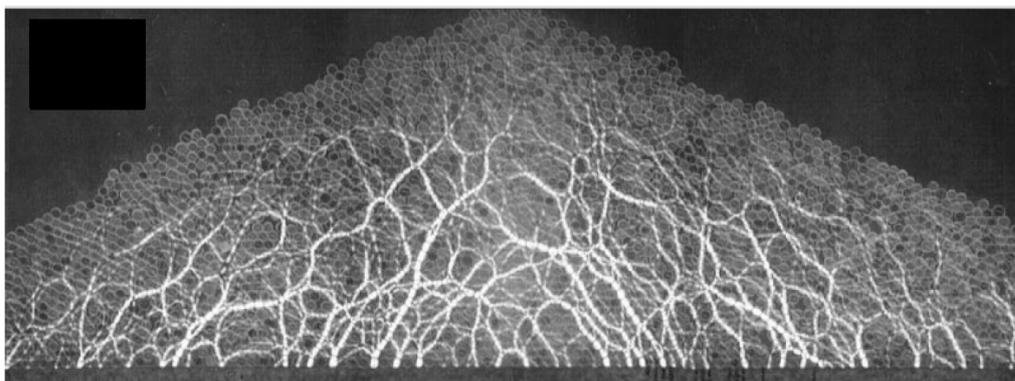


FIGURE 1.6 – Tas de grains photoélastiques construit à partir d’une source de grains ponctuelle. Deux polariseurs croisés permettent de visualiser la distribution des forces. Les zones claires correspondent à des forces intenses [34].

riques [66, 67] en 2 dimensions confirment d’une part cette inhomogénéité de contrainte à l’intérieur d’un matériau granulaire et d’autre part la présence d’un réseau de chaînes de forces responsable de la résistance au cisaillement d’un tel matériau.

Cependant la solidité d’un empilement granulaire reste marginale. En effet, un tas de grains est susceptible de se réarranger sous l’application d’une petite perturbation locale extérieure (ajout de grains [68], laser pointé sur la surface [23], vibration mécanique [36]). Même lorsque la perturbation est très localisée, le nombre de particules impliquées dans le réarrangement induit peut être très grand. C’est le caractère isostatique d’un empilement qui lui confère cette propriété.

Isostaticité d'un empilement de grains

Clarifions ici ce concept. Maxwell s'intéresse, il y a déjà plus d'un siècle, à la stabilité d'une structure constituée de N particules ponctuelles reliées par N_c ressorts de raideur unité [56]. Remarquons déjà que ce système, bien que modèle, représente le potentiel d'interaction linéarisé [si la forme du potentiel le permet (la force de friction hautement non linéaire ne rentre pas dans ce cadre là)] de particules proches de leur position d'équilibre. Ce modèle s'applique donc au voisinage de toutes les configurations stables de l'empilement. La variation d'énergie δE associée à un ensemble de déplacements $\delta \vec{R}_i$ de la particule i est donnée par :

$$\delta E = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} [(\delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i) \cdot \vec{n}_{ij}]^2 \quad (1.2)$$

S'il est possible de déplacer les particules à énergie constante, c'est-à-dire d'avoir un jeu de vecteurs $\delta \vec{R}_i$ non nul tel que $\delta E = 0$, alors le système n'est pas rigide. En effet, une infime perturbation ne le ramène pas à sa position d'équilibre initiale. On dit qu'il possède un mode mou. Comme le membre de droite de l'équation (1.2) est composé de la somme de termes positifs, l'annulation de la variation d'énergie correspond à l'annulation de chacun d'eux. Autrement dit, $(\delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i) \cdot \vec{n}_{ij} = 0$ pour tous les couples (i,j) tels que les grains i et j soient reliés par un ressort. Le nombre de contraintes à satisfaire est donc égal N_c . Ainsi dans un espace de dimension d , $N \times d$ composantes sont nécessaires à la caractérisation de cet ensemble ponctuel de particules. En retirant les rotations et translations d'ensemble, on dénombre donc le nombre de modes mous (en supposant qu'ils sont indépendants). Il y en a :

$$Nd - \frac{d(d+1)}{2} - N_c \quad (1.3)$$

Quand il y a égalité stricte entre le nombre de variables $N \times d - \frac{d(d+1)}{2}$ et le nombre de contraintes N_c , un déplacement infinitésimal d'une particule induit une réorganisation globale de la structure, le système définissant une unique solution stable en accord avec ce nouveau déplacement. C'est ce qu'on appelle dans ce cas une structure isostatique (Fig. 1.7). Pour des grains rigides et sans cohésion, Moukarzel a montré que leur empilement vérifie cette propriété [59]. Quand la force de friction est prise en compte, l'empilement de grains ne peut plus être modélisé par des interactions élastiques. La condition de rigidité n'est donc pas quantifiée par la relation (1.3).

Cependant un modèle scalaire de répartition des chaînes de force étudié par Claudin et Bouchaud [19] montre qu'une infime perturbation du coefficient de friction des grains conduit le système à une profonde réorganisation

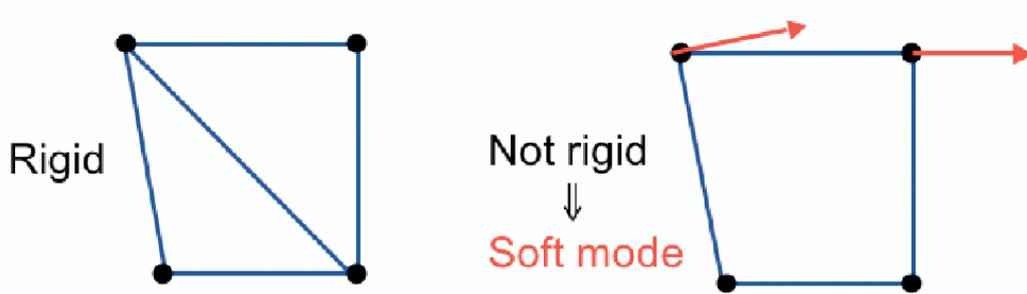


FIGURE 1.7 – Schéma illustrant la notion d'isostaticité. Dans un espace à 2 dimensions, le système constitué de 4 points reliés par 5 ressorts est rigide alors que le système constitué de 4 points reliés par 4 ressorts possède un mode mou, en accord avec l'équation (1.3) [80]

des chaînes de forces (Fig. 1.8). Ce modèle SAM (Scalar Arching Model), initialement proposé par Liu [49] pour rendre compte de la distribution exponentielle des chaînes de force, consiste à placer des grains sur un réseau régulier (i, j) . La charge $w(i, j)$ sur le grain situé au point (i, j) est redistribuée de manière aléatoire sur ses voisins du dessous $(j + 1)$ placés à droite $(i + 1)$ et à gauche $(i - 1)$. À ce modèle, les auteurs ajoutent une condition locale de glissement, modélisant le seuil de rupture de Coulomb au cisaillement. Le paramètre de contrôle de la rupture est noté R_c . La figure 1.8 illustre la fragilité de la structure granulaire. Pour un empilement dont le rapport d'aspect est 1, quand le paramètre R_c subit un changement relatif de 10^{-7} , les chaînes de force connaissent une profonde réorganisation. Une manière de vérifier expérimentalement la validité conceptuelle de ce modèle est de mesurer la variation de force exercée au fond du récipient lors de ce réarrangement. En effet, il est prédit qu'un changement relatif de l'ordre de 10% de cette grandeur peut prendre place.

Il reste alors à trouver une manière de changer le critère de glissement R_c du contact frictionnel. Au-delà de sa dépendance croissante avec le coefficient de friction inter grains (qu'on ne peut expérimentalement pas changer), ce coefficient R_c est également fonction de la densité de l'empilement. En effet, les auteurs souhaitent rendre compte par leur modèle du fait expérimental qu'un empilement plus lâche est plus fragile. Une variation de la taille des grains a constitue une manière expérimentale de changer la compacité de l'empilement et donc R_c . On peut alors générer une variation du paramètre R_c en changeant la température de l'empilement. Le coefficient de dilatation thermique d'un matériau usuel étant de l'ordre de $10^{-5}K^{-1}$, la variation de compacité relative est très faible. Cependant un changement relatif du coeffi-

cient R_c de 10^{-7} , correspondant à un changement de température de 0.01K,

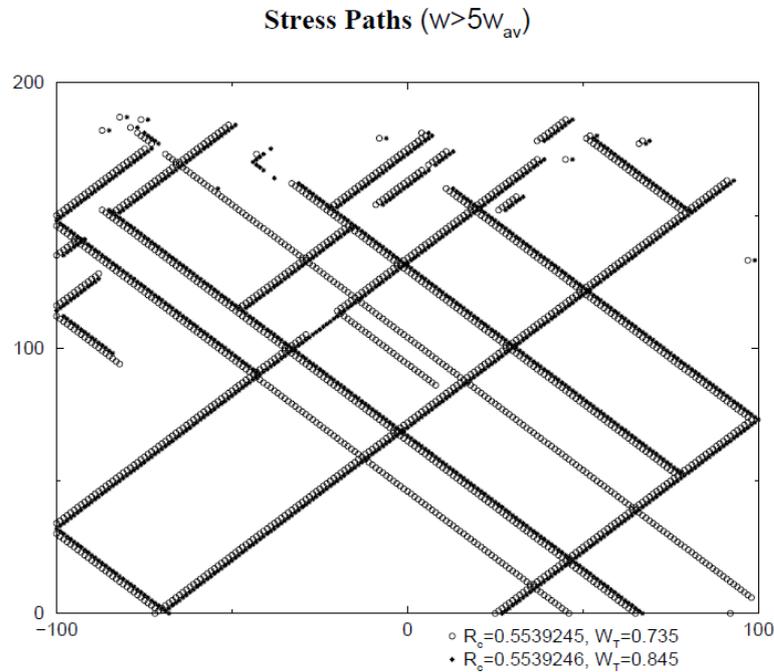


FIGURE 1.8 – Chaînes de forces principales d'un empilement granulaire issues du modèle SAM résultant d'un changement relatif du coefficient R_c de 10^{-7} . Les cercles correspondent au réseau de forces initial, les disques noirs au réseau final. Ce dernier est translaté suivant l'axe x de 2 unités. Le changement de répartition des contraintes se manifeste également par un changement de la masse de grains s'appuyant sur le fond du récipient [19].

peut provoquer des avalanches impliquant un changement significatif de la répartition des forces. Un système granulaire considéré comme athermique est donc a priori très sensible aux variations de température.

1.2 Effet des variations de température

En 2010, T. Divoux a rappelé les principales connaissances concernant l'influence des variations de température sur les milieux granulaires dans la référence [25]. Cette introduction sera largement inspirée de cet article. Cette revue brève et partielle des connaissances nous permettra de dégager quelques questions auxquelles nous essayerons de répondre au cours de cette thèse.

Les premières observations expérimentales mettant en évidence la fragilité d'un matériau granulaire soumis à une perturbation thermique ont été faites dans des systèmes dédiés à l'étude d'autres propriétés. Deux d'entre elles sont présentées dans le paragraphe qui suit.

1.2.1 Expériences "historiques"

Propagation des ondes sonores

La propagation du son dans un milieu est portée par le matériau. On s'attend donc, dans un empilement de grains, à ce que le réseau de contacts joue un rôle important sur ce phénomène. Comme des changements de température altèrent les chaînes de force, Liu étudie l'influence d'un échauffement local des grains sur la propagation du son dans un tel matériau [50]. Son dis-

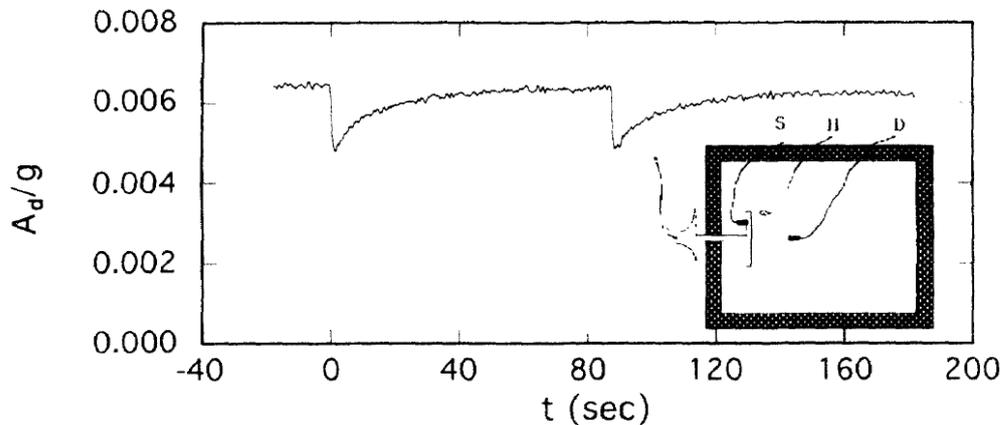


FIGURE 1.9 – Amplitude de vibration mesurée sur le détecteur D lorsqu'un pulse de température est appliqué au niveau de la résistance chauffante H [50]

positif expérimental consiste à placer une résistance thermique au sein d'un

empilement granulaire entre un émetteur et un récepteur d'onde sonore et à voir l'effet de l'injection d'un courant dans cette résistance sur l'amplitude de l'onde recue par le récepteur (Fig. 1.9). Pour une source sonore émettant une sinusoïde d'amplitude constante $A_s = 0.14g$ et de fréquence $f = 6.4kHz$, un changement local de $0.8K$, qui en terme de variation de longueur conduit pourtant seulement à une dilatation globale de l'ordre du micron, peut engendrer une variation relative de l'amplitude de l'onde sonore recue de 20%. De plus, la position de la résistance dans le milieu granulaire influence significativement la forme de l'onde reçue. L'amplitude du signal peut aussi bien ressembler à un pulse relaxant exponentiellement, qu'à un pulse suivi d'une relaxation plus douce. Cette différence provient de l'inhomogénéité des chaînes de forces dans le matériau granulaire. Dans le cas de la relaxation exponentielle, la résistance est supposée être placée sur une chaîne de force principale. L'échauffement instantané de cette dernière induit un changement brutal de l'amplitude du signal sonore puis la relaxation exponentielle correspond au retour progressif de la température de ce composant à la température ambiante. Dans l'autre cas de figure, la résistance est supposée au contraire ne pas être sur une chaîne forte du réseau de forces. Ainsi la perturbation thermique a d'abord une influence plus faible sur le signal sonore (le pulse est plus petit) puis lors de la relaxation vers l'équilibre, les grains voisins chauffés par diffusion, se trouvant sur une chaîne de force forte, ont une influence importante sur l'allure du signal. La relaxation du signal sonore mesurée combinant ces deux effets est alors initialement plus douce. Au-delà de la mise en lumière de l'influence cruciale de l'hétérogénéité du réseau de force et les répercussions de cette propriété sur la réponse d'un matériau granulaire à une vibration acoustique, cette expérience montre donc qu'un changement de température altère les propriétés de propagation sonore d'un matériau granulaire.

Masse apparente d'une colonne de grains

Clément et al [20], dans une expérience dédiée à l'étude de l'effet Janssen, ont observé la grande sensibilité du système aux variations de température. En voulant mesurer l'influence de la compacité et de la préparation d'une colonne de grains sur la masse de grains s'appuyant effectivement sur le fond du récipient, ils remarquent que la masse apparente d'une colonne laissée au repos change au cours du temps (Fig. 1.10).

Les enregistrements simultanés de cette force et de la température de

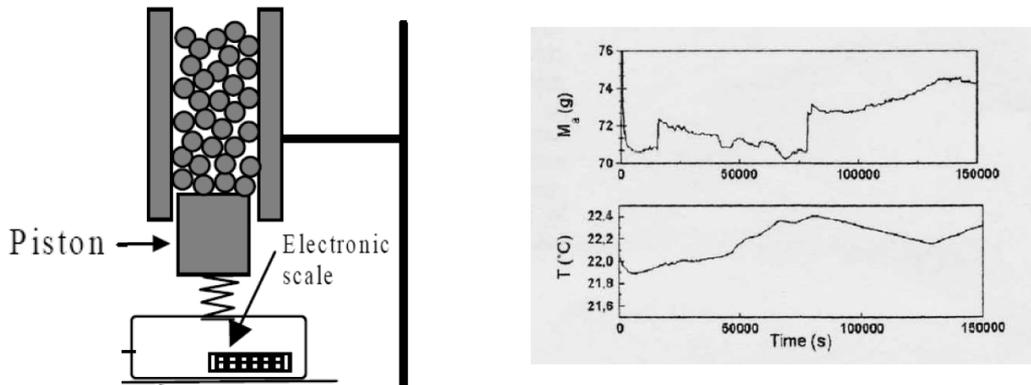


FIGURE 1.10 – A gauche, le croquis du dispositif expérimental mis en place pour mesurer la masse apparente d'une colonne de grains. A droite, en haut est représentée la mesure de cette masse, en bas, la mesure de la température de la pièce. Les changements de masse correspondent à des changements de pente de variations de température [20].

la pièce montrent une forte corrélation temporelle entre les variations de ces deux grandeurs. Ainsi une fluctuation de température ambiante inférieure à 1 degré peut changer la masse mesurée de quelques pourcents, synonyme d'une réorganisation globale de la structure de l'empilement. Dans cette expérience, les variations de température influencent le matériau granulaire de 2 manières distinctes :

- La dilatation des grains peut conduire à des réarrangements internes.
- Les changements du volume disponible résultant de la dilatation du récipient peuvent eux aussi être responsables de la compaction du matériau.

Ce dispositif expérimental ne permet pas d'isoler l'effet propre de chacune de ces contributions. Par contre quel que soit le mécanisme de déstabilisation de l'empilement, la température devient, au même titre que le cisaillement ou les vibrations mécaniques, une manière d'injecter de l'énergie dans le milieu granulaire.

1.2.2 Compaction d'une colonne granulaire soumise à des cycles de température

La dynamique de compaction d'une colonne de grains est un système ayant fait l'objet, ces vingt dernières années, de nombreuses études aussi

bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique [70]. C'est donc naturellement que la compaction d'un milieu granulaire soumis à des variations répétées de température a été considérée dans cette géométrie. La première étude expérimentale consiste à placer périodiquement une colonne de grains dans un four chaud, puis à l'en sortir [17]. A chaque période, la hauteur de la surface libre est mesurée permettant de connaître la compacité moyenne de l'empilement. La dynamique de compaction observée possède deux caractéristiques intéressantes :

- L'amplitude des cycles de température contrôle l'efficacité de la compaction.
- La compaction est de plus en plus lente à mesure que le nombre de cycles augmente. Les courbes expérimentales sont interpolées par une loi d'évolution composée de 2 exponentielles dont les temps caractéristiques sont identifiés respectivement comme correspondant à une échelle temporelle typique de réarrangement individuel de grains et de réarrangements collectifs [57].

Afin d'identifier l'importance de la dilatation relative du contenant et du contenu, des grains et des récipients de matériaux différents sont utilisés [18]. Cependant aucune corrélation n'est observée entre l'efficacité de la compaction et le coefficient de dilatation relatif du milieu granulaire et du récipient.

C'est au cours d'une étude menée par Divoux et al [26, 27] que deux paramètres supplémentaires importants dans le processus de compaction ont pu être mis en évidence. Dans cette expérience, un câble chauffant placé sur les parois d'une colonne en verre remplie d'un milieu granulaire constitué de billes en verre également est alimenté de manière cyclique. Un profil de température oscillant est ainsi établi dans le matériau granulaire. Une sonde platine placée au centre de la colonne, au contact des grains, permet de mesurer l'amplitude des sollicitations thermiques tandis qu'une caméra enregistre la surface libre des grains. Ce dispositif permet de résoudre la dynamique temporelle du processus de compaction (20 mesures pendant un cycle thermique, Fig. 1.11).

Le résultat marquant de ce travail est l'existence d'une température critique ΔT_c séparant 2 régimes de compaction :

- Au dessus de cette valeur, la compaction a lieu à chaque cycle. Elle est continue.
- En dessous de cette valeur, certains cycles de température compactent le système alors que d'autres non. La compaction est intermittente.

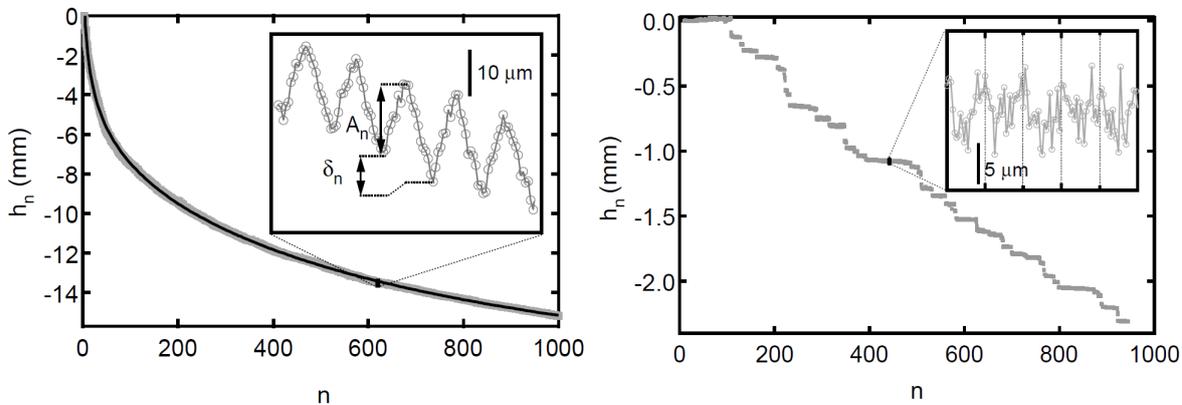


FIGURE 1.11 – Evolution de la hauteur d'une colonne de grains en fonction du nombre n de cycles de température. Pour une amplitude des cycles de température $\Delta T = 10.8^\circ\text{C}$ la dynamique de compaction est continue (à gauche) alors que pour une amplitude $\Delta T = 2.8^\circ\text{C}$ elle est intermittente (à droite).

Comme les auteurs ont pris soin de choisir des billes et un tube en verre pour minimiser les effets de la dilatation relative des deux matériaux, ils attribuent la cause de la compaction du système à la dilatation du matériau granulaire uniquement. Plus précisément, dans cette expérience, la source de chaleur se situant sur les parois du récipient, un profil de température se propage radialement vers le centre de la colonne. La température y est donc inhomogène. Ce gradient de température provoque un gradient de dilatation qui, à l'échelle des grains, induit un déplacement comparable à la taille d'une rugosité des grains. La température de transition est alors interprétée comme étant l'amplitude de température engendrant un déplacement relatif de l'ordre de la taille typique d'une rugosité des grains. Cette expérience met donc en lumière deux paramètres importants dans le processus de compaction : le cisaillement engendré par les cycles thermiques et la rugosité des grains [10].

Parallèlement à ces expériences, Vargas et McCarthy [76] ont mis au point une expérience numérique permettant de résoudre simultanément la propagation de la chaleur à travers un empilement de grains et les réarrangements que peuvent occasionner ces variations de température. La compaction d'un milieu granulaire soumis à des cycles de température est donc étudiée. Plusieurs résultats permettent de corroborer les observations expérimentales précédentes :

- La compaction du matériau granulaire est observée alors qu'il se dilate seul, les parois du récipient étant fixes. Les respirations de volume du récipient induites expérimentalement lors de l'application des cycles de température ne sont donc pas indispensables à la déstabilisation de l'empilement.
- Une dizaine de cycle de température est suffisante pour atteindre un état de compacité stationnaire. La loi de compaction suit une exponentielle étirée. Rappelons que dans une configuration expérimentale similaire [17, 18] (la dilatation relative absolue est importante) une compaction suivant une loi composée de deux exponentielles est observée, le temps caractéristique le plus court étant de l'ordre d'une centaine de cycles pour une amplitude de température de 50 degrés. La différence de comportement entre ces deux systèmes peut être attribuée à la rugosité des grains mis en jeu. En effet, dans cette simulation numérique les grains sont lisses alors qu'expérimentalement ce paramètre est supposé avoir un rôle crucial sur la dynamique de compaction du système [10, 26].

Citons enfin l'unique travail théorique à notre connaissance sur le problème : De Gennes s'intéresse à l'influence des cycles de température sur le profil de déplacement et de pression à l'intérieur d'un silo de grains [24]. Compte tenu des faibles vitesses engendrées lors de ces perturbations, l'inertie du système est négligée et sa dynamique est supposée contrôlée par une force visqueuse. Avant une perturbation thermique, le profil de pression au sein du milieu granulaire traité comme un milieu continu élastique frottant sur les parois du récipient obéit à la loi de Janssen. Les forces de friction sont supposées être initialement mobilisées contre la gravité (les grains s'étant écoulés vers le bas lors de la préparation de l'empilement). Lors d'une dilatation thermique, le champ de déplacement résultant est dirigé contre la gravité. Les efforts élastiques générés par l'accroissement de température doivent inverser la mobilisation de la force de friction. C'est seulement sur une profondeur de l'ordre de la largeur du récipient R à partir de la surface libre H que le seuil de friction est effectivement atteint. Dans ce modèle la dilatation de la colonne est donc proportionnelle à la largeur du récipient contrairement à ce qu'observe expérimentalement Divoux [27]. C'est également dans cette partie de la colonne qu'un refroidissement abrupt du système peut engendrer sa décohésion.

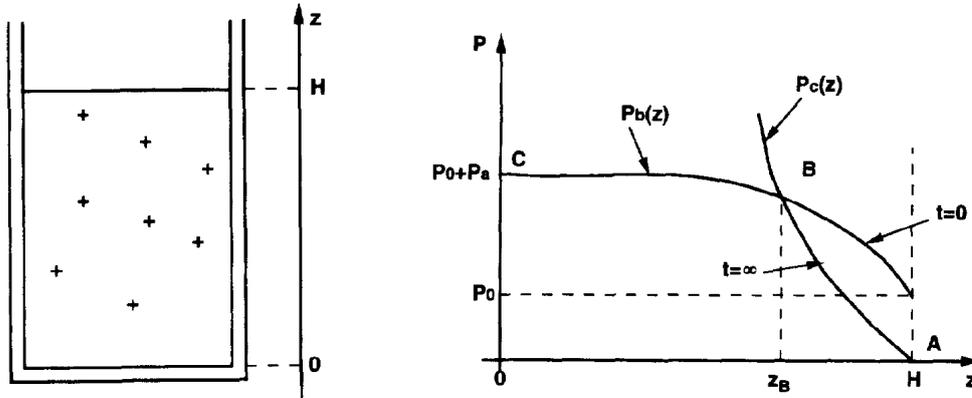


FIGURE 1.12 – A gauche, schéma du système étudié. A droite, profil de pression au sein du matériau à la fin d'un échauffement (profil formé par les points HBC) et à la fin d'un refroidissement (profil formé par les points ABC décalé de $-P_0$). Partant du profil à la fin d'un échauffement, si la température diminue brutalement, la pression en haut de la colonne est négative, synonyme de décohesion [24]

1.3 L'objectif de cette thèse

Quelques interrogations nous semblent émerger des études exposées dans cette introduction.

Premièrement, les cycles de température n'ont pas pu jusqu'à lors être appliqués au matériau granulaire sans dilatation du réservoir. On pourrait croire que l'expérience présentée par J.-C. Géminard [31], où le matériau granulaire est chauffé par un fil placé au centre de la colonne permet de s'affranchir de ce problème. Certes les parois ne se dilatent pas si les variations de température sont assez rapides, mais le fil cyclé en température cisaille le matériau granulaire. Les effets mécaniques extérieurs au système ne sont donc pas éliminés. Reprenant ce dispositif, nous souhaitons supprimer ce cisaillement résiduel. On pourrait ainsi savoir si la dilatation du matériau seul est capable d'engendrer sa compaction. Cela nous permettrait de tester expérimentalement les résultats avancés numériquement par Vargas et McCarthy [76] stipulant que le phénomène de compaction subsiste bien que de moindre efficacité dans le cas de l'unique dilatation du matériau granulaire.

Deuxièmement, il serait intéressant de savoir si c'est un gradient thermique ou une variation homogène de la température qui est responsable de

la compaction. Dans un espace clos, il semble naturel que la dilatation d'ensemble des grains puisse produire des réarrangements mécaniques. En effet, les parois fixes contraignent leurs dilatations. Les efforts élastiques internes augmentant, ils peuvent dépasser le seuil de rupture au cisaillement (critère de Coulomb). Par ailleurs on peut imaginer que lors de son refroidissement, la respiration de longueur engendrée fait perdre la cohésion au système [24]. A ces arguments s'opposent les expériences de Divoux [27] semblant montrer que le matériau granulaire est plutôt sensible à un cisaillement induit par la dilatation différentielle de 2 grains voisins.

Troisièmement, il serait souhaitable de savoir si les différentes parties de la colonne se compactent de manière homogène. Dans une colonne de rapport d'aspect 1/100, il est possible que les différentes parties de la colonne soient découplées mécaniquement compte tenu de l'écrantage des efforts verticaux par les parois du récipient (effet Janssen [29]). Si chaque bloc Janssen se compacte indépendamment des autres, le déplacement observé à chaque hauteur doit être le même. Si chacun de ces blocs se compacte de manière homogène mais que les blocs Janssen sont connectés mécaniquement, on s'attend alors à obtenir une compaction proportionnelle à la hauteur des grains. C'est ce que Divoux [27] a suggéré en montrant que la colonne se dilatait sur toute sa hauteur. Le modèle considérant le matériau granulaire comme un milieu continu proposé par De Gennes [24] prévoit quant à lui une dilatation et une compaction localisées au sommet de la colonne. Visualiser la compaction à différentes hauteurs permettra donc de répondre à cette question.

Enfin, en lien avec la question précédente, dans le régime de compaction intermittente, il est pertinent de savoir si les sauts de compaction observés jusqu'à lors à la surface libre uniquement [26, 31] correspondent à des bulles de densité remontant lentement le long de la colonne ou si ces effondrements sont simultanés à toute hauteur. Là encore imager la colonne à différentes hauteurs permet de répondre à cette question.

1.4 Le plan de cette thèse

Cette thèse se divise en 2 parties distinctes :

Une approche expérimentale a été conduite dans la continuité des travaux antérieurs de l'équipe sur la compaction d'un matériau granulaire sous l'effet de cycles de température. Le système étudié est une colonne de sable chauffée périodiquement à l'aide d'un fil le traversant en son centre. Le déplacement des grains à la paroi du tube est enregistré à l'aide de caméras. On s'intéresse aux caractéristiques de la dynamique de compaction de ce système lorsque les effets mécaniques dus à la dilatation du récipient sont minimisés. C'est l'objet de la première partie de ce manuscrit, ainsi que d'un article publié dans la revue *Physical Review E*. (*Phys. Rev. E* 88, 022201 (2013))

Afin de modéliser l'écoulement lent de cet empilement de grains élastiques et frictionnels lorsque des cycles de température lui sont appliqués, on étudie la stabilité d'un système frictionnel unidimensionnel dont les caractéristiques dépendent de la température. On considèrera un ensemble mécanique constitué de masse et de ressorts posés sur un plan incliné. Une approche analytique permet de corroborer les résultats obtenus par une approche numérique. C'est ce que nous présentons dans la deuxième et troisième partie de cette thèse. Les deux dernières parties de ce manuscrit sont le fruit d'une collaboration avec Luis Pugnaroni, chercheur argentin à la "Universidad Tecnológica Nacional" à La Plata. Un article scientifique présentant ce travail est également paru dans la revue *Physical Review E*. (*Phys. Rev. E* 84, 061303 (2011))

Chapitre 2

Etude expérimentale de la compaction d'une colonne de grains soumise à des cycles de température

Sommaire

2.1	Présentation du dispositif	26
2.1.1	Méthode de sollicitations thermiques	26
2.1.2	Mesure de déplacement des grains à la paroi	32
2.1.3	Les protocoles et l'acquisition	34
2.2	Expériences préliminaires	35
2.2.1	Compaction par sauts	35
2.2.2	Texturation	42
2.2.3	Perturbation mécanique	44
2.2.4	Sans perturbation mécanique	47
2.2.5	Bilan	55
2.3	Réponses	58
2.3.1	Réponse à un changement d'amplitude	58
2.3.2	Réponse à un changement de fréquence	59
2.3.3	Dynamique à différentes hauteurs	60
2.4	Discussions et perspectives	61
2.4.1	Discussion des résultats	61
2.4.2	Perspectives	64

2.1 Présentation du dispositif

Le montage expérimental est largement inspiré du dispositif décrit dans les références [27, 31]. Une colonne en verre de hauteur $H_v = 1.5$ m et de diamètre intérieur $D_v = 1.5$ cm est arrimée à un mur pour éviter les perturbations mécaniques extérieures (Fig. 2.1).

Dans la plupart des expériences présentées dans ce chapitre, cette colonne est remplie d'un mélange de billes de verres (Matrasur Corp.) de diamètre compris entre 425 et 600 microns pour éviter la cristallisation de l'empilement. La masse totale de billes versées est de 370 grammes. Une arrivée d'air comprimé est placée en bas de la colonne. L'ouverture de cette arrivée permet de décompacter le matériau granulaire avant chaque expérience. La hauteur de la colonne de grains est de l'ordre de 135 cm. La compacité initiale correspondante est alors de 60.4%.

Les sollicitations thermiques sont induites par un fil traversant la colonne en son centre. Ce fil de 250 micron de diamètre est en Nickel. Il est alimenté par une source de courant contrôlée en tension. On peut donc choisir la forme, l'amplitude et la fréquence du courant injecté. Pour minimiser l'importance des variations de la température de la pièce sur le processus de compaction, on place la colonne dans une enceinte en bois (2m×1m×0.5m) dont la température est contrôlée au degré près grâce à une régulation thermique (RKC, Rex S-100). Une thermistance placée sur les parois du tube en verre permet de mesurer cette température.

On suit le mouvement des grains à 5 hauteurs différentes à l'aide de 5 webcams (Logitech, Quickcam pro 9000) placées aux hauteurs h_i ($h_1 = 5$ cm, $h_2 = 35$ cm, $h_3 = 64$ cm, $h_4 = 92$ cm, $h_5 = 134$ cm). Chaque zone imagée est éclairée à l'aide d'une diode électroluminescence verte (Kingbright, L-7104VGC-H). Une photographie de la colonne est prise par chacune des caméras pour chaque cycle de température ce qui permet de déterminer les déplacements des grains à la paroi avec une résolution temporelle égale à la période de l'oscillation thermique. Les détails de la méthode sont discutés ci-dessous.

2.1.1 Méthode de sollicitations thermiques

L'intérêt de notre montage expérimental est de chauffer le matériau granulaire de manière contrôlée à partir du centre de la colonne. Ainsi par un choix judicieux de la fréquence, il est possible de supprimer les variations de température des parois extérieures. En effet, le matériau est chauffé au contact du fil par effet Joule. En imposant un courant I composé d'une composante continue I_0 et une composante sinusoïdale I_1 (avec $I_1 \ll I_0$), la

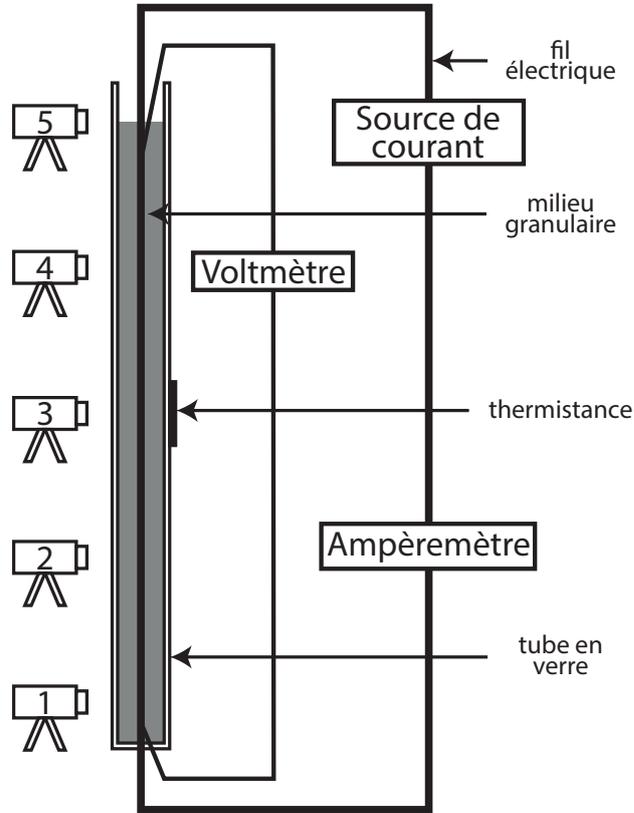


FIGURE 2.1 – Schéma du dispositif expérimental

puissance dissipée P est :

$$\begin{aligned}
 P &= R(I_0 + I_1)^2 \\
 &\approx RI_0^2 + 2RI_0I_1
 \end{aligned}$$

Comme l'équation de la chaleur est une équation linéaire, le profil de température stationnaire au sein du matériau granulaire est la solution de cette équation avec forçage sinusoïdal superposée à un gradient de température stationnaire. Le profil de température résultant s'étend sur une longueur caractéristique l_p donnée en ordre de grandeur par $l_p \sim (\frac{2D}{\omega})^{1/2}$, où D est le coefficient de diffusion thermique du milieu granulaire. Ainsi, la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ permet de contrôler le volume de grains chauffé. En choisissant une fréquence telle que l_p soit inférieure au rayon du tube, on peut chauffer périodiquement le matériau en maintenant la température du tube en verre constante.

Calibration de la résistance du fil température

La résistance du fil dépend de la température si bien que connaître ses variations constitue une sonde locale des variations de température. Compte tenu de la faible valeur de la résistance $R \sim 0.5\Omega$, nous utilisons la méthode de mesure en 4 fils. Elle consiste à mesurer simultanément le courant et la tension aux bornes du fil permettant d'en déduire la valeur précise de la résistance.

Ces variations de résistance doivent être converties en température. Au lieu de mesurer la valeur de la résistance pour différentes températures de la boîte régulée, nous décidons d'employer la méthode suivante. On coupe la régulation de température de l'enceinte. La température de l'ensemble (enceinte+matériau granulaire) relaxe vers la température ambiante de la pièce T_{ext} . La température de l'air à l'intérieur de la boîte T_a est mesurée grâce à la thermistance placée sur la paroi du tube en verre. Les courbes obtenues sont reportées sur les figures 2.2 et 2.3.

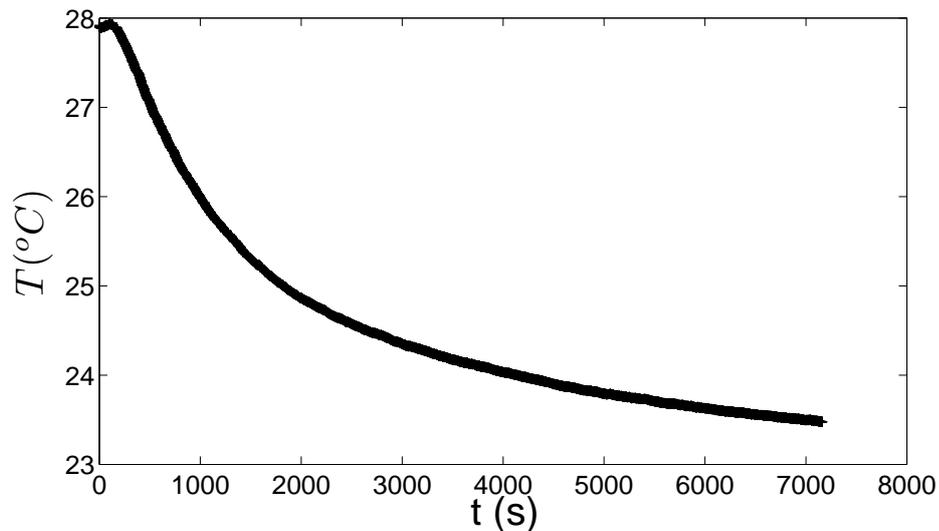


FIGURE 2.2 – Relaxation de la température de l'enceinte régulée en température en fonction du temps lorsque la régulation thermique est coupée

Ce système met en jeu deux masses thermiques : celle de l'air contenu dans la boîte et celle du matériau granulaire. Ainsi la relaxation de l'ensemble (enceinte+grains) vers l'équilibre n'est pas une simple relaxation exponentielle. Une modélisation simple du système thermique considérant 2 sous-systèmes (le premier constitué des grains et du fil, le second de l'air contenu dans l'en-

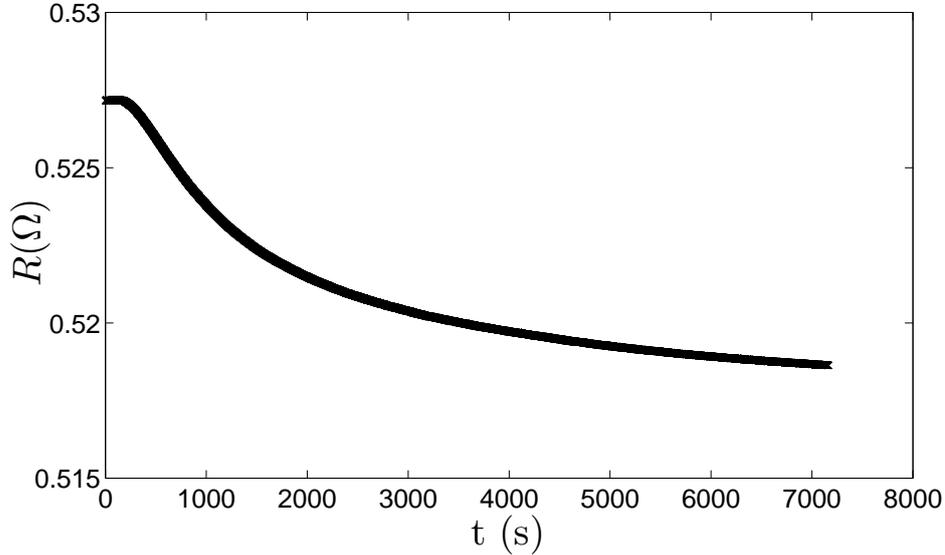


FIGURE 2.3 – Résistance du fil en fonction du temps lorsque la régulation thermique est coupée

ceinte) permet de conclure que la température de la thermistance est égale à la température des grains.

De cette mesure, on peut déduire la relation linéaire liant les variations de résistance et les variations de la température du fil. On obtient :

$$R = R_0 + \zeta(T - T_0) \quad (2.1)$$

avec $\zeta = (2.01 + 0.01) \times 10^{-3} \Omega K^{-1}$ et $R_0 = (0.5274 + 0.0001) \Omega$.

Discussion de la qualité du chauffage

On veut connaître l'amplitude des cycles de température appliquée au matériau granulaire en fonction de l'amplitude du courant I_1 . Pour cela, nous mesurons la résistance du fil. Afin de synchroniser les mesures de la tension et du courant aux bornes du fil, nous utilisons deux multimètres (Agilent, 34410A) que nous déclenchons simultanément. Nous utilisons les mémoires internes de ces appareils pour échantillonner les mesures à intervalle de temps régulier. Une courbe de résistance typique obtenue est présentée sur la figure 2.4. Nous interpolons ensuite ces points par une fonction de la forme $R = a + bt + c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) + e \cos(2\omega t) + f \cos(2\omega t)$ (Le coefficient b correspond à une petite dérive de la température du fil). On observe, sur la figure 2.5, que l'amplitude des variations de résistance croît linéairement

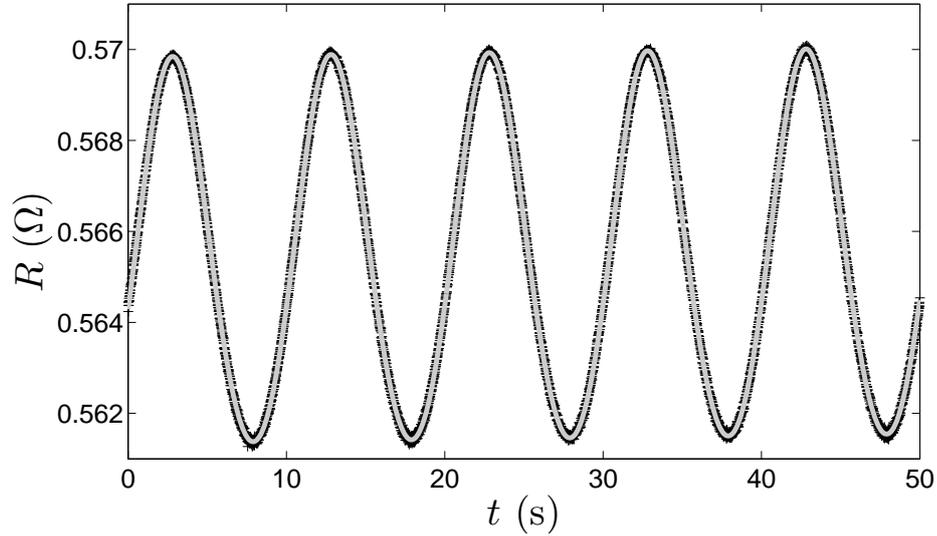


FIGURE 2.4 – Résistance du fil en fonction du temps pour une fréquence $f=0.1\text{Hz}$ et une amplitude de courant pic à pic de 1A. Les points de mesures (en noir) sont échantillonnés toutes les 0.01s. La courbe maîtresse proposée est en gris. A partir de cette expression, on en déduit l'importance relative de l'harmonique 2 sur le signal total. Sur cette courbe, l'harmonique 2 participe à moins de 5% du signal total.

avec l'amplitude de la composante sinusoïdale du courant injecté I_1 . De plus, cette interpolation nous permet de déduire le poids relatif de l'harmonique 2 dans l'amplitude totale du signal. Dans la gamme de courant explorée, ce poids relatif n'excède pas 7%. En définitive, nous pouvons par cette méthode imposer une variation raisonnablement sinusoïdale de la température du fil

Limites en fréquence

L'extension spatiale typique du profil de température à la fréquence ω est de l'ordre de $l_p \sim (\frac{2D}{\omega})^{1/2}$. Cependant, le système est ici à géométrie cylindrique. La solution exacte met donc en jeu les fonctions de Bessel changeant les préfacteurs de cette expression. Pour connaître la fréquence limite au delà de laquelle la paroi du récipient est sensible à l'onde de température, on colle une thermistance sur les parois du tube en verre. Pour $\omega = 2\pi \times 10^{-3} \text{rad.s}^{-1}$, on mesure que la température de la paroi n'est pas constante. On obtient donc un coefficient de diffusivité pour le mélange grains air de l'ordre de

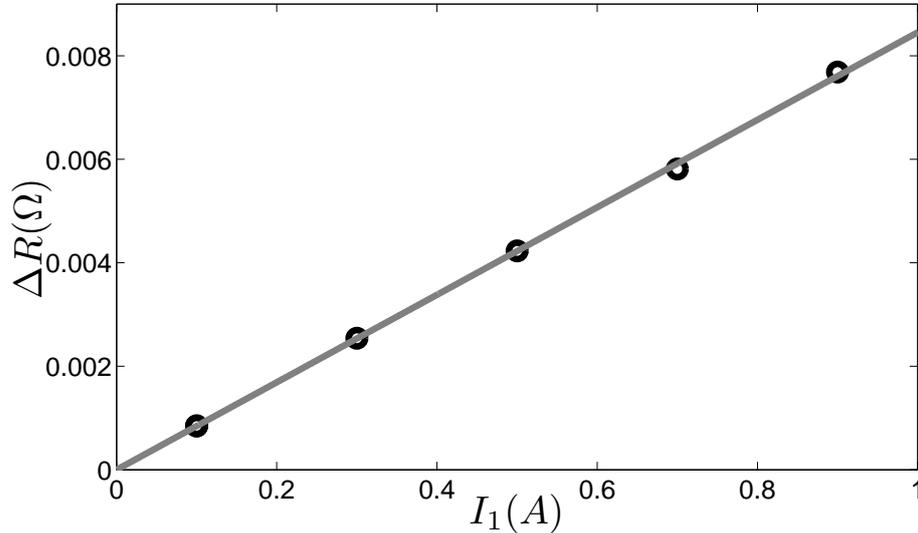


FIGURE 2.5 – Amplitude des cycles de résistance en fonction de l’amplitude des cycles de courant à la fréquence $\omega=0.1\text{Hz}$. Pour cette mesure, le courant constant I_0 est égal à 2.25A. [Points : données expérimentales, droite : interpolation linéaire]

$1.7 \times 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est en accord avec les valeurs tabulées de la conductivité thermique et de la capacité calorifique volumique des grains [28, 30]. Nous travaillerons désormais à une fréquence $f > 0.005\text{Hz}$ ce qui assure que la température des parois est constante et qu’elles ne se dilatent pas.

On étudie également la réponse en fréquence du système (fil+grains). On excite thermiquement le système en lui injectant une puissance sinusoïdale $2RI_0I_1 \cos(\omega t)$. Une fois le régime stationnaire établi, on enregistre la température du fil T_f . Dans le régime stationnaire, la température du fil oscille à la pulsation ω . L’amplitude des cycles de température en fonction de la fréquence est tracée sur la figure 2.6. La fonction de transfert observée est un filtre passe bas. On peut comprendre qualitativement pourquoi le système (grains+fil) présente un comportement en fréquence comme celui là.

On note C_f la capacité calorifique du fil, c_s la capacité calorifique volumique du matériau granulaire, H_v la hauteur, ρ_s la masse volumique et K_v la conductivité thermique des grains. La résolution de l’équation de la chaleur nous apprend que $l_p^2 \omega = D$. En écrivant la conservation de l’énergie, et en négligeant les effets de bord, on obtient :

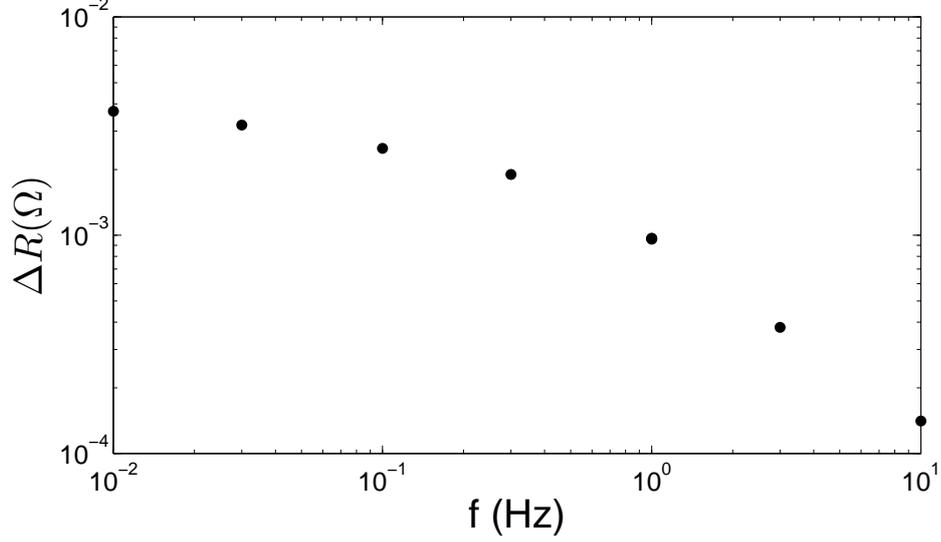


FIGURE 2.6 – Amplitude des cycles de résistance en fonction de la fréquence pour $I_0 = 2.1547\text{A}$ et $I_1 = 0.4335\text{A}$

$$(C_f + c_g \rho_g l_p^2 H_v) \frac{d}{dt} T_g = -2\pi \frac{K_v H_v l}{l} (T_g - T_a) + 2RI_0 I_1 \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

L'amplitude des cycles de température est donc donnée par :

$$T_g = \frac{P}{\omega(C_f + c_g \rho_g l_p^2 H_v) + 2\pi K_v H_v} \quad (2.3)$$

En géométrie cylindrique, l'inertie thermique des grains chauffés est égale à $l_p^2 H_v$. Or l_p^2 est proportionnel à $\frac{1}{\omega}$. C'est ainsi que dans cette géométrie, l'inertie thermique des grains n'intervient pas. La coupure à haute fréquence est due uniquement à l'inertie du fil.

Muni de ces calibrations, il est possible de connaître les variations de température imposées sur l'axe de la colonne de grains à partir de l'amplitude et de la fréquence des cycles de courant appliqués.

2.1.2 Mesure de déplacement des grains à la paroi

Méthode

Les cinq webcams permettent de suivre le mouvement des grains. Elles enregistrent une image brute de 1200 par 1600 pixels, codée en niveau de gris

(Fig. 2.7). La taille d'un pixel correspond dans ce cas à environ $50\mu m$.

Pour mesurer la position de la surface libre, comme les grains apparaissent en clair sur fond sombre, on trace le profil d'intensité lumineuse moyenné sur la largeur de la colonne en fonction de l'altitude x , puis la dérivée de ce profil. Repérer le maximum de cette dérivée correspond à une mesure de la position de la transition entre la zone sombre et la zone claire, donc de la position de l'interface. Si on se limite à la position de la valeur maximale de cette dérivée, la résolution obtenue est la taille d'un pixel. Afin d'améliorer la résolution, nous interpolons ce profil par une fonction arbitraire que nous choisissons gaussienne. Nous considérons que le centre de cette gaussienne est la position de la surface libre. La résolution obtenue dépend alors uniquement de la position de la caméra, qui est de quelques microns dans le cas de la figure 2.7 et de $25\mu m$ lorsque la caméra est reculée pour augmenter son champ de vision.

Pour les 4 autres caméras, on calcule le déplacement des grains par corrélation d'images. Une procédure Matlab a été écrite dans ce but. Le principe de la méthode est le suivant : pour mesurer le déplacement entre deux images p et q , on soustrait à l'image p , le cliché q décalé verticalement d'un nombre de pixel i . Chaque terme de la matrice ainsi créée est multiplié par lui-même pour obtenir une matrice constituée d'éléments positifs. On additionne ensuite tous les termes de cette matrice pour obtenir l'intensité moyenne I_{corr} reflétant la corrélation moyenne des images p et q . En effectuant cette opération pour différents décalages i , on obtient le profil représentant I_{corr} en fonction de i . La position du minimum de ce profil correspond au déplacement des grains entre les clichés p et q . On l'interpole également par une gaussienne pour obtenir une précision meilleure que le pixel ($50\mu m$). Cette méthode, utilisée pour deux images successives, permet de connaître la dynamique du système cycle après cycle et de repérer les sauts de compaction. On observe à posteriori que dans ce cas la résolution est de l'ordre de $10\mu m$.

Pour minimiser les erreurs cumulées et estimer avec plus de précision le déplacement des grains à temps long, il est préférable de corréler les images espacées de plus d'un cycle. On observe alors que pour un déplacement moyen des grains entre images corrélées compris entre $100\mu m$ et $200\mu m$, la procédure de mesure donne une estimation du déplacement global égale au pourcent près.

Écoulement moyen de la surface libre/Écoulement à la paroi

Sur la caméra 5, il est possible de comparer le résultat de la mesure issue de la corrélation d'images pour des grains très proches de la surface libre

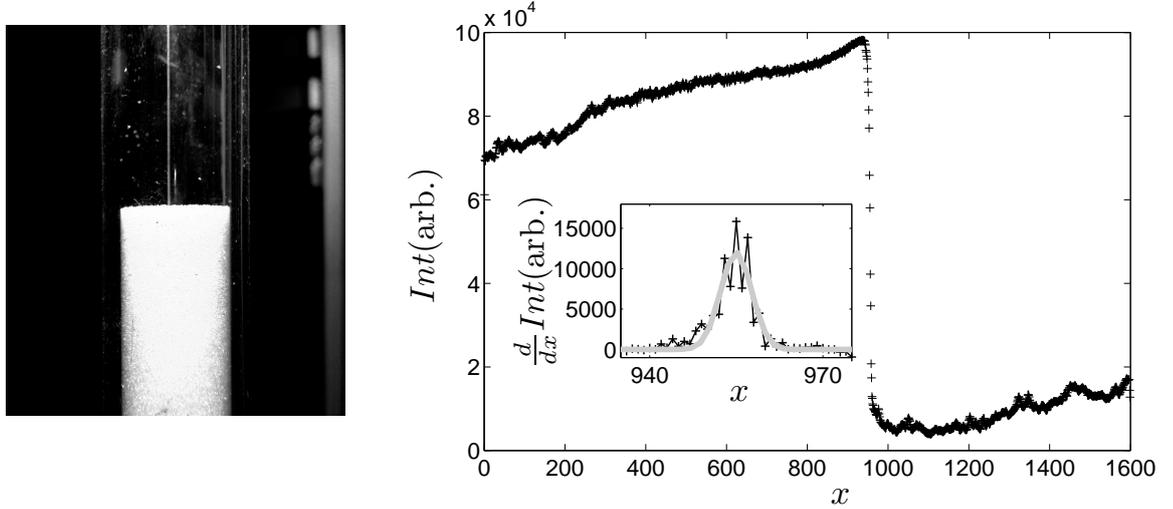


FIGURE 2.7 – A gauche, la photographie de la surface libre prise par la caméra 5. A droite, le profil d'intensité moyenne à l'altitude x en fonction de x [Encadré : la dérivée de ce profil (en noir) extrapolée par une gaussienne (en gris)].

avec celle calculée à la surface libre. On trouve que le déplacement mesuré sur les parois vaut environ 85% de celui correspondant à la surface libre. Cette différence peut s'expliquer de deux manières différentes :

- L'écoulement lent des grains dans le tube dépend de leurs positions radiales r . Dans notre expérience, le système glisserait plus lentement aux parois qu'au centre de la colonne. La vitesse d'écoulement de la surface libre représentant l'écoulement moyen serait donc plus rapide que celle mesurée à la paroi.
- la surface libre se déplace plus rapidement que le reste de la colonne sur une profondeur de l'ordre de la taille du tube [24]

De plus, on peut grâce à ce renseignement comparer quantitativement les déplacements aux hauteurs h_1, h_2, h_3, h_4 avec celui mesuré à la surface libre h_5 .

2.1.3 Les protocoles et l'acquisition

L'ensemble de l'expérience est contrôlé grâce à un programme Labview. La base de ce programme consiste à délivrer une tension sinusoïdale à partir d'une carte d'acquisition (National Instruments, PXIe-6124) pour contrôler l'amplitude et la fréquence des cycles de température. Les 5 caméras sont elles aussi interfacées grâce à Labview. On décide de prendre une image à

chaque cycle. Chaque image est enregistrée sur le disque dur de l'ordinateur et est traitée à la fin de l'expérience. Nous verrons par la suite que le protocole dépend du système étudié. La procédure usuelle est la suivante :

- On décompacte la colonne grâce à un flux d'air ascendant. Le niveau de la surface libre atteint juste après décompaction est fluctuant suivant les expériences.
- A ce stade, plusieurs méthodes ont été testées tout au long de la thèse. Nous verrons les limites de chacune d'elles au cours de la présentation des résultats.
 - Soit on applique les cycles de température dès le début de l'expérience (méthode 1)
 - Soit on commence à tasser la colonne par différentes sollicitations :
 - On compacte la colonne par l'application de cycles de température à haute fréquence 1Hz (méthode 2)
 - On compacte la colonne par de légères tapes appliquées par un vibreur électromagnétique. Un courant égal à celui présent dans le régime stationnaire du cas oscillant traverse le fil. Cela permet de s'affranchir des effets liés à l'instauration du régime permanent lors de l'application ultérieure des cycles de température. Les secousses mécaniques induisent la compaction de la colonne de grains. La variation de hauteur de la surface libre des grains est enregistrée en temps réel. Lorsqu'une hauteur de référence est atteinte, on passe à l'étape suivante du protocole. Cela nous permet de partir d'une hauteur initiale constante (méthode 3)
- Les cycles de température d'amplitude et de fréquence choisies sont appliqués. Si la fréquence de travail est de 0.1Hz, on image seulement la surface libre, car une période de 10 secondes n'est pas suffisante pour enregistrer les images des 5 caméras. Pour des fréquences inférieures, les images des 5 caméras sont enregistrées sur le disque dur.

2.2 Expériences préliminaires

2.2.1 Compaction par sauts

Rôle de l'amplitude des cycles de température

Il est connu dans la littérature qu'une amplitude de température croissante engendre une compaction plus efficace [17, 28]. Nous tenons tout d'abord à vérifier que notre système vérifie également cette propriété. Le fil simplement encastré aux deux extrémités, sans tension initiale à température am-

biente, chauffé de manière cyclique le matériau granulaire. Ces cycles thermiques sont appliqués dès le début de l'expérience (méthode 1). La caméra 5 enregistre la position de la surface libre à partir d'une hauteur constante définie arbitrairement. La position de la caméra 5 est telle que la résolution spatiale est de l'ordre de $25\mu\text{m}$ et la résolution temporelle est d'une mesure par cycle.

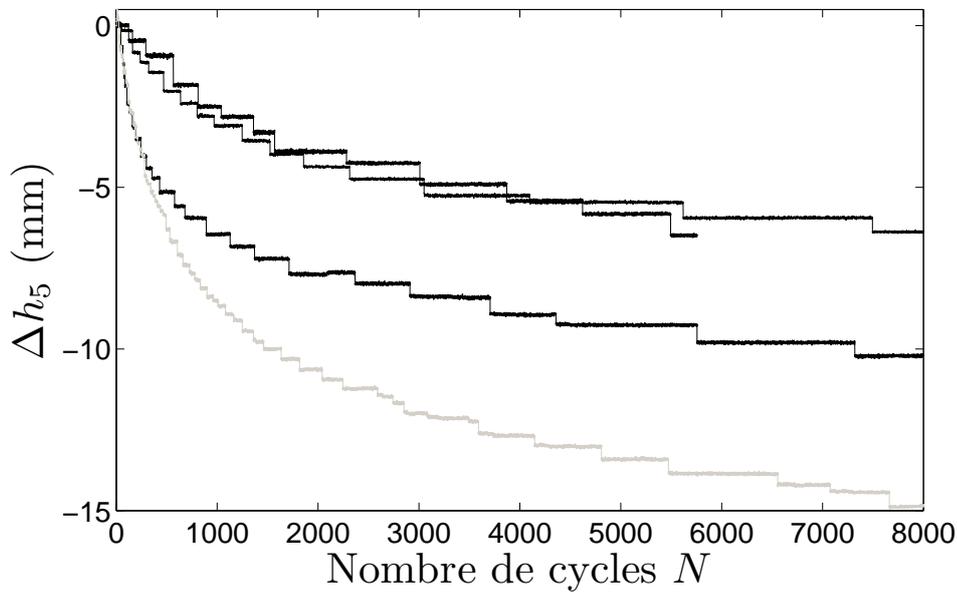


FIGURE 2.8 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles thermiques N . La fréquence de travail est 0.1 Hz. L'amplitude des cycles de courant imposé est 2 fois plus grande pour la courbe grise que pour les courbes noires. La méthode expérimentale utilisée est la méthode 1.

On suit, sur la figure 2.8, l'effondrement de la colonne de grains en fonction du nombre de cycles thermiques pour deux amplitudes différentes. La première constatation frappante est que le système se compacte de manière intermittente. La hauteur de la colonne ne change pas pendant l'application de plusieurs cycles thermiques, puis s'effondre sur une distance d de quelques centaines de microns au cours d'un cycle. La courbe d'évolution présente donc des paliers successifs de durée T espacés d'une distance d représentant un saut de compaction. On observe que la durée des paliers T augmente avec le temps depuis le début de l'expérience, alors que la taille typique des sauts d reste constante. Le système est donc de moins en moins sensible aux per-

turbations thermiques.

De plus, on remarque que d et T diminuent lorsque l'amplitude des cycles de température augmente. Ces deux effets contradictoires mènent cependant à une claire augmentation de l'efficacité de la compaction dans ce cas.

Rôle de la fréquence

La première motivation de ce travail est d'isoler l'effet proprement dû à la dilatation des grains de celui dû à la dilatation du récipient sur la compaction d'un matériau granulaire. Le fil simplement encastré à ses extrémités chauffe de manière cyclique le matériau granulaire. L'amplitude des cycles de température est de l'ordre de quelques degrés. Ces cycles thermiques sont appliqués dès le début de l'expérience (méthode 1). La caméra 5 enregistre la position de la surface libre à partir d'une hauteur constante choisie arbitrairement.

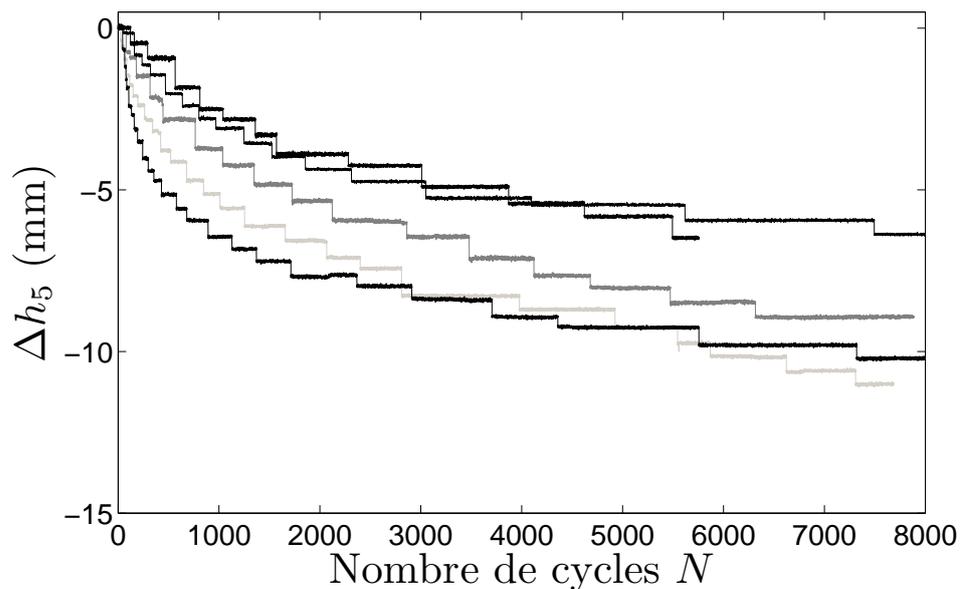


FIGURE 2.9 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles thermiques N . Les fréquences de travail sont 0.1 Hz (en noir), 0.03 Hz (en gris foncé), 0.01 Hz (en gris clair). L'amplitude des variations de courant est la même pour l'ensemble de ce jeu d'expériences. La méthode expérimentale utilisée est la méthode 1.

Sur la figure 2.9, on suit l'effondrement de la colonne granulaire en fonction du nombre de cycles thermiques pour différentes fréquences. On observe

tout d'abord que la compaction intermittente est observée à toutes les fréquences et que la taille moyenne d'un saut ne dépend pas de cette dernière. Une légère tendance suggère qu'une fréquence plus grande est moins efficace pour compacter le système. Compte tenu de la large dispersion des mesures pour une fréquence donnée, il est difficile de conclure quant à l'influence de la fréquence sur l'efficacité de la compaction. De plus, cette assertion est en contradiction avec les résultats et le scénario proposé par Divoux [26], suggérant que le cisaillement induit par cyclage thermique est responsable de la compaction du matériau granulaire. En suivant cette explication, comme une augmentation de la fréquence conduit à une diminution de la longueur l_p , on s'attend à observer une compaction plus efficace à haute fréquence, ce qui n'est manifestement pas le cas. Cela nous pousse à chercher les causes de ce désaccord :

- Le protocole expérimental utilisé est différent.
La forme générale d'une courbe de la compaction montre que le système n'est pas uniquement contrôlé par la compacité absolue. En effet, une translation de l'origine des temps t_c et de l'origine des déplacements de chaque courbe conduit à une meilleure reproductibilité des résultats (Fig. 2.10). t_c pourrait correspondre à la durée séparant le début de l'application des cycles de température et l'enregistrement de la hauteur de la colonne. Le système "vieillit" sous l'application des cycles de température indépendamment de sa compacité initiale [40].
- La compétition entre 2 effets contraires masque cet effet.
Lorsque la fréquence augmente, l'extension spatiale typique du profil de température diminue. Le volume des grains chauffés est donc plus petit, c'est-à-dire que la variation moyenne de la température sur le diamètre du tube est plus petite. Or nous avons montré au paragraphe précédent qu'une amplitude de température croissante engendre une compaction plus efficace. Cependant une longueur typique l_p plus petite implique un gradient de température plus grand et donc un cisaillement important. C'est ainsi qu'il est possible de comprendre la difficulté de distinguer l'effet d'un changement de fréquence sur la compaction du matériau granulaire.
- On travaille à puissance imposée.
Pour une amplitude des variations de puissance injectée par effet Joule constante $2RI_0I_1$, les variations de température du fil engendrées sont plus grandes à mesure que la fréquence diminue. Mais la profondeur de pénétration l_p est plus grande conduisant à un cisaillement plus petit.

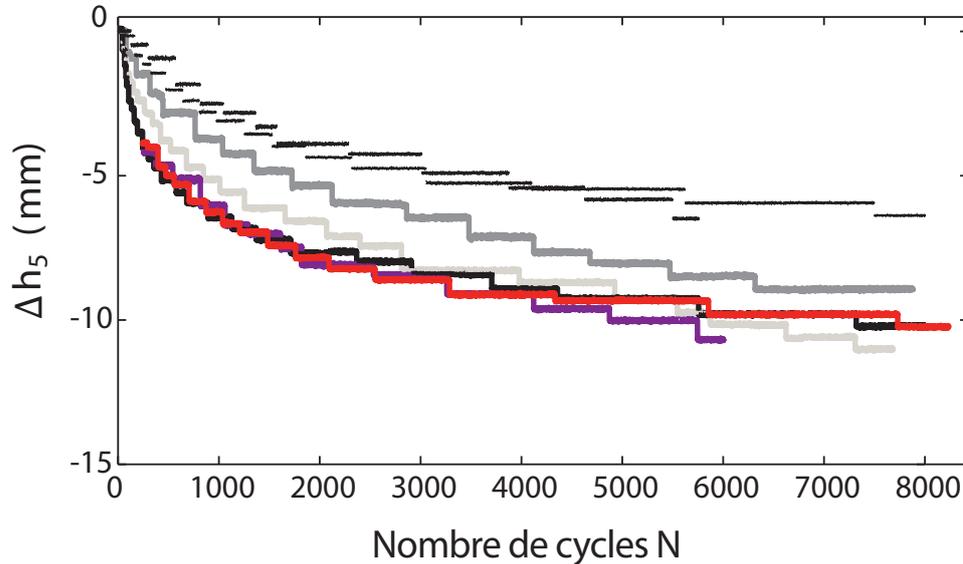


FIGURE 2.10 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles thermiques N . Les fréquences de travail sont 0.1 Hz (en noir, en rouge, en bleu), 0.03 Hz (en gris foncé), 0.01 Hz (en gris clair). Les points de départ des courbes rouge et bleue sont choisis librement pour obtenir une meilleure reproductibilité des résultats. L'amplitude des variations de courant est la même pour l'ensemble de ce jeu d'expériences. La méthode expérimentale utilisée est la méthode 1.

Là encore les effets sont contradictoires. Nous prendrons garde désormais à ajuster préalablement l'amplitude et la fréquence des cycles de courant imposées pour garder une amplitude des variations de température égale à toute fréquence.

- Le cisaillement mécanique appliqué par le fil chauffant masque l'effet proprement dû aux cycles de température. Sous l'effet des variations de température, le fil se dilate et se contracte, imposant un cisaillement mécanique périodique au matériau, non plus à la paroi du tube comme c'était le cas dans les expériences de Divoux [26, 27] mais sur l'axe du système. L'effet observé peut être dû à ce cisaillement extérieur.

Dans la suite, nous allons tenter de discriminer les effets de chacun de ces mécanismes potentiels.

Effet de la fréquence à compacité contrôlée

Dans ce paragraphe, on utilise la méthode de préparation consistant à déclencher les cycles de température lorsque la hauteur de la colonne atteint une valeur préalablement choisie arbitrairement (méthode 2). La colonne se compacte initialement sous l'effet des cycles de courant de haute fréquence identique pour toutes les expériences présentées ci-dessous. Au début de l'enregistrement, la texturation de ces systèmes due à ces cycles de température est donc équivalente. On s'affranchit ainsi de cet effet sur leurs dynamiques ultérieures.

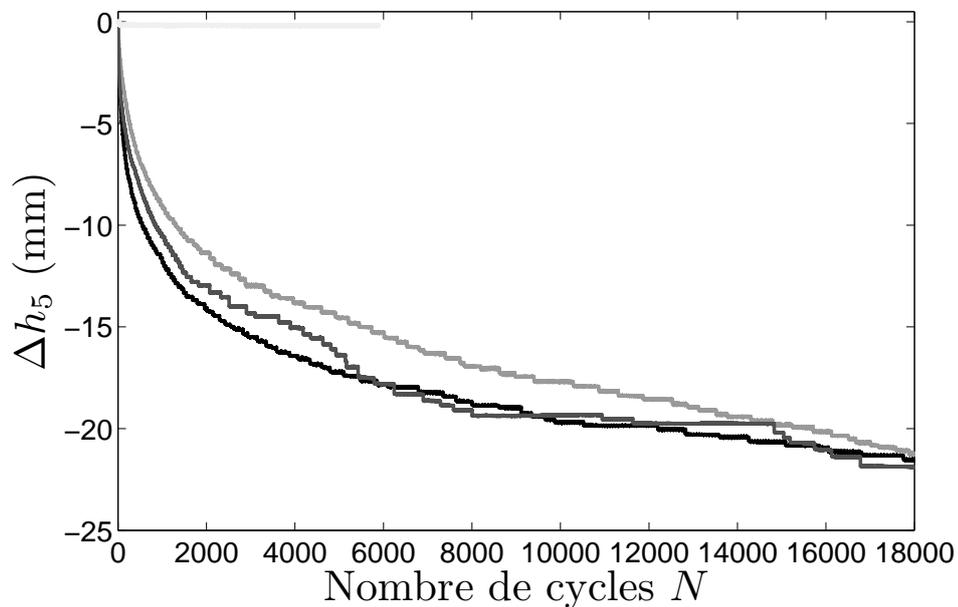


FIGURE 2.11 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N pour différentes fréquences (en gris et noir $f=0.02\text{Hz}$, en gris foncé, $f=0.005\text{Hz}$). L'amplitude pic à pic des cycles de température est de 10°C . En écreu, nous vérifions qu'en l'absence de cycle thermique, aucune compaction n'est observée.

On suit, sur la figure 2.11, l'effondrement de la colonne de grains en fonction du nombre de cycles thermiques pour différentes fréquences de cycles de température. On vérifie tout d'abord que lorsqu'il n'y a pas de cycle de température, la colonne ne se compacte pas. On réalise 2 expériences dans des conditions expérimentales similaires afin de connaître le degré de reproductibilité de l'expérience (les expériences présentées à 0.02Hz durent plus de 10

jours). On mène ensuite une expérience à une fréquence plus basse. Il n'est pas possible de distinguer la courbe de compaction obtenue à cette fréquence de la courbe de compaction moyenne pour $f = 0.02\text{Hz}$. On en déduit que si la fréquence a une influence sur l'efficacité de la compaction, elle est très faible.

Ces courbes attirent notre attention sur un autre point. On observe que la compaction est initialement continue à l'échelle du cycle thermique, c'est-à-dire qu'il y a un effondrement par cycle. Puis la colonne se compacte en suivant une dynamique intermittente, la durée T des paliers étant de plus en plus grande. Le système devient donc de moins en moins sensible à l'application des cycles thermiques. La figure 2.12 compare l'émergence du régime intermittent pour 2 expériences différentes réalisées dans les mêmes conditions expérimentales. Elle montre que le régime intermittent apparaît après un nombre de cycles donné, plutôt qu'à une compacité donnée.

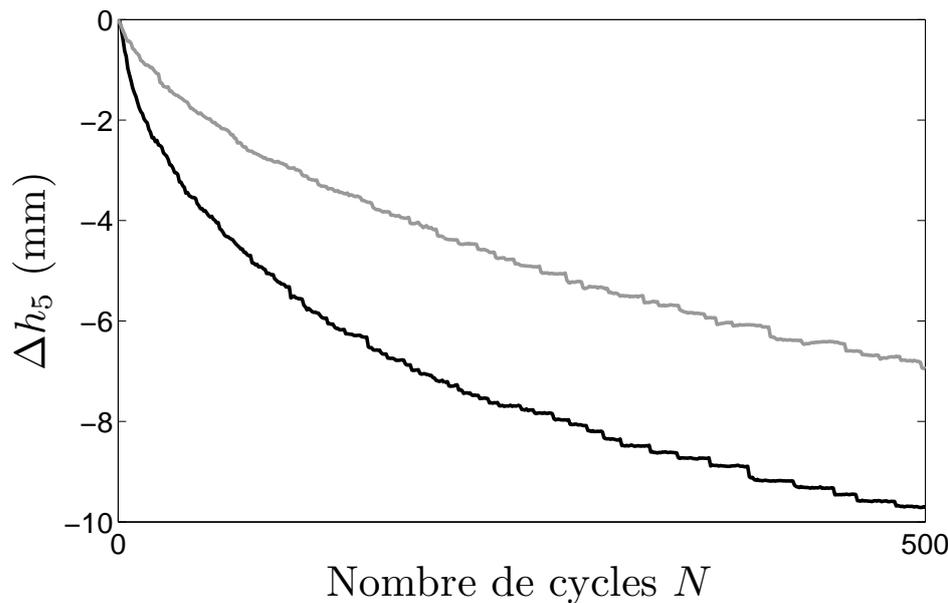


FIGURE 2.12 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N à temps court pour une fréquence $f=0.02\text{Hz}$ à une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 10°C .

Pour une fréquence plus petite, le nombre de cycles nécessaire à l'instauration de ce régime intermittent est plus long (Fig. 2.13). On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : en diminuant la fréquence, on altère une

zone de plus en plus grande (de taille l_p) dans laquelle le matériau se texture. La texturation sur une zone plus grande demande un nombre de cycles plus grand.

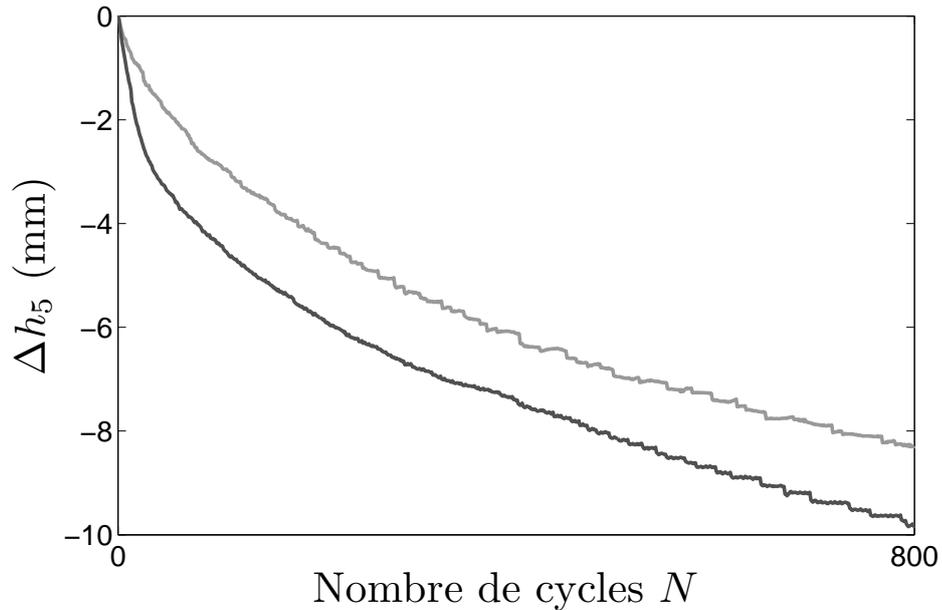


FIGURE 2.13 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N à temps court pour une fréquence $f=0.02\text{Hz}$ (en gris) et pour une fréquence $f=0.005\text{Hz}$ (en noir) à une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 10°C .

Ces deux résultats corroborent donc la proposition faite au paragraphe précédent concernant la texturation progressive du matériau granulaire sous l'effet de l'application des cycles de température.

2.2.2 Texturation

Une autre façon de montrer que le système se texture sous l'effet de l'application répétée des cycles de température consiste à étudier sa réponse à une perturbation mécanique. Nous réalisons l'expérience suivante. Une masse de quelques centaines de gramme est pendue au bas du fil chauffant. Il est également fixé fermement en haut de la colonne. Ainsi le fil se dilate proportionnellement à la distance à ce point fixe. Cela concentre les effets de

cisaillement mécanique dans la partie basse de la colonne. On applique des cycles de température tout au long de cette expérience. Au nombre de cycles $N \sim 6500$, le fil auquel la masse est pendue se casse. Le fil est alors fixé aux deux extrémités de la colonne. Lors des dilatations et contractions successives, il se déplace entre les grains. On observe l'influence de cette perturbation sur la compaction de la colonne de grains (Fig. 2.14).

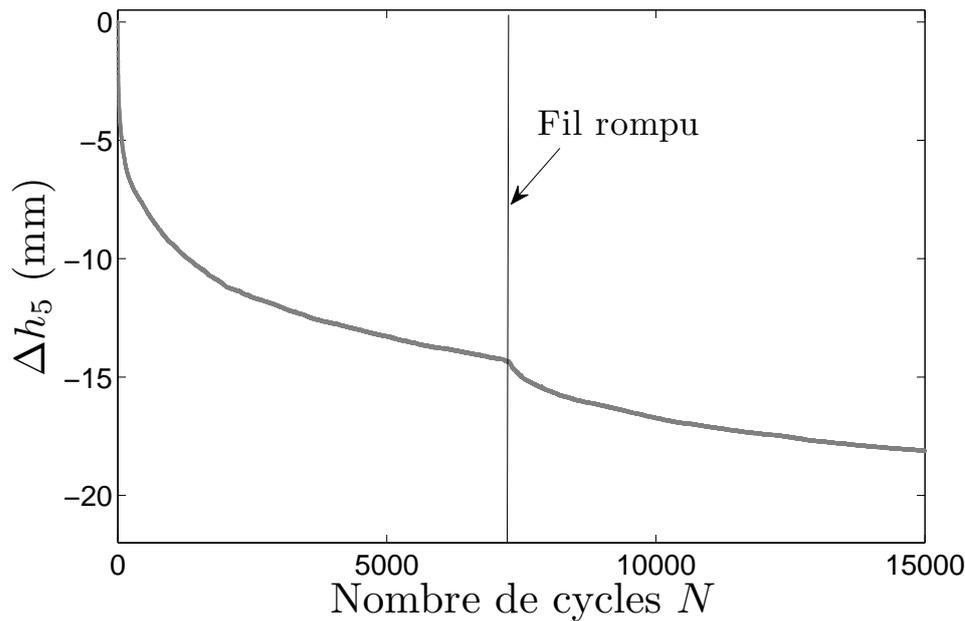


FIGURE 2.14 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N à une fréquence de 0.02Hz pour une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 10°C . Une masse de quelques centaines de grammes est pendue au bas du fil pour le maintenir sous tension. A $N \sim 6500$ le fil est rompu, changeant le cisaillement appliqué par fil.

Au moment de la rupture brutale du fil, on n'observe aucun changement brutal de la hauteur de la colonne de grains. La perturbation mécanique occasionnée n'est donc pas suffisamment forte pour réorganiser les grains. Il est bon ici de calculer l'ordre de grandeur du déplacement du fil au moment de sa rupture. Pour cela, il est nécessaire d'estimer la constante de raideur k du fil métallique. Le fil est constitué de Nickel de module d'Young $Y = 2.14 \times 10^{11} \text{Pa}$ de diamètre $250 \mu\text{m}$, d'environ 1.5 m de longueur. Ainsi la constante de raideur du matériau est $k = \frac{YS}{l}$, $k = 2.14 \times 10^{11} \times \pi \times (125 \times 10^{-4})^2 / 1.5 \sim 7.10^3 \text{N.m}^{-1}$. Une masse d'une centaine de grammes provoque un allongement par rapport

à sa longueur à vide Δl de quelques centaines de microns. Lors de la rupture du fil, le déplacement occasionné, inférieur au millimètre à son extrémité mouvante, ne suffit pas à déstabiliser le système. Cependant on observe que la compaction des grains s'accélère sur une plage de temps longue (environ 1000 cycles). Le temps de réponse du système est très grand devant le temps de rupture du fil. Cela montre que le matériau granulaire se texture sur une échelle de temps longue sous l'application des variations de température et que cette texture est extrêmement sensible aux perturbations mécaniques induites sur le système. Cela corrobore les résultats présentés plus haut mettant en lumière le rôle de la texturation du matériau granulaire sous l'application des cycles de température. On remarque de plus que cette observation expérimentale fait écho à la compaction sous cycle de cisaillement périodique réalisé par Nicolas et al [60]. Les auteurs observent une compaction très lente correspondant à l'agencement progressif des grains. Un changement brutal de l'amplitude des cycles de cisaillement crée du désordre dans cet empilement. Ceci est observé par des variations brutales de compacité. Les variations de compacité sont proportionnelles à la variation de l'amplitude des cycles de cisaillement ($\Delta\phi = -\alpha\Delta\theta$ avec $\alpha=1.45.10^{-3}$). On comprend alors qu'une variation de cisaillement $\frac{\Delta l}{md}$ (md représentant la largeur de la bande de cisaillement du matériau granulaire, avec m le nombre de couches impliquées et d le diamètre des grains) d'au maximum $\frac{1}{5}$ ne conduise pas à la création de désordre. Ce qu'il y a par contre de très surprenant, c'est de voir le système rajeunir subitement. En effet ce dernier devient subitement "plus" sensible à l'application des cycles de température.

2.2.3 Perturbation mécanique

Au cours de l'étude précédente, nous avons vu qu'une perturbation mécanique est capable d'induire un changement dans la dynamique du système. Nous cherchons ici à étudier l'efficacité de la compaction pour différentes conditions mécaniques imposées au fil chauffant.

3 méthodes de sollicitations mécaniques sont comparées :

- Lors de la préparation du dispositif expérimental, le fil est fixé à ses deux extrémités, sans tension initiale, à la température ambiante T_0 . Pendant les expériences, la température du fil est toujours supérieure à T_0 et le fil reste continûment sans tension. Les variations de longueur associées aux variations de température sont réparties tout au long du fil dans des mouvements latéraux hors de l'axe (situation 1).

- Le fil est fixé fermement en haut de la colonne, alors qu’une masse de quelques centaines de grammes est accrochée en bas. Dans ces conditions, le déplacement vertical du fil est proportionnel à la distance au point d’ancrage. Le cisaillement mécanique imposé par le fil est donc maximal à la base de la colonne granulaire (situation 2).
- Le fil est fixé en bas et est tendu au moyen d’un ressort dans la partie supérieure. Dans ce cas, le point fixe de la dilatation du fil métallique se trouve en bas de la colonne et le cisaillement mécanique imposé par le fil est proportionnel à la distance au bas de la colonne.
En effet, la constante de raideur du ressort utilisé est de l’ordre de 10^3N.m^{-1} et le ressort est allongé lors de la préparation du système expérimental afin qu’il reste en tension tout au long des expériences. Comme la constante de raideur du fil k est d’environ $7 \times 10^3 \text{N.m}^{-1}$, lors de la dilatation thermique du fil ($\Delta l \sim 100 \mu\text{m}$), le ressort adapte sa longueur pour vérifier l’équilibre mécanique du système. De plus le ressort est suffisamment raide pour que la force élastique qu’il applique au fil domine les forces de friction appliquées par les grains sur ce dernier. Dans cette situation, le cisaillement mécanique imposé sur l’axe de la colonne est bien maximal au sommet (situation 3).

On observe, sur la figure 2.15, les courbes d’évolution de la hauteur de la colonne en fonction du nombre de cycles N pour ces trois conditions mécaniques. On remarque tout d’abord que le cisaillement mécanique influence de manière importante la dynamique de compaction de la colonne. Plus précisément, lorsque le cisaillement est localisé sur la partie basse de la colonne, le système se compacte plus rapidement que lorsque le cisaillement est concentré sur la partie haute de la colonne. De plus, en optimisant la résolution de la mesure (qq microns) et en choisissant une amplitude de température grande ($\Delta T = 10 \text{K}$) et une fréquence basse ($f = 0.005 \text{Hz}$) pour augmenter la dilatation de l’empilement (de l’ordre de $\kappa_g \times \Delta T \times h = 30 \mu\text{m}$), nous n’observons pas de dilatation de la surface libre.

L’interprétation proposée de ce résultat est la suivante : lors d’une augmentation de la température, la contrainte moyenne dans le matériau augmente puisque les grains se dilatent dans un volume imposé. Ainsi, la force de friction entre le fil et les grains augmente lors des échauffements. Au contraire, lors de la diminution de la température, la force de friction diminue. Ainsi, le déplacement vers le bas, lors d’un échauffement, du fil tendu par une masse est plus efficace pour déplacer les grains vers le bas que le déplacement vers le bas, lors d’un refroidissement, du fil tendu en haut par le ressort. Au contraire, lors d’un refroidissement, le fil qui se déplace vers le

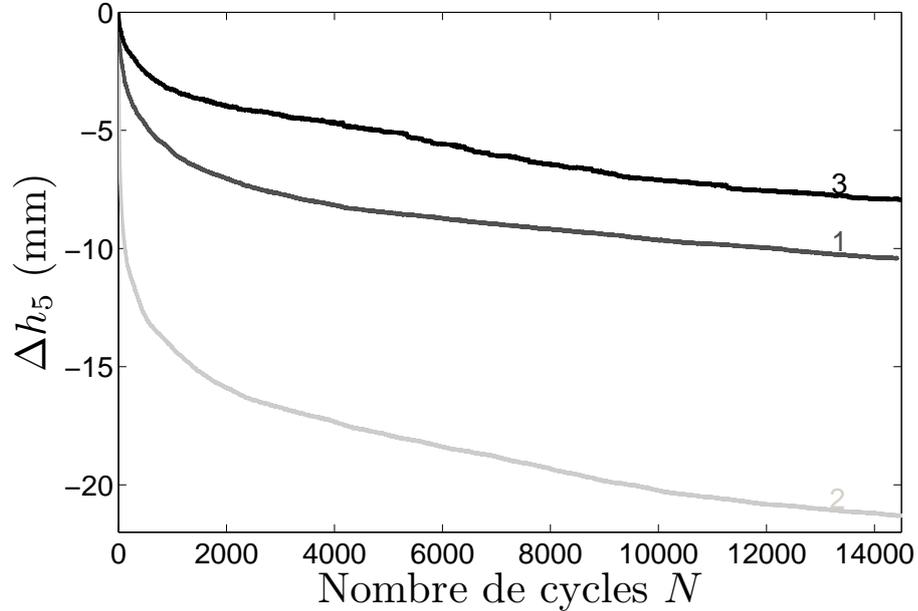


FIGURE 2.15 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N à une fréquence de 0.02Hz pour une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 10°C pour différents cisaillement mécanique induits. En gris clair (2), une masse d'une centaine de grammes est pendue au bas du fil. En gris foncé (1), le fil lâche est fixé aux deux extrémités de la colonne. En noir, le fil (3) est tendu à l'aide d'un ressort placé en haut de la colonne.

haut dans la région inférieure de la colonne est peu efficace pour entraîner les grains vers le haut alors que le fil tendu par le ressort est efficace pour entraîner les grains dans son mouvement ascendant. On comprend ainsi pourquoi la compaction est beaucoup plus efficace pour le fil encastré en haut et tendu par la masse.

Quelques ordres de grandeur sont ici nécessaires pour valider ce scénario. Nous voulons estimer les variations de contraintes engendrées par les cycles de température. Pour cela, nous devons estimer le module d'Young du matériau granulaire Y_g . L'expression de la vitesse de propagation des ondes de compression dans un matériau est donnée par $c = \sqrt{\frac{Y_g}{\rho}}$ avec ρ sa masse volumique. Dans un matériau granulaire, c et ρ sont respectivement de l'ordre de $50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et de $2000\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Le module d'Young typique de l'empilement est alors $Y_g \sim c^2\rho \sim 5 \times 10^6\text{Pa}$. Ainsi lors d'un échauffement moyen ΔT , l'accroissement de la pression normale moyenne engendrée par le tube sur le

milieu granulaire est estimé à $Y_g \kappa_g \Delta T \sim 5 \cdot 10^6 \times 4 \cdot 10^{-6} \Delta T \sim 20 \Delta T \text{ Pa}$. Cette contrainte normale engendrée par une dilatation thermique est à comparer à la contrainte normale moyenne au repos imposée par le récipient sur le matériau granulaire. Elle équivaut au poids de grains contenus dans une colonne de diamètre D_v (D_v étant le diamètre de la colonne en verre) et de hauteur D_v également [29], c'est-à-dire $\rho g D_v \sim 2000 \times 10 \times 15 \cdot 10^{-3} \sim 300 \text{ Pa}$. Pour des variations de température moyenne de quelques degrés, la contrainte normale oscille relativement à sa valeur au repos de quelques dizaines de pourcents. Il n'est donc pas aberrant de croire que le matériau granulaire est entraîné préférentiellement par le mouvement du fil lorsque la température du milieu granulaire est dans une alternance positive. Dans ce scénario, la situation 1 pour laquelle le fil induit un cisaillement de plus faible amplitude, constitue une situation intermédiaire. C'est ce qu'on observe expérimentalement sur la figure 2.15.

2.2.4 Sans perturbation mécanique

Au cours des expériences précédentes, nous avons mis en évidence le rôle des perturbations mécaniques engendrées par le fil sur l'efficacité de la compaction du matériau granulaire d'une part et sur la texturation du système d'autre part. Lorsque nous avons accroché un ressort au bout du fil chauffant, nous avons pris garde à choisir un ressort de constante de raideur suffisamment importante pour le maintenir sous tension mais suffisamment faible afin d'observer une élongation du fil. Garder le fil tendu même lorsque sa longueur naturelle (c'est-à-dire sa longueur sans tension) change et imposer un déplacement nul à ces deux extrémités sont les 2 conditions permettant d'annuler ses déplacements verticaux tout au long de la colonne et de minimiser les perturbations mécaniques. Expérimentalement, nous décidons de réaliser cette condition, en fixant simplement le fil tendu à chaud aux 2 extrémités de la colonne. Grâce à cette méthode, on réduit de manière drastique les perturbations engendrées par le fil. En effet, lorsqu'il est fixé aux 2 extrémités sans être préalablement tendu, le déplacement typique engendré sur sa longueur est $L \kappa_f \Delta T$. Ce déplacement induit une déformation cyclique en cisaillement d'amplitude égale à $\frac{L \kappa_f \Delta T}{md}$, md représentant la longueur de la bande de cisaillement d'un matériau granulaire. A cette déformation cisailante s'ajoute la déformation compressive due à la dilatation radiale du fil. Ce déplacement $r \kappa_f \Delta T$ conduit à une contrainte compressive de l'ordre de $Y_f \kappa_f \Delta T$. Dans le cas du fil sous contrainte, on élimine la contrainte cisailante, en gardant seulement la contrainte compressive constante. Par cette méthode on réduit les perturbations mécaniques induites par le fil d'un facteur $\frac{L}{md} \sim 100$.

Munis de cette nouvelle méthode, nous étudions à nouveau la dynamique

de compaction du matériau granulaire, plus précisément l'effet de la fréquence sur l'efficacité de la compaction. La méthode utilisée consiste à appliquer les cycles de température dès le début de l'expérience et à déclencher l'enregistrement à partir d'une certaine hauteur (méthode 1).

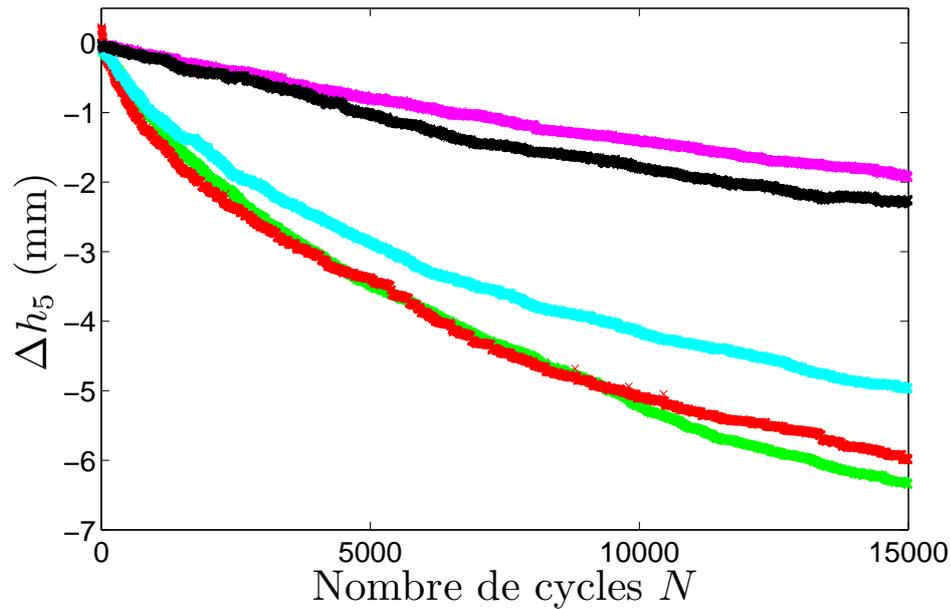


FIGURE 2.16 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N à différentes fréquences de cycle ($f=0.01\text{Hz}$ en rouge, $f=0.02\text{Hz}$ en vert, $f=0.025\text{Hz}$ en cyan, $f=0.03\text{Hz}$ en noir, $f=0.05\text{Hz}$ en violet) pour une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 10°C . Le fil est sous tension, encastré aux deux extrémités de la colonne.

Le premier résultat important est que pour les 5 fréquences testées, le matériau granulaire se compacte en "l'absence" de perturbations mécaniques (Fig.2.16). La forme des courbes de compaction est très similaire à celle obtenue dans les expériences précédentes réalisées en présence de perturbations mécaniques. Un décalage de l'origine des temps permettrait également de superposer les courbes obtenues. Cela montre que la hauteur initiale de la colonne lorsque les cycles de température sont appliqués est d'une importance capitale. Il est connu que pour une compaction par tapping [61] ou par cisaillement [60], la densité moyenne ne suffit pas à décrire la sensibilité du système à une perturbation. Son histoire est un paramètre essentiel à sa caractérisation. Nous montrons ici que la compaction par dilatation thermique

partage cette caractéristique également.

Pour s'affranchir de "l'histoire thermique du système", deux options sont alors possibles :

-On applique directement les cycles de température après décompaction et on regarde l'effondrement du système à partir de cette hauteur initiale quelconque. Nous observons sur la figure 2.17 que pour une même fréquence, les courbes de compaction du système sont également largement distribuées, si bien que l'effet de la fréquence est noyé dans ce bruit. On ne peut donc pas conclure sur la dépendance de l'efficacité de la compaction avec la fréquence. On remarque tout de même sur l'encadré de cette figure que le déplacement de la surface libre après 10000 cycles thermiques est corrélé avec la hauteur initiale de la colonne. Plus la colonne est initialement décompactée, plus la vitesse de compaction moyenne du système est grande. La compacité initiale de l'empilement est donc un paramètre contrôlant la sensibilité du système à des cycles de température.

-On compacte le matériau jusqu'à une hauteur définie à partir de laquelle on déclenche les cycles de température. Nous explorons plus en détail cette deuxième option.

Hauteur contrôlée

Afin de déclencher le système à la même hauteur et à une texture équivalente d'un point de vue des cycles thermiques, nous utilisons un vibreur électromagnétique pour que la colonne se compacte jusqu'à une hauteur désirée. Nous étudions le rôle de la fréquence sur la vitesse de compaction de la colonne. Les résultats présentés sur la figure 2.18 nous montrent qu'il est difficile de conclure sur l'importance de la fréquence des cycles de température dans l'efficacité de la compaction. Une étude statistique n'est pas envisageable parce qu'à la fréquence la plus grande, l'expérience dure déjà 36 heures.

Nous décidons tout de même d'explorer plus en détail cette absence de reproductibilité en répétant cette expérience 10 fois dans des conditions expérimentales similaires. La hauteur de la colonne de grains est également enregistrée au cours des secousses mécaniques (Fig. 2.19). La figure 2.20 présente les résultats de dix expériences similaires. On observe que les courbes de compaction peuvent avoir une vitesse variant du simple au double, conduisant à une hauteur finale largement distribuée autour de la valeur moyenne. Tracant la vitesse de compaction à l'instant où la surface libre atteint la hauteur désirée en fonction de l'effondrement de la colonne de grains après 4000 cycles

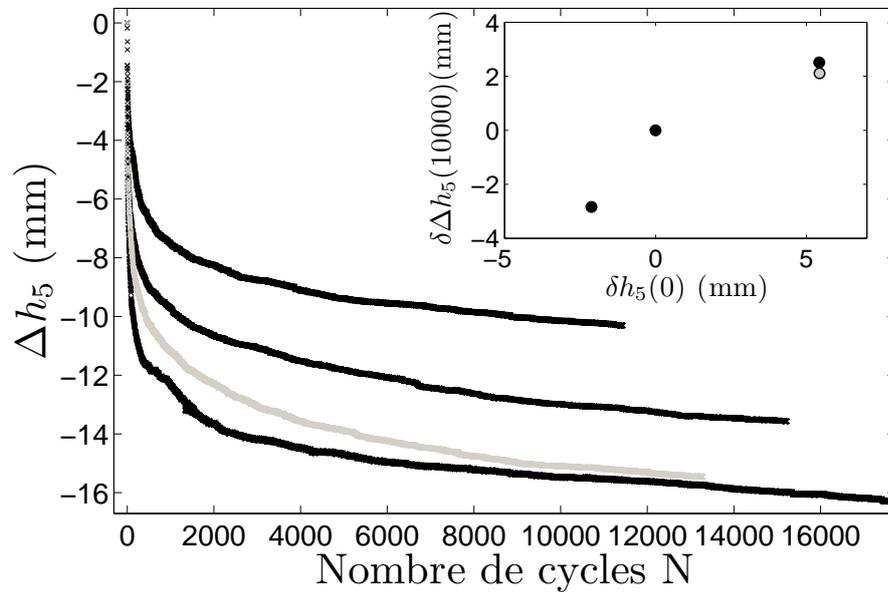


FIGURE 2.17 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N à différentes fréquences de cycle ($f=0.1\text{Hz}$ en noir, $f=0.025\text{Hz}$ en gris) pour une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 7.6°C . Le fil est sous tension, encastré aux deux extrémités de la colonne. Encadré : Différence des déplacements relatifs après 10000 cycles thermiques en fonction de la hauteur relative de l'empilement au début de l'expérience

thermiques (on aurait pu tracer la hauteur après quelques vibrations mécaniques en fonction de l'effondrement de la colonne de grains après 4000 cycles thermiques), on observe une forte corrélation entre ces 2 quantités (Fig.2.21). Les secousses induites par le vibreur électromagnétique préparent certes le système à compacité initiale égale mais ce paramètre ne suffit pas à définir l'état du système. La forte corrélation mise en évidence entre la vitesse de compaction avant l'application des cycles et la hauteur de la colonne de grains après 4000 cycles nous pousse à croire que ce seul paramètre peut contrôler la dynamique de compaction ultérieure.

A susceptibilité contrôlée ?

La vitesse de compaction caractérise la susceptibilité de l'empilement à une perturbation extérieure. On décide donc d'appliquer les cycles de température non pas à compacité égale mais à variation de compacité égale. On

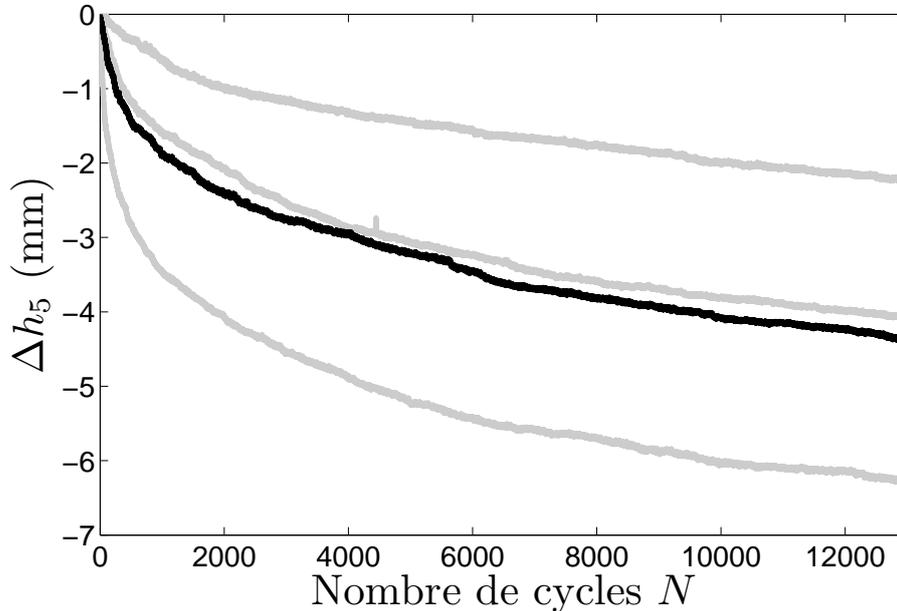


FIGURE 2.18 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N à différentes fréquences de cycle ($f=0.1\text{Hz}$ en gris, $f=0.05\text{Hz}$ en noir) pour une amplitude de cycle de température pic à pic d'environ 7.6°C . Le fil est fixé à chaud aux 2 extrémités de la colonne rendant ainsi les effets de cisaillement mécanique par le fil négligeable. La colonne est compactée initialement à l'aide d'un teneur électromagnétique pour éviter la texturation due à l'application des cycles thermiques

compacte la colonne par secousses mécaniques jusqu'à ce que la vitesse de compaction de l'empilement soit plus faible qu'une valeur choisie arbitrairement (Fig. 2.22). La figure 2.23 montre que dans ces conditions les résultats sont eux aussi très largement distribués. Grâce à cette expérience on remarque également qu'une forte corrélation existe entre l'effondrement de la colonne après l'application de 1000 cycles thermiques et la hauteur relative de la colonne au départ du déclenchement des cycles (Fig. 2.24). La vitesse de compaction initiale (ou la susceptibilité) est certes un paramètre crucial, mais tout de même insuffisant pour caractériser à lui seul la dynamique du système. Il en ressort donc que la dynamique de compaction est sensible au minimum à la densité initiale et à la susceptibilité initiale de l'empilement. Il est donc vraiment difficile, voire impossible, d'obtenir une condition initiale reproductible. On pourrait tenter d'obtenir des systèmes de même compacité

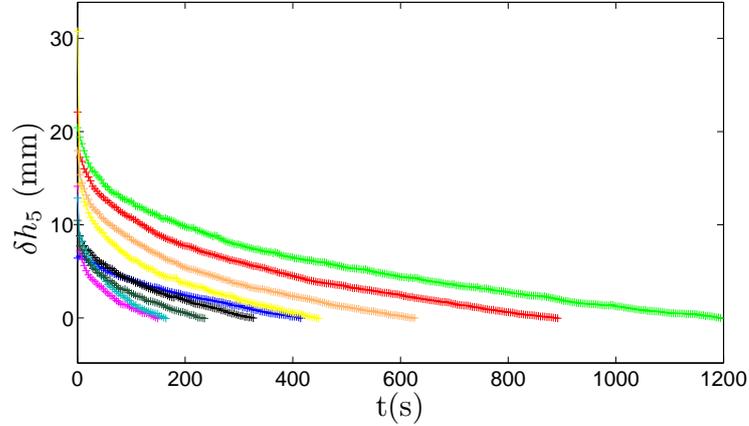


FIGURE 2.19 – Déplacement relatif de la surface libre δh_5 en fonction du temps en secondes lors de l'application des secousses mécaniques préalables aux cyclages thermiques. La couleur de la courbe de compaction de chacune des expériences est identique lors des secousses mécaniques (Fig. 2.19) et des cycles thermiques (Fig. 2.20)

et susceptibilité en multipliant les essais mais la durée de la phase de préparation rend la chose difficile en pratique. De plus, c'est seulement dans le meilleur des cas, que seuls ces deux paramètres suffiraient à contrôler la loi de compaction du système.

Loi modèle pour la compaction thermique

A l'instar de ce qui a été fait pour les secousses mécaniques [43, 64], on peut ajuster à une des courbes expérimentales typiques les lois modèles d'évolution de la compaction en fonction du nombre de perturbations N . Nous essayons deux types de fonction :

- Une exponentielle étirée [64]

$$\Phi(N) = \Phi_\infty - (\Phi_\infty - \Phi_0) \exp \left[- \left(\frac{N}{N_f} \right)^\beta \right]$$

avec N_f , β et Φ_∞ des paramètres ajustables.

- Une fonction variant avec l'inverse du logarithme du nombre de cycles N [43]

$$\Phi(N) = \Phi_\infty - \frac{\Phi_\infty - \Phi_0}{1 + A \ln(1 + BN)}$$

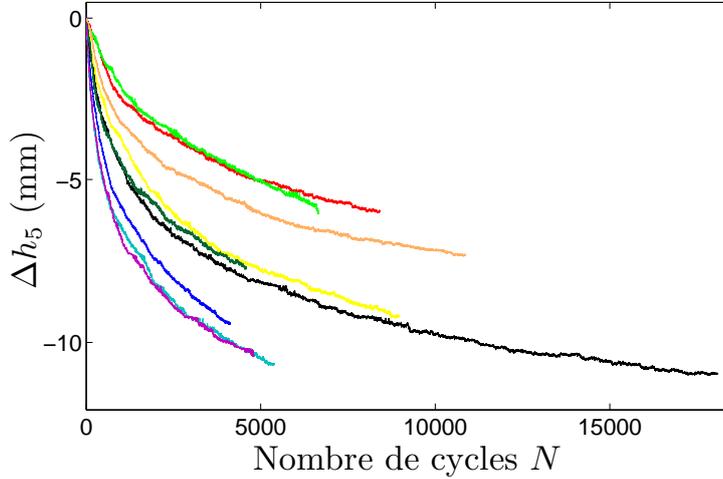


FIGURE 2.20 – 10 courbes de compaction pour une colonne soumise à des cycles de température d’amplitude $\Delta T = 7.6^\circ C$ et de fréquence $f = 0.1 Hz$ déclenchés à la même hauteur après application de secousses électromagnétiques représentant le déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N . La couleur de la courbe de compaction de chacune des expériences est identique lors des secousses mécaniques (Fig. 2.19) et des cycles thermiques (Fig. 2.20)

avec A , B et Φ_∞ des paramètres ajustables

La loi en $\frac{1}{\ln(N)}$ peut être retrouvée par un modèle de parking dont l’idée principale est celle de frustration géométrique [46]. A mesure que l’empilement se compacte, l’espace de vide nécessaire au déplacement des grains a une probabilité d’occurrence de plus en plus faible. La loi en exponentielle étirée résulte de l’équilibre de ce même ralentissement avec un courant de recirculation tendant à décompacter le système. Cette recirculation est observée dans l’empilement lorsque le nombre de grains compris dans une largeur de colonne est de l’ordre de 100 [64]. Rappelons ici que nous utilisons des grains de diamètre moyen égal à $500\mu m$ pour une colonne de 1.5 cm de diamètre. Il y a donc une trentaine de grains dans la largeur de la colonne.

Lorsque le matériau granulaire est compacté par des secousses mécaniques manuelles, la compacité stationnaire Φ_s obtenue est de 0.6273. Nous considérons que $\Phi_s = \Phi_\infty$. Dans notre expérience $\Phi_0 = 0.6042$. Les 2 courbes sont ajoutées aux mesures expérimentales sur la figure 2.25. On remarque

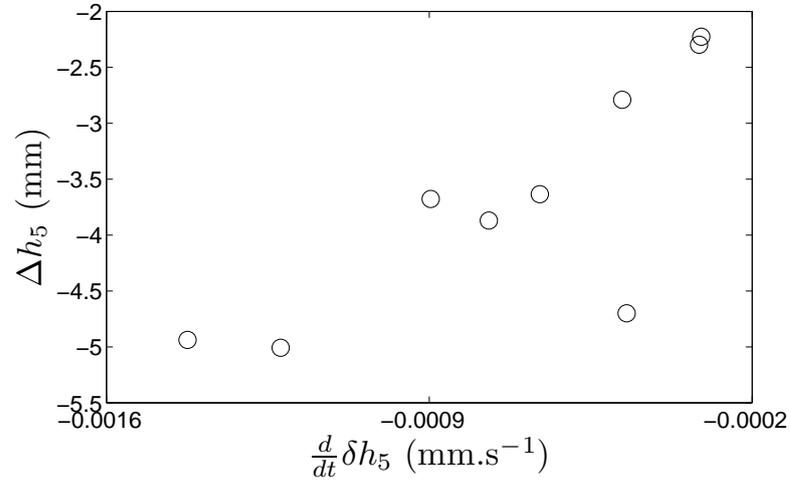


FIGURE 2.21 – Déplacement de la surface libre Δh_5 après 4000 cycles thermiques en fonction de la vitesse de compaction avant l'application des cycles thermiques $\frac{d\delta h_5}{dt}$

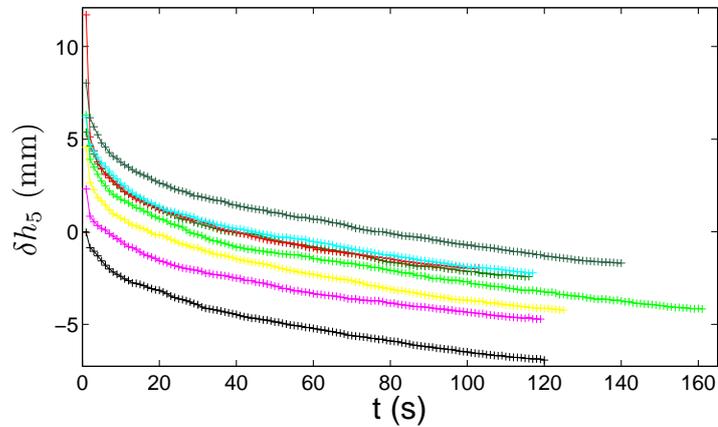


FIGURE 2.22 – Hauteur relative de la surface libre δh_5 en fonction du temps en secondes lors de l'application des secousses électromagnétiques préalables aux cyclages thermiques. La couleur de la courbe de compaction de chacune des expériences est identique lors des secousses mécaniques (Fig. 2.22) et des cycles thermiques (Fig. 2.23)

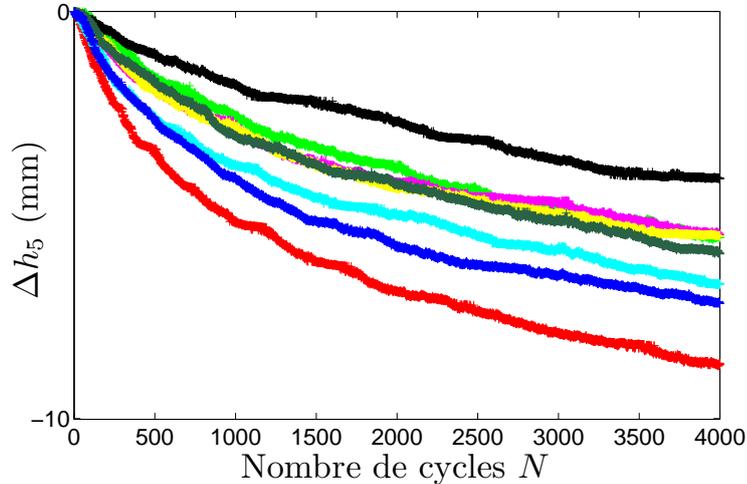


FIGURE 2.23 – 10 courbes de compaction pour une colonne soumise à des cycles de température d’amplitude $\Delta T = 7.6^{\circ}C$ et de fréquence $f = 0.1Hz$ déclenchés à la même valeur de la susceptibilité aux secousses mécaniques, représentant l’effondrement relatif de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycle N . La couleur de la courbe de compaction de chacune des expériences est identique lors des secousses mécaniques (Fig. 2.22) et des cycles thermiques (Fig. 2.23)

(Fig.2.25) que la compaction thermique respecte une dynamique proche d’une loi en $\frac{1}{\ln N}$. La courbe de compaction par cyclage thermique est similaire à celle de la compaction induite par secousses mécaniques. Elle résulte donc certainement d’un mécanisme comparable. La caractéristique principale de cette dynamique de compaction est son extrême lenteur (une variation de compacité de 0.003 est obtenue après 12000 cycles thermiques). Effectuer des changements de température constitue donc une méthode de sollicitation extrêmement douce.

2.2.5 Bilan

Il est bon ici de récapituler les premiers enseignements de ces expériences et de rappeler la question à laquelle nous essayons de répondre.

Nous avons appris que :

- Les perturbations mécaniques imposées par le fil sont responsables d’une partie de la compaction du matériau granulaire. En testant dif-

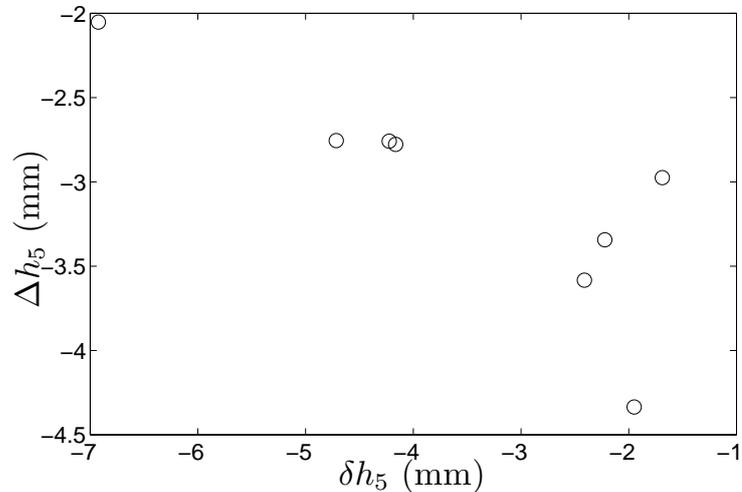


FIGURE 2.24 – Déplacement de la surface libre Δh_5 après 1000 cycles thermiques en fonction de la hauteur relative δh_5 juste avant l'application des cycles

férentes conditions mécaniques appliquées au fil, nous avons mis en évidence une manière de nous affranchir du cisaillement induit par ce dernier.

- Appliquer des cycles de température au matériau granulaire uniquement (le récipient n'est pas chauffé) engendre sa compaction. La dynamique d'évolution de la compacité d'une colonne de grains évolue proportionnellement à l'inverse du logarithme du nombre de cycle. Les variations de compacité observées après plus de 10000 cycles thermiques sont de moins de 1% pour des colonnes de compacité initiale valant approximativement 60.4%. Pour comparaison, la compacité maximale de l'empilement obtenue après tapping manuel est de 62.7%
- Le matériau granulaire est extrêmement sensible à l'histoire de ses perturbations. Nous considérons que cette sensibilité est une manifestation de la texturation de l'empilement sous l'application des cycles de température. Cette texture dépend plutôt du nombre de cycles appliqués que de la compacité absolue du matériau. De plus elle est très sensible à une perturbation mécanique.
- Le matériau granulaire se compacte plus rapidement pour des cycles de température de grande amplitude.

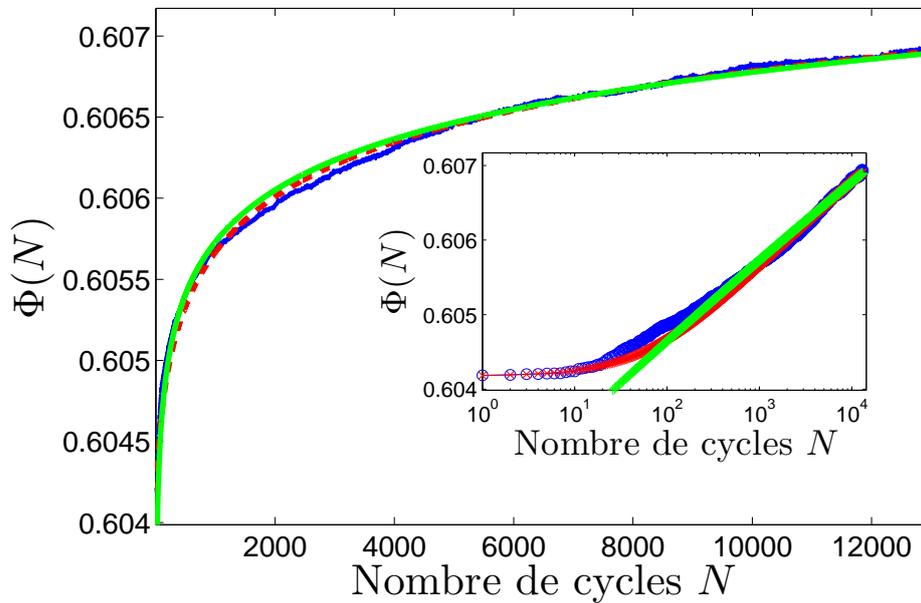


FIGURE 2.25 – Compacité de l’empilement en fonction du nombre de cycles thermiques pour une colonne soumise à des cycles de température d’amplitude $\Delta T=7.6^\circ\text{C}$ et de fréquence $f=0.1\text{Hz}$ amenée à la compacité initiale par secousses mécaniques (en bleu). Deux courbes maîtresses sont ajustées aux points expérimentaux (en rouge une fonction variant en $\frac{1}{\ln N}$, en vert une exponentielle étirée [Encadré : Les points expérimentaux et les courbes maîtresses en échelle lin log])

On veut connaître qui du gradient thermique et/ou de la température homogène provoque la compaction de la colonne de grains. Les résultats précédents montrent que l’effet recherché est masqué par la grande dispersion des mesures pour des conditions expérimentales similaires. Pour contourner cette difficulté nous allons solliciter la même colonne de grains avec des perturbations cycliques variant au cours de la même expérience. On s’affranchit ainsi des conditions initiales très variables lors de la préparation de la colonne.

2.3 Réponses

2.3.1 Réponse à un changement d'amplitude

Nous soumettons une même colonne de grains à des cycles de température dont l'amplitude est variée par paliers successifs, d'abord augmentée puis ramenée à l'amplitude initiale. Nous observons la réponse du système à ces changements de conditions de chauffage. Compte tenu de la durée de l'expérience (50 000 cycles), nous travaillons à la fréquence la plus élevée 0.1Hz. L'expérience dure 6 jours. Le fil est tendu à chaud afin de limiter l'influence des perturbations mécaniques sur la compaction du système. On sonde la compaction d'une colonne sous l'effet des cycles de température intrinsèques au matériau granulaire.

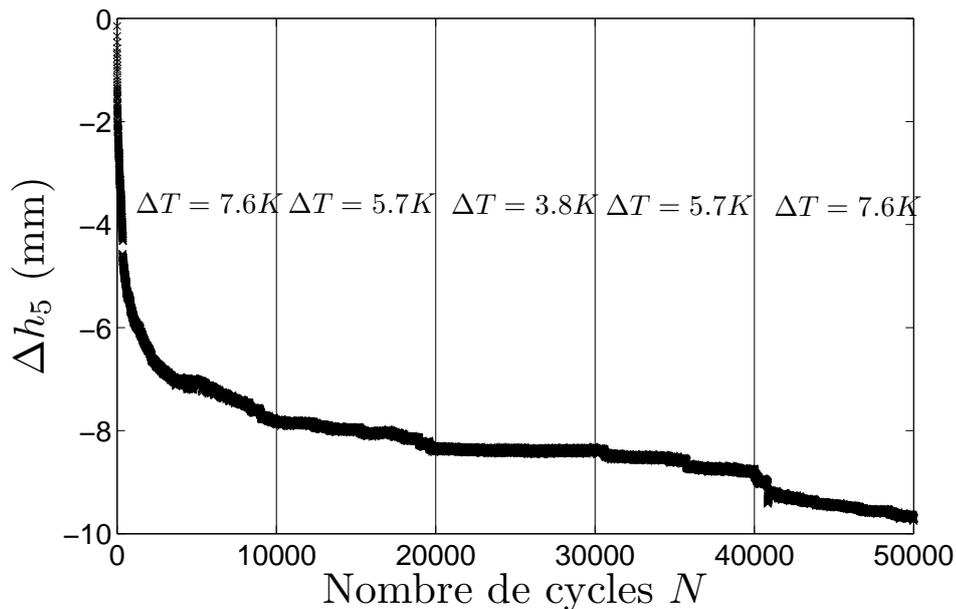


FIGURE 2.26 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N . Tous les 10 000 cycles l'amplitude des cycles de température est changée à fréquence constante $f=0.1\text{Hz}$

On observe sur la figure 2.26 que des cycles de température de plus grande amplitude conduisent à une vitesse de compaction plus élevée. Ce résultat est en accord avec les résultats présents dans la littérature [17, 28] lorsque le matériau granulaire et son récipient sont tous deux soumis à des cycles

de température. De plus, on note que pour une amplitude de cycle de température inférieure à environ 4 degrés, la compaction s'arrête. Bien qu'une comparaison *stricto sensu* ne soit pas possible compte tenu des différences entre les systèmes considérés, cette transition entre mouvement et arrêt à amplitude de température finie fait écho à la température critique observée par Divoux [26] entre compaction continue et compaction intermittente d'une part, et à la température critique observée lors de l'étude d'un système frictionnel modèle sur un plan incliné d'autre part [9](Chapitre III).

2.3.2 Réponse à un changement de fréquence

Une étude similaire peut être menée en fréquence. En se plaçant dans des conditions similaires à celles de l'expérience précédente, on perturbe le système en changeant soudainement la fréquence des cycles de température. Un soin particulier est pris pour ajuster l'amplitude des cycles d'intensité afin de conserver une amplitude des cycles de température constante quelle que soit la fréquence. Ce réglage nous permet de sonder le rôle de la fréquence des cycles sur l'efficacité de la compaction granulaire en gardant les effets mécaniques résiduels constants.

On observe sur la figure 2.27 que la diminution brutale de la fréquence conduit à une diminution brutale de la vitesse d'écoulement et que, réciproquement, une augmentation de la fréquence conduit à une augmentation de la vitesse de fluage. Rappelons tout de même que l'effet que l'on cherche à mesurer est faible. C'est ce que nous ont enseigné les expériences préliminaires présentées précédemment. Ici la principale difficulté réside dans la forme naturelle de la courbe de compaction. Sa courbure masque les possibles changements de pente. Outre cela, nous avons vu le rôle crucial joué par la texturation. Il est possible ici que ce que nous observons ne soient que les effets d'un régime transitoire ou alors extrêmement dépendant de l'enchaînement des sollicitations appliquées au matériau granulaire [39]. La persistance du changement de pente sur 5000 cycles nous conforte cependant dans l'idée que nous sommes dans un régime de compaction établi. Quant à la deuxième interrogation, il serait nécessaire de tester la robustesse de ce résultat en changeant l'histoire des sollicitations appliquées à la colonne.

Dans ces conditions, cette expérience permet d'affirmer qu'une augmentation de la fréquence des cycles de température améliore l'efficacité de la compaction. Ce résultat confirme donc que le cisaillement est responsable de la déstabilisation de la colonne de grains.

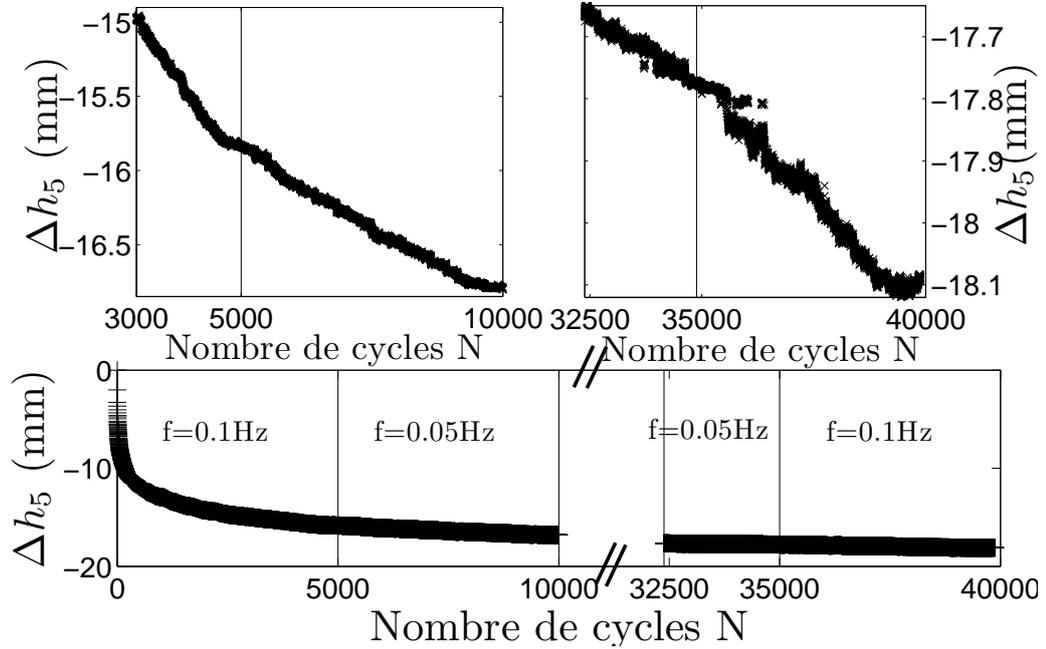


FIGURE 2.27 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N pour différentes fréquences et pour une amplitude des cycles de température constante de 7.6°C .

2.3.3 Dynamique à différentes hauteurs

La dernière question à laquelle nous aimerions répondre est celle de la dynamique de compaction à différentes hauteurs dans la colonne. Jusqu'à présent nous avons regardé uniquement le niveau de la surface libre. Nous allons mesurer maintenant les déplacements à 5 hauteurs différentes. La résolution temporelle de la mesure est limitée par le temps d'enregistrement des photographies prises aux 5 hauteurs. Une image ne peut être prise et enregistrée en moins de 3 secondes. Nous travaillerons donc à une fréquence de 0.02Hz pour prendre une image à chaque hauteur à chaque cycle. Nous présentons 2 expériences : une sans dilatation du fil (Fig. 2.29) et une pour le fil sans tension initiale (Fig. 2.28).

On remarque tout d'abord que la taille des sauts dans les deux expériences est très différente. Dans un cas, leur taille typique est de quelques centaines de microns, alors que dans l'autre cas, la taille des sauts est de 10 microns, tout juste détectable pour la résolution de notre méthode de mesure (la compaction s'apparente dans ce cas à une compaction continue). Nous remarquons sur plusieurs expériences que la dynamique par "saut" correspond

à une compaction proportionnelle à la hauteur. Cela signifierait alors que le matériau se compacte de manière homogène tout au long de la colonne. Dans le cas d'une dynamique de compaction continue, la surface libre se compacte bien plus rapidement à la surface libre qu'aux autres hauteurs. Ni la compacité initiale, ni la préparation initiale du système, ni les conditions de tension du fil, ni la taille des grains, ni l'amplitude ou la fréquence des cycles de température ne contrôlent cette caractéristique de la dynamique. En effet, dans des conditions expérimentales similaires, nous observons aussi bien un régime ou l'autre. Cette différence qualitative entre ces deux types d'écoulement reste donc inexplicée. Nous pensons que l'écoulement continu est associé à un matériau "ancien" et l'écoulement par saut à un matériau "jeune". En effet, les "vieux" échantillons sont constitués de billes moins rugueuses et "pollués" par de petites particules (jouant ensuite le rôle de lubrifiant pour les contacts solides) apparaissant par abrasion [7, 69].

Au delà de cette différence, le point commun frappant entre ces deux dynamiques de compaction est la corrélation des événements de glissements à différentes hauteurs. Plus précisément la colonne se compacte par sauts et ces sauts sont simultanés à l'échelle d'un cycle. La dynamique intermittente observée jusqu'à lors à la surface libre uniquement n'est pas due à la remontée progressive de bulles de densité. Dans une colonne de grains stable de rapport d'aspect similaire, il peut y avoir des variations de compacité de l'ordre de 2% [7]. Les zones de faibles densité constituent ce qu'on dénomme des bulles de densité. Dans notre expérience, on voit remonter ces bulles lors de la décompaction de la colonne de grains par injection d'air comprimé. Il est donc très peu probable que la colonne soit préparée dans un état de compacité homogène. Dans ce cas, les zones de faible densité se déstabiliseraient préférentiellement, conduisant à l'augmentation de la compacité de la colonne dans cette zone mais diminuant la compacité de la zone située immédiatement au dessus de la zone effondrée. La simultanéité des effondrements infirme cette hypothèse. Un réarrangement à un endroit de la colonne engendre une réorganisation de tout l'empilement.

2.4 Discussions et perspectives

2.4.1 Discussion des résultats

L'étude du fluage d'une colonne de matériau granulaire soumise à des cycles de température nous a permis de mettre en lumière plusieurs points concernant l'effet des variations de température sur les empilements granulaires.

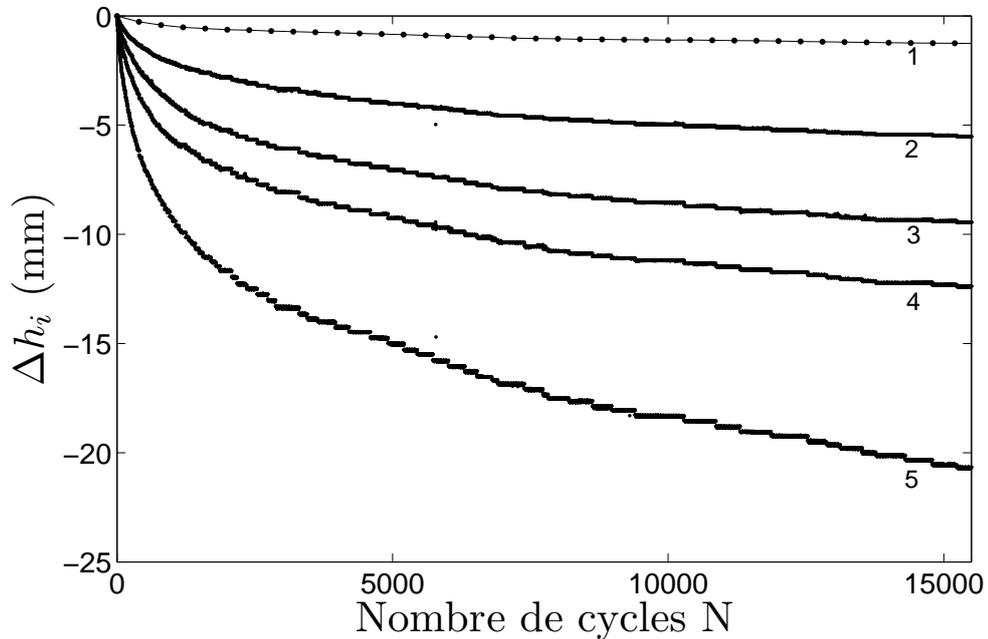


FIGURE 2.28 – Déplacement des grains aux différentes hauteurs Δh_i en fonction du nombre de cycles N . La fréquence et l'amplitude des cycles sont respectivement de 0.02Hz et de 10°C . Le fil est lâche.

Tout d'abord, nous avons pris soin de minimiser les perturbations mécaniques engendrées par le récipient. On a ainsi pu étudier la compaction des grains sous la seule influence de leurs dilatations. Le premier résultat marquant est que la colonne se compacte également dans ces conditions.

De plus, nous trouvons que la loi de compaction s'apparente à une loi d'évolution proportionnelle au logarithme du nombre de cycles N mettant en lumière le rôle crucial de la frustration géométrique dans ce type de compaction. Nous avons également montré que la dynamique de compaction du système dépend de l'histoire des sollicitations. Le matériau se texture sous l'application des cycles de température et la seule donnée de la compacité ne suffit pas à définir son état. Le matériau vieillit.

Par ailleurs, nous observons deux types de compaction très différents : une compaction presque continue (des sauts de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$ sont observés) ou une compaction par sauts (la taille typique des sauts est de quelques centaines de microns). Dans les deux cas, ces événements de glissement sont observés simultanément à différentes hauteurs de la colonne (à la résolution

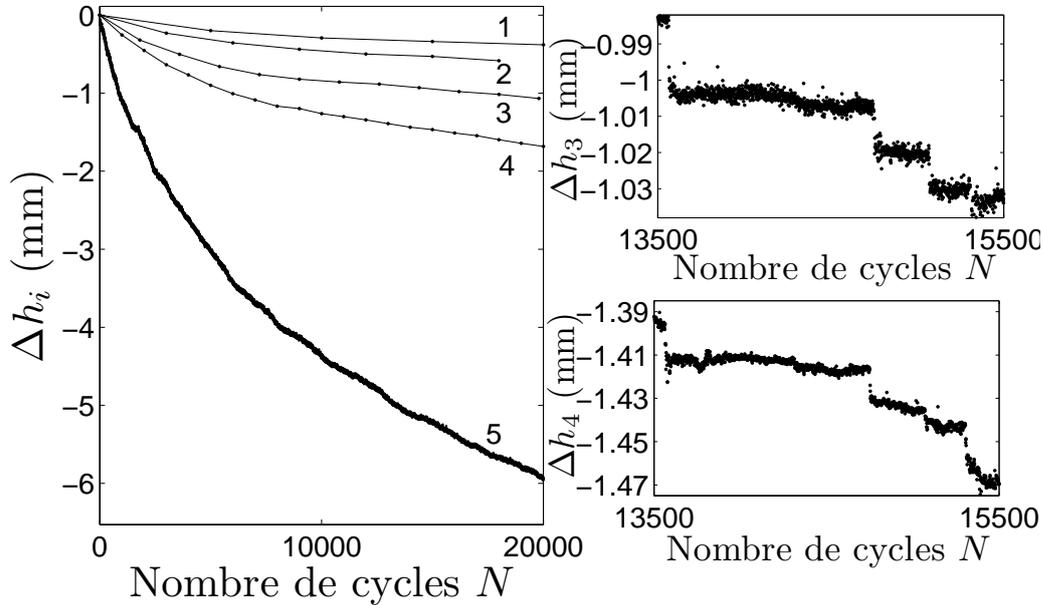


FIGURE 2.29 – Déplacement des grains aux différentes hauteurs Δh_i en fonction du nombre de cycle N . La fréquence et l’amplitude des cycles sont respectivement de 0.02Hz et de 10°C. Le fil est tendu.

temporelle d’un cycle thermique). La dynamique intermittente observée à la surface libre dans les expériences précédentes est donc observée de manière analogue dans l’ensemble de la hauteur de la colonne. Par conséquent, cette observation rejette le scénario expliquant la dynamique intermittente par la remontée de bulles de densité émergeant à la surface libre. De plus, on observe que lorsque la compaction est continue, les déplacements enregistrés aux différentes hauteurs ne sont pas proportionnels à celles ci, la surface libre se compactant bien plus rapidement que le reste du matériau dans le volume. En comparaison, lorsque la compaction suit une dynamique intermittente, la compaction de la colonne est homogène. Il reste cependant que les conditions d’observation d’un régime intermittent ou d’un régime continu ne sont pas clairement identifiées. Aucun des paramètres suivants : la taille des grains, la compacité initiale, la fréquence ou l’amplitude des cycles de température, la préparation initiale du système, les conditions de tension du fil, n’ont pu expliquer cette différence de comportement. Nous pensons que le changement de comportement est dû à l’usure des grains qui sont soumis à l’abrasion au cours de la préparation de la condition initiale et des expériences. Les échan-

tillons "vieux" sont constitués de billes moins rugueuses et contiennent des petites particules résultant de l'abrasion des grains, changeant les propriétés frictionnelles du matériau granulaire. Cette hypothèse reste à vérifier.

En outre, nous confirmons la caractéristique établie dans la communauté qu'une amplitude de cycles de température élevée rend la compaction plus efficace. Une transition entre écoulement et arrêt pour une amplitude finie des cycles de température est même observée.

Quant à l'influence de la fréquence, nos résultats montrent qu'une augmentation de la fréquence améliore l'efficacité de la compaction en accord avec le scénario proposé par Divoux [26]. Rappelons ce raisonnement ici. Le gradient thermique typique appliqué est donné par $\frac{\Delta T}{l_p} = \frac{\Delta T \sqrt{\omega}}{\sqrt{D}}$. Cela implique un déplacement différentiel sur la taille d'un grain de diamètre d de l'ordre de $\kappa_g d^2 \frac{\Delta T}{l_p}$. Pour une fréquence de 0.01 Hz, une différence de température d'un degré et un diamètre de grains de $500 \mu\text{m}$, on trouve un déplacement typique de l'ordre de 2nm. Ce déplacement est comparable à la taille d'une petite aspérité [2] (la taille maximale d'une aspérité est de l'ordre de 50nm, mais la taille des rugosités est distribuée). Ainsi la compaction de la colonne serait due à la reptation d'une aspérité à l'autre des grains en contact. Une expérience qualitative supplémentaire permet de confirmer ce mécanisme. On étudie pour le même protocole expérimental (fil tendu à chaud, compacité initiale, amplitude et fréquence des cycles d'intensité égales) la dynamique de compaction de la colonne pour 2 tailles de grains différentes ($d_1=250\text{-}400 \mu\text{m}$, $d_2=425\text{-}600 \mu\text{m}$) (Fig. 2.30). On observe que les grains de plus petit diamètre ne bougent pas. On en déduit que la dilatation de longueur occasionnée par le gradient thermique sur la taille d'un grain devient plus petite que la longueur typique d'une aspérité.

2.4.2 Perspectives

La dynamique de compaction de la colonne de grains soulève encore de nombreuses questions auxquelles nous aimerions répondre.

Nous avons montré que la loi de compaction intrinsèque des matériaux granulaires soumis à des cycles de température varie avec l'inverse du logarithme du nombre de perturbations. Nous aimerions comme pour la compaction par secousses mécaniques [43] relier les valeurs de paramètres libres de la courbe d'interpolation à la fréquence et à l'amplitude des cycles thermiques. Pour augmenter l'effet observé et noyer le large bruit des mesures dû à la préparation initiale et incontrôlable du système, nous voulons utiliser un fil

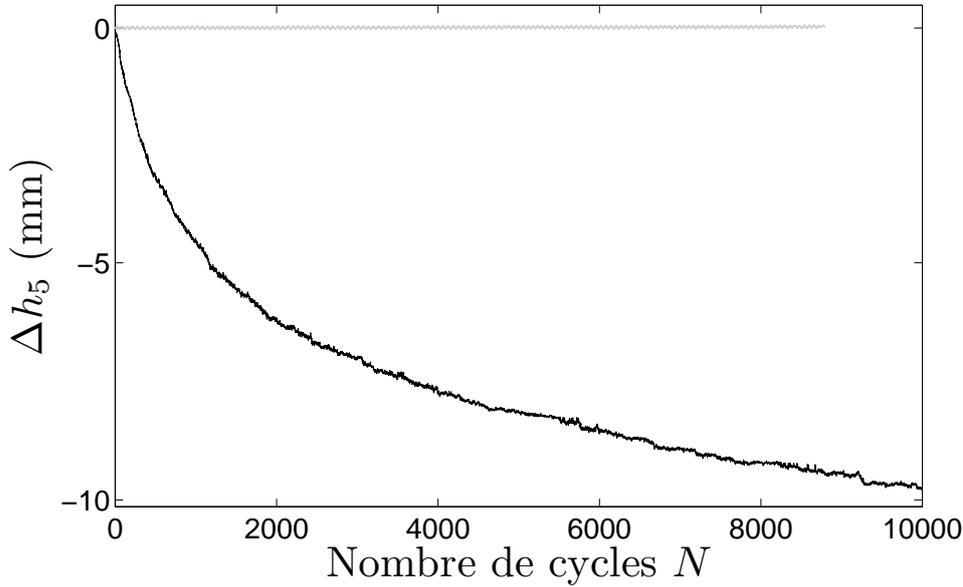


FIGURE 2.30 – Déplacement de la surface libre Δh_5 en fonction du nombre de cycles N pour des grains de diamètre $d_1=250-400 \mu\text{m}$ (en gris) et $d_2=425-600 \mu\text{m}$ (en noir). L'amplitude ($I_1=0.9\text{A}$) et la fréquence ($f=0.1\text{Hz}$) des cycles d'intensité sont les mêmes. La compacité initiale est également la même.

résistif ($R \sim 10\Omega$). Cela nous permettra de garder la plus value de ce système qui permet de minimiser les effets mécaniques induits par le fil grâce à sa mise sous tension tout en augmentant les effets de la compaction thermique.

Nous avons observé que les effets de la fréquence sont très peu marqués sur la colonne. L'une des raisons avancées est la compétition entre deux effets déstabilisants. Le cisaillement est certes un moteur de la compaction mais les respirations thermiques peuvent elles aussi induire le mouvement des grains par des variations de la pression de confinement. Afin de s'affranchir des variations cycliques de pression de confinement, il est envisagé d'étudier le lent mouvement d'une couche de grains sur un plan incliné. Dans ce dispositif, la contrainte normale ne dépend plus des cycles de température, puisqu'elle se réduit au poids de la couche de grains. On peut ainsi étudier l'effet propre du cisaillement sur la stabilité d'un empilement granulaire. A cette occasion, nous pourrions utiliser ce dispositif de plan incliné pour regarder comment le matériau granulaire flue sous un cyclage thermique appliqué à sa surface libre. On contrôle par l'angle que fait le plan incliné avec l'horizontale, la

criticalité de la couche de grains. Une lampe suffirait à créer des variations de température [10] sans induire de dilatation du récipient. Pour de fortes variations de température, on s'attend à trouver des résultats comparables à ceux mis en évidence lorsque ce même système est perturbé par des vibrations mécaniques [36]. La très douce sollicitation thermique nous permettrait également d'observer les réarrangements précurseurs à l'avalanche.

Chapitre 3

Un système modèle pour étudier l'influence des variations de température sur une assemblée de grains frictionnels

Sommaire

3.1	De l'expérience au modèle	68
3.2	Détails du modèle	70
3.2.1	Modélisation des effets de la dilatation thermique .	70
3.2.2	Réaction frictionnelle du support	72
3.2.3	Equations mécaniques régissant la dynamique d'un réarrangement interne	73
3.2.4	Adimensionnement des équations différentielles régissant le mouvement et procédure numérique . . .	74
3.3	Le système constitué de 2 blocs	75
3.3.1	Système déterministe	75
3.3.2	Introduction du bruit	79
3.4	Augmentation de la taille du système	85
3.4.1	Etude du cas à 3 blocs	85
3.4.2	Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs	89
3.5	Discussion	95
3.5.1	Reptation d'un solide frictionnel	95
3.5.2	Quel est l'intérêt de notre modèle ?	98
3.6	Remarques	98

3.6.1	Sur la modélisation des effets de la température . . .	98
3.6.2	Sur le choix de la loi de friction	99

3.1 De l'expérience au modèle

Le système expérimental présenté dans la première partie de ce manuscrit montre qu'un matériau granulaire est sensible à des variations de sa température. Les dilatations engendrées sont en effet capables de déplacer les grains sur une distance de l'ordre de la taille des rugosités de leurs surfaces. On peut aussi raisonner en terme de force pour expliquer la déstabilisation du système suite à une variation de température. Supposons que deux grains de rayon R reposent sur un support plan (Fig. 3.1). A température ambiante ces deux grains sont en contact ponctuel. Lors d'un accroissement de la température, les grains s'interpénètrent et appliquent l'un sur l'autre une force élastique. La zone de contact lors d'un accroissement r du rayon R des billes

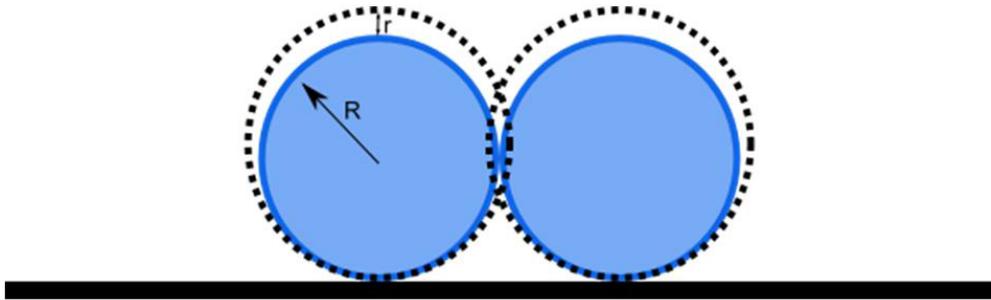


FIGURE 3.1 – Deux billes en interaction mutuelle par le contact de Hertz reposant sur un support frictionnel

est approximativement rR . Ainsi la force élastique qu'applique une bille sur sa voisine est de l'ordre de $YrR\frac{r}{R}$, Y étant le module d'Young du matériau. Pour conduire au déplacement d'une des billes, cette force doit dépasser la force de friction solide $\mu_s\rho R^3g$ avec ρ la masse volumique des grains utilisés. Ainsi, il y a glissement si :

$$Y \times rR \times \frac{r}{R} \sim \mu_s\rho R^3g$$

soit,

$$\frac{r}{R} \sim \left(\frac{\mu_s\rho Rg}{Y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut estimer le rapport $\frac{r}{R}$ en considérant le coefficient de dilatation thermique et la variation de température ΔT . On a $\kappa\Delta T = \frac{r}{R}$. Alors la variation de température suffisante pour induire le glissement d'une bille est de l'ordre de :

$$\Delta T = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu_s \rho R g}{Y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En considérant les ordres de grandeur des paramètres, on obtient :

$$\Delta T \sim 1K$$

pour $R \sim 500\mu\text{m}$, $Y \sim 10^{11}\text{Pa}$, $\mu_s \sim 1$, $\rho \sim 2000\text{kg.m}^{-3}$ et $\kappa \sim 10^{-5}\text{K}^{-1}$.

Avec ce raisonnement extrêmement simpliste, on trouve qu'une variation de la température des grains de quelques degrés suffit à déstabiliser un grain frictionnel. Une vision encore plus schématique de ce raisonnement consiste à remplacer les billes par des blocs solides (Fig. 3.2). L'élasticité du matériau peut être modélisée par un ressort reliant ces deux blocs solides. L'effet de la température sur ce système est prise en compte par une variation linéaire de la longueur à vide du ressort avec la température [32]. Sous l'effet de

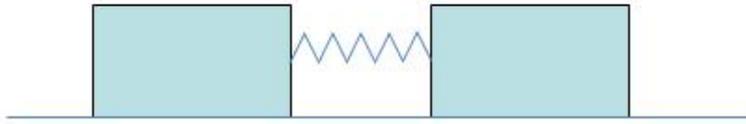


FIGURE 3.2 – Schéma simplifié du système étudié : les billes sont remplacées par des blocs

l'application répétée de cycles de température, on s'attend par symétrie à ce que le mouvement du centre de masse de ce système soit nul. Les deux blocs solides vont s'éloigner lors d'une dilatation, puis se rapprocher à nouveau lors de la contraction suivante. Pour créer un mouvement d'ensemble du système (et briser sa symétrie), le substrat doit être incliné par rapport à l'horizontale. On s'attend ainsi à ce que le système se déplace dans le sens de la pente. C'est ce qu'il se passe également pour la colonne de grains : il y a compaction dans le sens de la gravité.

Ce système constitué de 2 blocs solides frictionnels reliés par un ressort dont la longueur à vide dépend de la température et reposant sur un plan incliné possède les ingrédients physiques minimaux du système expérimental

de la colonne de grains chauffés cycliquement. En effet, l'élasticité des grains est prise en compte par le ressort reliant les blocs solides, leur dilatation thermique, par la dépendance avec la température de la longueur à vide des ressorts, la friction des grains sur des zones de contact plus petites que leur surface caractéristique (le carré de leur diamètre) par la friction d'un nombre fini de blocs avec le plan incliné. Enfin dans les deux cas, la gravité est le moteur de la compaction. Nous nous intéressons donc dans la suite de ce chapitre à une généralisation de ce modèle à un système constitué de N blocs.

3.2 Détails du modèle

Le système d'étude, de masse totale M , est composé de N blocs ponctuels de masse identique $m = \frac{M}{N}$ (Fig. 3.3). Ils sont reliés à leurs voisins par des ressorts de masse nulle, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 à la température T_0 . Chacun de ces blocs est soumis aux forces élastiques des 2 ressorts voisins, à son poids mg (g étant l'accélération de la pesanteur) et à la réaction du plan incliné sur lequel ils sont posés. Ce plan incliné fait un angle α avec l'horizontale.

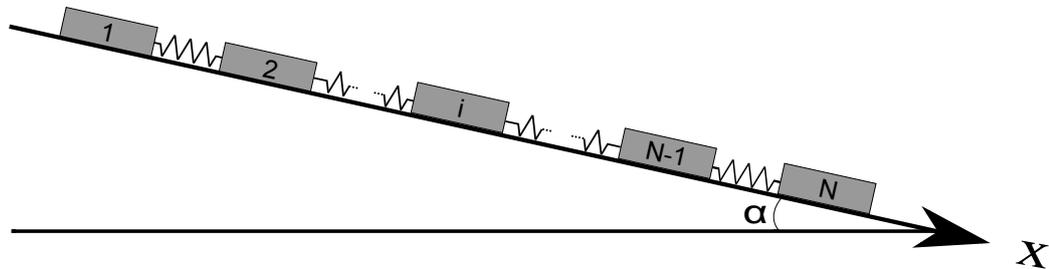


FIGURE 3.3 – Schéma du système étudié

3.2.1 Modélisation des effets de la dilatation thermique

Afin de tenir compte de la dilatation thermique des grains, nous supposons que la longueur à vide du ressort l varie linéairement avec la température. Ainsi $l(T) = l_0[1 + \kappa(T - T_0)]$ où κ représente le coefficient de dilatation thermique du matériau considéré et l_0 la longueur à vide du ressort à la

température T_0 . La force élastique induite par le bloc $n+1$ sur le bloc n à la température T est

$$f_{n+1 \rightarrow n} = -k[x_n - x_{n+1} + l(T)] \quad (3.1)$$

Il est également nécessaire de savoir comment évolue la température du système. Il est intéressant de remarquer que le temps typique d'un réarrangement interne est très petit devant le temps typique des variations de température. En effet, un réarrangement mécanique correspondant à la relaxation de la contrainte élastique appliquée sur un bloc est la phase de glissement d'un mouvement de "stick slip". Cette phase de glissement est une demi sinusoïde de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, la période propre de l'oscillateur masse ressort de masse m et de constante de raideur $2k$. Le temps dynamique τ_{dyn} de ce réarrangement est le temps typique nécessaire à une onde sonore pour se propager entre 2 blocs. τ_{dyn} est majoré par le temps de propagation de l'onde sur la longueur du matériau. Autrement dit $\tau_{dyn} < \frac{L}{c_s}$ avec c_s la vitesse des ondes sonores longitudinales dans le solide considéré.

Quant aux variations de température du système, elles ne peuvent pas être plus rapides que le temps caractéristique de la relaxation de la température dans le système. La température de chaque bloc change significativement si les variations de température du milieu environnant ont une durée typique τ_{th} de l'ordre de $\frac{C_v L^2}{\lambda}$, C_v et λ étant respectivement la capacité calorifique volumique et la conductivité thermique du matériau.

Concrètement, pour un solide de taille L allant du millimètre au centimètre, le temps thermique τ_{th} va, en ordre de grandeur, de la fraction de seconde à quelques minutes, alors que le temps de réarrangement interne peut être estimé à $\tau_{dyn} \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ s. On peut donc considérer que la température du système est constante pendant la durée d'un réarrangement mécanique. Cela signifie que les échelles temporelles d'évolution de la température τ_{th} et de la position des blocs τ_{dyn} sont décorrélées. Ainsi, seules les valeurs extrêmes de la température choisies tous les temps thermiques τ_{th} importent. Dans la suite, on choisit 2 types de sollicitations thermiques :

- Soit la température oscillera périodiquement avec une période de $2\tau_{th}$ provoquant une dilatation oscillant à la même période entre $-A_\theta$ et A_θ .
- Soit la température sera choisie aléatoirement à chaque temps thermique en suivant une loi de probabilité gaussienne conduisant à une

dilatation aléatoire tirée selon la distribution suivante

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \quad (3.2)$$

où σ_θ représente l'ordre de grandeur typique d'une dilatation thermique.

3.2.2 Réaction frictionnelle du support

La force exercée par le plan incliné sur un bloc possède une composante tangentielle et une composante normale au plan de contact. La composante normale compense la composante normale du poids du bloc, $mg \cos \alpha$. La composante tangentielle est donnée par les lois d'Amontons Coulomb, c'est-à-dire :

- quand le bloc i est à l'arrêt, il faut que la résultante des forces tangentielles qui s'exercent sur lui ne dépasse pas en valeur absolue le seuil de friction $\mu_{s,i} mg \cos \alpha$ nécessaire à la mise en mouvement du bloc i . Le coefficient de friction statique $\mu_{s,i}$ caractérise les forces de contact entre le plan incliné et le bloc i . La condition de vitesse nulle nous permet de savoir que la position du bloc i ne change pas. Nous ne disposons *a priori* que d'un encadrement de la force de friction. La valeur de la composante horizontale de la réaction du support est donnée par la condition que la somme des forces appliquées au bloc i à l'arrêt est nulle.
- quand le bloc i se déplace relativement à son support, la force qui s'oppose à son mouvement caractérise le taux moyen de dissipation d'énergie due au glissement des 2 surfaces en regard. Elle est donnée par $f_{d,i} = -\mu_d mg \cos \alpha S(\dot{x}_i)$, où \dot{x}_i est la vitesse du bloc i et S désigne la fonction signe [$S(u) = 1$ si $u > 0$ et $S(u) = -1$ si $u < 0$]. L'expression de cette force permet de déduire la trajectoire du bloc par la résolution de l'équation différentielle régissant le mouvement.

Nous supposons dans la suite que le coefficient de friction statique $\mu_{s,i}$ caractérisant le contact entre le plan incliné et le bloc i prend à chaque arrêt une nouvelle valeur avec une probabilité donnée par une distribution $p(\mu_s)$. Ceci nous permet de modéliser l'hétérogénéité des propriétés de la surface de contact [5, 33]. En revanche, le coefficient de friction μ_d sera considéré comme constant. En effet, lors de son mouvement, le bloc explore une large surface de contact. Les fluctuations occasionnées par les hétérogénéités de surface

sont donc moyennées sur la longueur de glissement. On veillera cependant à choisir, conformément aux observations expérimentales, le coefficient de friction statique $\mu_{s,i}$ plus grand que le coefficient de friction statique μ_d . Concrètement, dans l'étude qui va suivre, nous allons choisir des valeurs de μ_s suivant une distribution gaussienne $p(\mu_s)$:

$$p(\mu_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left[-\frac{(\mu_s - \bar{\mu}_s)^2}{2\sigma_\mu^2}\right]$$

où $\bar{\mu}_s$ et σ_μ sont respectivement la valeur moyenne et l'écart type de la distribution (on s'assurera que $\sigma_\mu \ll (\bar{\mu}_s - \mu_d)$ pour qu'en pratique μ_s reste toujours plus grand que μ_d). Cette distribution standard nous permettra de discuter quantitativement quelques résultats. De plus, on pourra se rendre compte de l'apport de cette variabilité sur les caractéristiques du système en comparant ces résultats avec ceux obtenus pour μ_s constant.

3.2.3 Equations mécaniques régissant la dynamique d'un réarrangement interne

Un bloc i ($i=1,N$) commence à glisser si le rapport de la force tangentielle et de la force normale dépasse la valeur du coefficient de friction statique. Pour le système considéré, cette condition s'écrit :

$$|k(x_2 - x_1 - l_0(1 + \kappa(T - T_0)) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,1} mg \cos \alpha \quad (3.3)$$

$$|k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,i} mg \cos \alpha \quad (3.4)$$

$$|k(x_{N-1} - x_N + l_0(1 + \kappa(T - T_0)) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,N} mg \cos \alpha \quad (3.5)$$

Lorsque le bloc i ($i=1,N$) est en mouvement, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k[x_1 - x_2 + l_0(1 + \kappa(T - T_0))] \\ &\quad - \mu_d m g S(\dot{x}_1) \cos \alpha + m g \sin \alpha \quad (i = 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -k[2x_n - (x_{n+1} + x_{n-1})] \\ &\quad - \mu_d m g S(\dot{x}_n) \cos \alpha + m g \sin \alpha \quad (i \neq 1, N) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_N &= -k[x_N - x_{N-1} - l_0(1 + \kappa(T - T_0))] \\ &\quad - \mu_d m g S(\dot{x}_N) \cos \alpha + m g \sin \alpha \quad (i = N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2.4 Adimensionnement des équations différentielles régissant le mouvement et procédure numérique

Nous travaillerons dans la suite du manuscrit avec des variables adimensionnées. Le temps caractéristique d'un système masse ressort $\tau_{dyn} = (\frac{m}{k})^{1/2}$ apparaît naturellement dans ces équations. Rappelons qu'à cette échelle, la température est supposée constante. En adimensionnant l'échelle de temps par cette quantité ainsi que la longueur par $\frac{mg}{k}$, et en introduisant la dilatation $\theta = \kappa(T - T_0)$, on obtient le système d'équations adimensionnées suivant. La condition pour que le patin i se mette en mouvement s'écrit maintenant :

$$|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - (1 + \theta)\tilde{l}_0 + \sin \alpha| > \mu_{s,1} \cos \alpha \quad (i = 1) \quad (3.9)$$

$$|\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i-1} - 2\tilde{x}_i + \sin \alpha| > \mu_{s,i} \cos \alpha \quad (i \neq 1, N) \quad (3.10)$$

$$|\tilde{x}_{N-1} - \tilde{x}_N + (1 + \theta)\tilde{l}_0 + \sin \alpha| > \mu_{s,N} \cos \alpha \quad (i = N) \quad (3.11)$$

Les équations du mouvement lorsque le patin i bouge sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_1 &= -[\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + (1 + \theta)\tilde{l}_0] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_1) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = 1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_i &= -[2\tilde{x}_i - (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i-1})] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_i) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i \neq 1, N) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_N &= -[\tilde{x}_N - \tilde{x}_{N-1} - (1 + \theta)\tilde{l}_0] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_N) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = N) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour résoudre ce système d'équations, la méthode numérique employée est la suivante. Tout d'abord, on dira que lorsqu'un bloc passe de l'arrêt au mouvement et réciproquement, on dit qu'il "change d'état". On décrit la procédure à partir d'un système stable à la fin de la dilatation thermique θ_q au temps thermique $t_q = q\tau_{th}$. Au cours de cette dilatation thermique, le système a connu k réarrangements. Les positions des patins i et les valeurs des coefficients de friction statique se notent respectivement x_i^k et $\mu_{s,i}^k$. Au temps thermique suivant t_{q+1} , on choisit aléatoirement une nouvelle valeur de la dilatation θ_{q+1} . On cherche la dilatation minimale qui rompt une des conditions de stabilité. C'est le réarrangement mécanique $k + 1$, ayant lieu à la dilatation θ^{k+1} , conduisant les blocs à de nouvelles positions stables x_i^{k+1} . Pour trouver ces nouvelles positions, on intègre numériquement les équations du mouvement avec un pas de temps $\Delta t \ll (\frac{m}{k})^{1/2}$, en utilisant l'algorithme Velocity Verlet [1]. Cet algorithme consiste à calculer les positions à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des positions, des vitesses et des accélérations à l'instant

t , puis à calculer les vitesses à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des vitesses à l'instant t et des accélérations aux instants t et $t + \Delta t$. A la fin de chaque pas de temps Δt , on vérifie d'une part que les blocs en mouvement n'ont pas déstabilisé leurs voisins et d'autre part que les blocs en mouvement ne s'arrêtent pas, c'est-à-dire qu'aucun des blocs ne "change d'état". Si pendant cet incrément de temps, un bloc "change d'état", on estime à partir de la valeur des vitesses et accélérations aux temps t et $t + \Delta t$, l'incrément de temps Δt_p ($\Delta t_p < \Delta t$) correspondant au "changement d'état" d'un bloc. La procédure numérique utilise alors exceptionnellement cet incrément de temps Δt_p pour l'intégration numérique des équations. Quand un bloc s'arrête, on choisit aléatoirement dans la distribution $p(\mu_s)$ une nouvelle valeur de μ_s . On répète cette procédure jusqu'à ce que tous les blocs soient à l'arrêt. Chaque bloc est alors à la position x_i^{k+1} et possède un coefficient de friction statique $\mu_{s,i}^{k+1}$. On cherche alors la nouvelle valeur de la dilatation θ^{k+2} pour laquelle un réarrangement mécanique a lieu, et par la même procédure on trouve la nouvelle configuration stable. Quand la dilatation θ^{j+1} nécessaire au prochain réarrangement $j + 1$ est au-delà de la valeur initialement choisie θ_{q+1} , on considère que les positions x_i^j et les coefficients de friction $\mu_{s,i}^j$ à la fin du précédent réarrangement correspondent aux positions et aux coefficients de friction à la fin du temps thermique t_{q+1} . On choisit alors aléatoirement une nouvelle valeur de la dilatation θ_{q+2} , et on répète la procédure précédemment exposée.

Par cette méthode on résout la dynamique interne des réarrangements. Par la suite, on s'intéressera toutefois principalement à la dynamique du système à l'échelle du temps thermique.

3.3 Le système constitué de 2 blocs

3.3.1 Système déterministe

On cherche à connaître le déplacement d'un système constitué de 2 blocs soumis à des cycles de température d'amplitude constante avec un coefficient de friction statique unique (Fig. 3.4).

Pour $\alpha = 0$, le système est symétrique donc le mouvement du centre de masse x_g est nul.

Pour $\alpha \neq 0$, lors d'une dilatation ($\theta > 0$) de la longueur à vide du ressort, le ressort est en compression. Le patin 1 subit une force élastique contraire à la gravité, alors que le patin 2 subit la force opposée s'ajoutant à la gravité. Les conditions de stabilité (3.9) et (3.11) s'écrivent :

$$-\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta) > \mu_s \cos \alpha + \sin \alpha \quad (3.15)$$

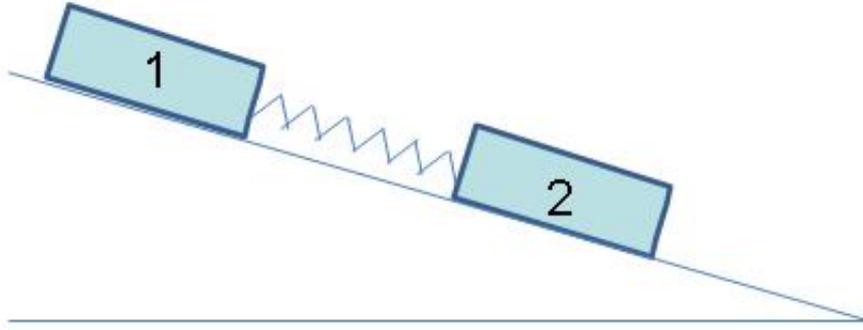


FIGURE 3.4 – Système de deux blocs sur un plan incliné

qui correspond à la condition de mise en mouvement du patin 1.

$$-\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta) > \mu_s \cos \alpha - \sin \alpha \quad (3.16)$$

qui correspond à la condition de mise en mouvement du patin 2

On voit que la pente introduit un biais systématique dans la condition de glissement. Le patin 2 subit une force élastique orientée dans le même sens que la force de gravité. Il glisse donc toujours en premier. La résolution de l'équation (3.16) nous permet de trouver la dilatation de décrochage θ_d pour laquelle le patin 2 perd sa stabilité.

$$\theta_d = \frac{\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - \tilde{l}_0)}{\tilde{l}_0} \quad (3.17)$$

L'équation du mouvement vérifiée par le patin 2 est

$$\ddot{\tilde{x}}_2 = -[\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - \tilde{l}_0(1 + \theta_d)] - \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$$

En supposant le bloc 1 stable (le mouvement du bloc 2 pourrait déstabiliser le bloc 1), la solution de cette équation différentielle est la somme d'un sinus et d'un cosinus de pulsation $\omega = 1$. Compte tenu des conditions initiales (la position initiale du bloc 2 vérifie la relation (3.17) et la vitesse initiale du patin 2 est nulle) on obtient pour la phase de glissement :

$$\tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta_d) - \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha + (\mu_d - \mu_s) \cos \alpha \cos(t)$$

La vitesse du bloc 2 s'annule après une demi oscillation. Supposons que le bloc 2 s'arrête définitivement. Il s'est donc déplacé de $\Delta\tilde{x}_2 = \tilde{x}_{2f} - \tilde{x}_{2i}$ donné par

$$\Delta\tilde{x}_2 = 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$$

Nous devons maintenant vérifier la validité des hypothèses avancées lors du calcul précédent.

- Le bloc 2 s'arrête définitivement à la première annulation de sa vitesse. Pour cela il suffit que, lorsque sa vitesse s'annule, la force qui s'exerce sur lui soit en valeur absolue inférieure au coefficient de friction dynamique. Par définition, la position initiale du bloc 2 vérifie la condition donnée par l'équation (3.17). Alors le bloc 2 repart vers le haut si $-2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha > 2 \sin \alpha$. Cette condition n'est jamais satisfaite. Le bloc 2 s'arrête après une demi oscillation.
- Le bloc 2 n'entraîne pas le bloc 1 dans sa chute. Autrement dit, la force élastique qui s'exerce sur le bloc 1 lorsque le bloc 2 s'arrête, doit être inférieure à $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$. Le ressort est comprimé d'une quantité $(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$ lorsque le mouvement du patin 2 s'initie. Comme le déplacement du bloc 2 est de $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$, la condition pour que le bloc 1 perde sa stabilité s'écrit

$$\begin{aligned} 2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha) &< 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha \\ \text{soit} \quad \tan \alpha &> \mu_d \end{aligned}$$

Si cette condition est vérifiée, l'écriture du principe fondamental de la dynamique stipule que l'accélération du système est positive. Comme le système possède une vitesse initiale non nulle, il ne s'arrête plus. Le système avalanche. En dessous de l'angle critique $\tan \alpha_c = \mu_d$, le mouvement du bloc 2 ne provoque pas le mouvement du bloc 1.

En résumé, au cours d'une dilatation, le premier réarrangement mécanique aura lieu si la dilatation atteint la valeur θ_d . A cette température, le bloc 2 est animé d'un mouvement de "stick-slip" et glisse seul sur une distance de $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$. Le prochain événement de glissement a lieu pour un incrément de dilatation vérifiant $\tilde{l}_0 \Delta\theta = \Delta\tilde{x}_2$. Le nombre de décrochement dans une dilatation $2A_\theta$ est $n = \frac{2A_\theta}{\Delta\theta}$. Le centre de masse du système se déplace alors de $\tilde{l}_0 A_\theta$.

Lors d'une contraction, le raisonnement à suivre est identique. Dans ces

conditions, le ressort est étiré par rapport à sa longueur à vide. C'est le bloc 1 qui glisse systématiquement en premier, effectuant un mouvement de stick slip d'amplitude $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$. Au cours d'une contraction d'amplitude $-2A_\theta$, le centre de masse du système se déplacera également de $\tilde{l}_0 A_\theta$.

Il est amusant de voir que, contrairement à l'intuition, pour des grandes amplitudes de température la vitesse de déplacement du système ne dépend pas de l'angle d'inclinaison. Comme la force de friction diminue et le cisaillement augmente quand l'angle croît, on s'attendrait à voir couler le système pour une inclinaison plus grande. D'après l'analyse précédente, le déplacement est contrôlé par la seule dilatation thermique du matériau. Quelque soit l'inclinaison, les 2 blocs s'écartent d'une quantité $2\tilde{l}_0 A_\theta$ (Fig.3.5). Pour tout $\alpha \neq 0$, la vitesse de reptation du système \tilde{v}_G est donc :

$$\tau_{th} \tilde{v}_G \approx \tilde{l}_0 A_\theta$$

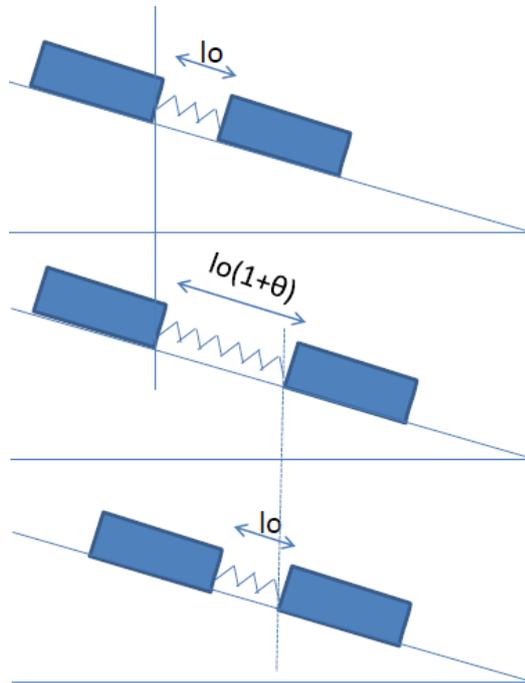


FIGURE 3.5 – Reptation du système constitué de 2 blocs. Lors d'une dilatation ($\Delta\theta > 0$), le bloc en bas se déplace en suivant l'extension du ressort. Lors d'une contraction ($\Delta\theta < 0$), c'est le bloc en haut qui se déplace en suivant également la rétractation du ressort.

Nous allons voir que cette prédiction est exacte uniquement dans la limite des grandes amplitudes de cycle de température. En effet, plaçons nous au début d'une dilatation. Supposons que la contraction précédente de la longueur à vide l_0 ait provoqué un événement de réarrangement. Le ressort est en extension, avec une extension comprise entre $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$ et $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha - 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$. La dilatation minimale pour provoquer le déplacement du bloc 2 doit être telle que le ressort est maintenant en compression, avec une compression minimale valant $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$. Il existe alors une amplitude de dilatation minimale $\Delta\theta_c$ en dessous de laquelle le système ne bouge plus $\Delta\theta_c = 2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$. Finalement pour des cycles de températures d'amplitude $2A_\theta$, le déplacement à chaque demi cycle thermique est $\frac{1}{2}\tilde{l}_0(2A_\theta - \Delta\theta_c)$ à $(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ près (c'est-à-dire à un réarrangement près). Pour tout $\alpha \neq 0$, la vitesse de reptation du système \tilde{v}_G est donc :

$$\tau_{th}\tilde{v}_G \simeq \tilde{l}_0 A_\theta - (\mu_s \cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

En résumé, dans le cas de cycles de température et d'un coefficient de friction statique unique, il est possible de trouver une solution analytique à ce problème. Cette analyse montre l'existence d'une amplitude de température critique entre un écoulement continu et un arrêt du système. Si nous soumettons ce système à des variations de température gaussiennes, nous nous attendons à observer une transition plus douce entre arrêt et écoulement du système. En effet, il y aura toujours une probabilité non nulle de choisir une variation de température capable de débloquent le système. C'est ce que nous étudions au prochain paragraphe. Nous regardons également l'effet d'une distribution gaussienne du coefficient de friction statique sur la dynamique de reptation du système.

3.3.2 Introduction du bruit

Dans le cas de variations de température et de coefficients de friction statique distribués suivant une loi gaussienne, nous utilisons la méthode numérique présentée plus haut pour calculer le déplacement moyen du système en fonction de l'angle d'inclinaison du support.

Sur la figure 3.6, nous pouvons voir que conformément à l'analyse proposée au paragraphe précédent, pour une dilatation (resp. une contraction) le bloc 2 glisse (resp. reste à l'arrêt), alors que le bloc 1 reste à l'arrêt (resp. glisse). Pour de grandes amplitudes de cycle de dilatation, chaque déplacement du centre de masse est de l'ordre de $\frac{1}{2}l_0|\Delta\theta|$. On peut évaluer le déplacement moyen pour une série de dilatations distribuées selon une gaussienne de variance σ_θ (Eq. 3.2). En effet, la distribution de la différence

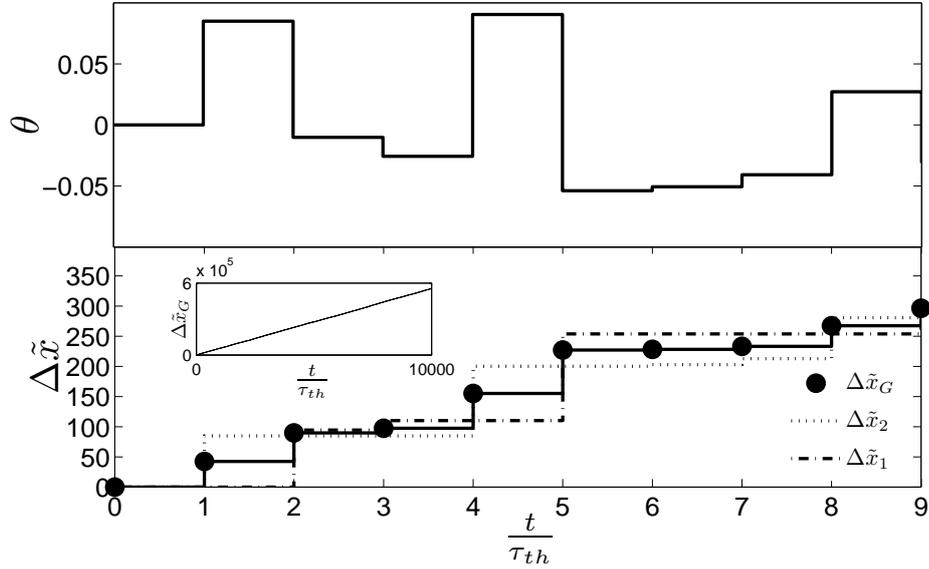


FIGURE 3.6 – Mouvement de reptation du système constitué de 2 blocs. En haut : les variations de température issues d'une distribution gaussienne sont représentées en fonction du temps. En bas : les déplacements des blocs 1 et 2 et du centre de masse sont représentés en fonction du temps. Dans l'encadré, est tracé le déplacement du centre de masse en fonction du temps aux temps longs ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$, $\sigma_\theta = 0.1$ et $\tan \alpha = 0.25$).

des dilatations $\Delta\theta$ est une gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{2}\sigma_\theta$.

$$\begin{aligned}
 p(\Delta\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta_1)p(\Delta\theta + \theta_1)d\theta_1 \\
 p(\Delta\theta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2} \exp\left(-\frac{(\Delta\theta)^2}{4\sigma_\theta^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sqrt{2}\theta + \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}})^2}{2\sigma_\theta^2}\right] d\theta \\
 p(\Delta\theta) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left[-\frac{(\Delta\theta)^2}{4\sigma_\theta^2}\right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, le déplacement moyen est égal à

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{x}_g \rangle &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{2} \tilde{l}_0 \Delta\theta p(\Delta\theta) d\Delta\theta \\
 \langle \tilde{x}_g \rangle &= \tilde{l}_0 \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

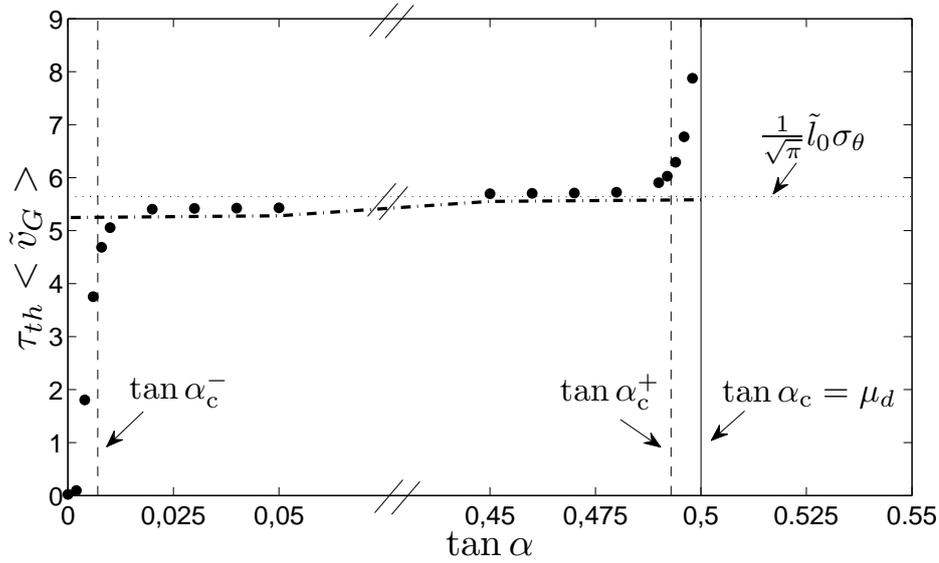


FIGURE 3.7 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l'angle. Les lignes en pointillé et en tiret représentent respectivement les prédictions théoriques issues des équations (3.18) et (3.19) ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$, $\sigma_\theta = 0.01$ et $\tan \alpha = 0.25$)

Dans le cas de variations gaussiennes de température, le déplacement moyen ne dépend pas, en première approximation, de l'angle d'inclinaison. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 montrent que cette formule n'est vérifiée que pour de grandes amplitudes de température. On observe sur la figure 3.7, une légère augmentation de la vitesse moyenne lorsque l'angle d'inclinaison augmente. La nécessité d'inverser la mobilisation de la force de friction lorsqu'on passe d'une dilatation à une contraction permet de comprendre cette dépendance. Du paragraphe précédent, on sait que la dilatation minimale critique vaut $2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$. Pour estimer la correction moyenne apportée par ce terme, il est nécessaire de connaître la probabilité qu'une dilatation soit suivie par une contraction ou réciproquement. Cette probabilité s'exprime ainsi :

$$p(\theta_{i+2} < \theta_{i+1}, \theta_{i+1} > \theta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta_i) \left[\int_{\theta_i}^{\infty} p(\theta_{i+1}) \left(\int_{-\infty}^{\theta_{i+1}} p(\theta_{i+2}) d\theta_{i+2} \right) d\theta_{i+1} \right] d\theta_i$$

$$p(\theta_{i+2} < \theta_{i+1}, \theta_{i+1} > \theta_i) = \frac{1}{3}$$

On en déduit alors que dans 2/3 des cas, le sens de variation de la dilatation change de signe. En supposant que chaque variation de température est suffisamment grande pour provoquer un réarrangement, on trouve une valeur approchée du déplacement du centre de masse dans le cas de variations gaussiennes de température.

$$\langle \tilde{x}_g \rangle = \tilde{l}_0 \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{3}(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (3.19)$$

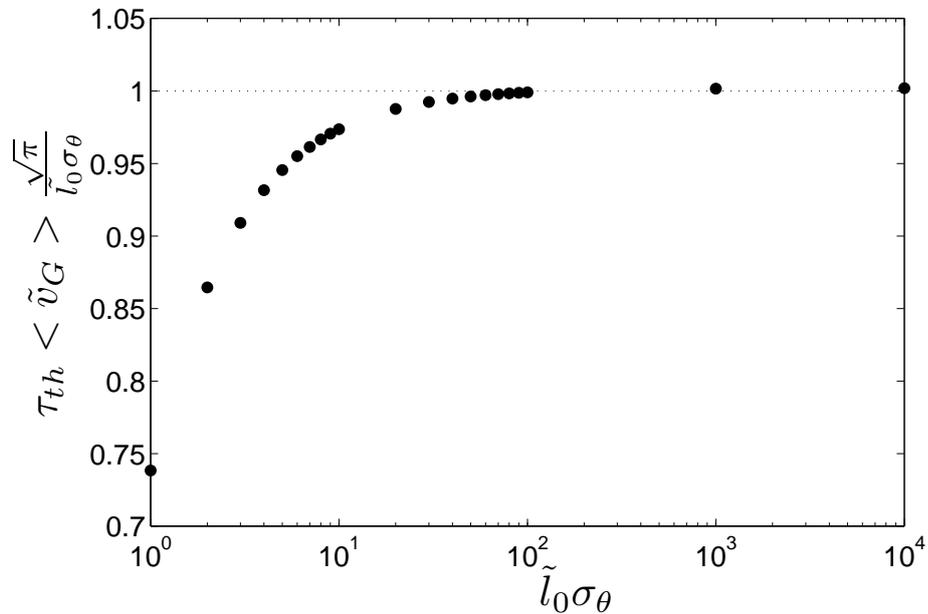


FIGURE 3.8 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l'amplitude des cycles de température ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$ et $\tan \alpha = 0.25$)

Sur la figure 3.7 nous ajoutons cette nouvelle relation de la vitesse de reptation avec l'angle α . La correction apportée rend compte de la légère augmentation de la vitesse avec α . Comme prévu, on remarque sur la figure 3.9 que lorsque l'amplitude des dilatations diminue, la vitesse moyenne du système ne vérifie plus cette estimation. Dans ce cas, l'hypothèse consistant à supposer qu'il y a au moins un réarrangement à chaque perturbation thermique n'est plus satisfaite.

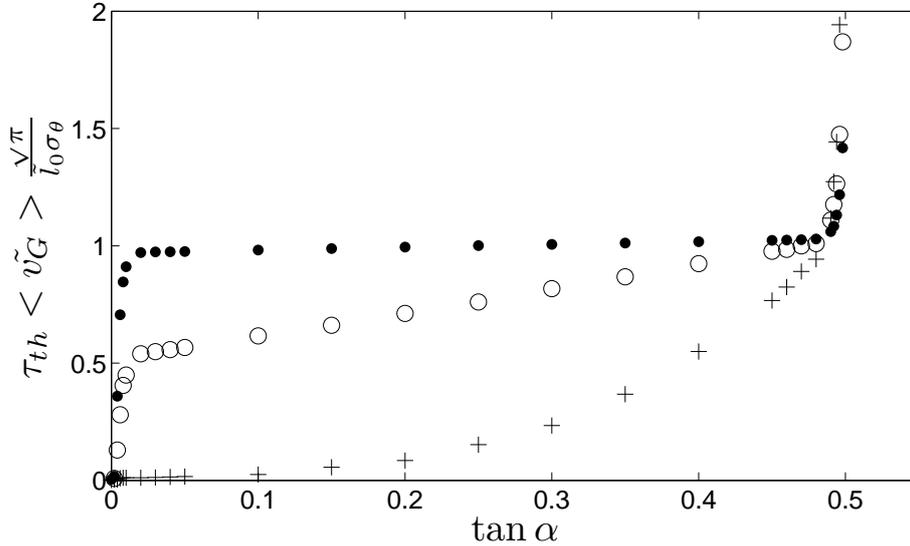


FIGURE 3.9 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l’angle d’inclinaison pour différentes valeurs de l’amplitude typique des fluctuations de température $\sigma_\theta = 0.01$ (disques), $\sigma_\theta = 0.001$ (cercles), $\sigma_\theta = 0.0001$ (croix) ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$)

Outre le comportement en température, on peut regarder l’influence de la distribution du coefficient de friction statique sur la dynamique du système. On observe sur la figure 3.7 qu’aux angles petits proches de zéro et aux angles proches de l’angle d’avalanche, la vitesse n’est pas égale à la valeur précédemment prédite. En reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on peut montrer qu’en présence d’une distribution de coefficient de friction statique, au cours d’une dilatation (resp. contraction), le bloc 2 (resp. bloc 1) peut entraîner dans sa chute le bloc 1 (resp. bloc 2) pour un angle α inférieur à l’angle d’avalanche. Cela a lieu lorsque α vérifie la relation :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &> \mu_d + (\mu_{s,1} - \mu_{s,2})/2 \\ \text{(resp. } \tan \alpha &> \mu_d + (\mu_{s,2} - \mu_{s,1})/2) \end{aligned}$$

Pour une distribution gaussienne du coefficient de friction statique de valeur moyenne μ_s et d’écart type σ_μ , la distribution de la différence des deux coefficients de friction statique est une gaussienne de valeur moyenne nulle et d’écart type $\sqrt{2}\sigma_\mu$.

Par exemple, lorsque $\tan \alpha_c^+ = \mu_d - \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$, il y a glissement quand

$(\mu_{s,2} - \mu_{s,1})/2 > \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$. Ainsi pour cette valeur de l'angle, dans seulement 16% des cas, les deux blocs glissent ensemble. Le centre de masse bouge sur une distance plus grande que $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$. Dans les 84% restants, un seul des 2 blocs glisse sur une distance typique de $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$. En s'approchant de l'angle d'avalanche $\arctan(\mu_d)$, la proportion des avalanches augmente, ainsi que la distance typique sur laquelle glisse le système lors de cet événement (la décélération du centre de masse du système est de plus en plus faible). Par une analyse similaire, on comprend également pourquoi la vitesse du système aux petits angles dépend de l'angle. Dans ce cas, le biais introduit par la gravité n'est plus suffisant pour faire systématiquement glisser en premier le bloc vers le bas. En effet, lors d'une dilatation par exemple, le bloc 2 glisse vers le bas si $f_{1 \rightarrow 2} + mg \sin \alpha > \mu_{s,2} mg \cos \alpha$ tandis que le bloc 1 reste au repos si $f_{2 \rightarrow 1} + mg \sin \alpha > -\mu_{s,1} mg \cos \alpha$. La condition de départ du bloc 2 s'écrit donc $\tan \alpha > \frac{1}{2}(\mu_{s,2} - \mu_{s,1})$. C'est encore la distribution de la différence des deux coefficients de friction statique qui gère le ratio d'événement impliquant le bloc 2. Lorsque le bloc 1 est déstabilisé, il glisse contre la gravité sur une distance $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ (il est à priori surprenant que cette valeur soit la même que le bloc glisse contre ou avec la gravité. Il ne faut cependant pas oublier que pour glisser contre la gravité, la force élastique nécessaire pour initier le mouvement est plus grande). A chaque temps thermique les blocs se sont déplacés relativement l'un de l'autre de $\tilde{l}_0 \Delta \theta$. Les réarrangements du bloc glissant vers le haut réduisent donc le déplacement vers le bas du centre de masse. L'angle α_c^- donné par $\tan(\alpha_c^-) = \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$ donne un ordre de grandeur de l'angle au-delà duquel les glissements vers le haut sont négligeables.

Cette analyse montre donc que la distribution du coefficient de friction statique a une influence négligeable sur la vitesse de reptation du système sur une large plage d'angle d'inclinaison α .

En conclusion, un système constitué de deux blocs glisse, à l'échelle du temps thermique, à vitesse constante. Cette vitesse est proportionnelle à l'amplitude des variations de température au-delà d'une valeur critique minimale et ne dépend pas de l'angle d'inclinaison sur une grande plage d'angle. Une distribution du coefficient de friction statique modélisant l'hétérogénéité des surfaces de contact n'affecte que très peu les propriétés de reptation du système obtenues lorsque le coefficient de friction statique est constant. Nous souhaitons maintenant voir comment évoluent les propriétés de ce système lorsque le nombre de patins augmente.

3.4 Augmentation de la taille du système

3.4.1 Etude du cas à 3 blocs

On soumet le système constitué de 3 blocs à des variations gaussiennes de température de grandes amplitudes. On regarde le déplacement moyen $\langle x_g = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \rangle$ en fonction de l'angle d'inclinaison α (Fig.3.10). On observe alors que le déplacement du centre de masse est nul jusqu'à un angle critique $\alpha_{2,3}$. A partir de cet angle, le déplacement du centre de masse prend une valeur constante jusqu'à un angle légèrement inférieur à l'angle d'avalanche $\arctan(\mu_d)$. En regardant la dynamique interne du système (Fig.3.11),

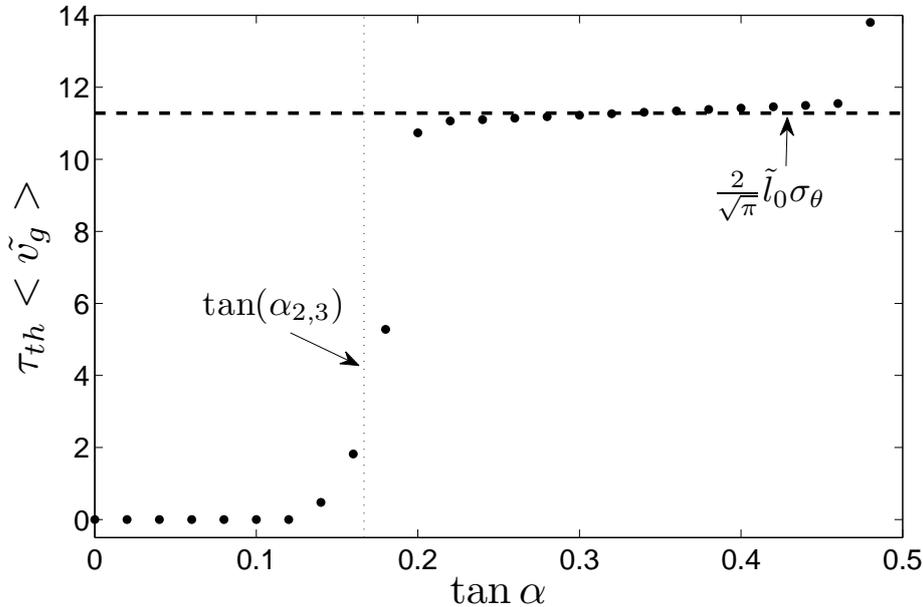


FIGURE 3.10 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 3 blocs en fonction de l'angle α ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$, $\sigma_\theta = 0.01$)

on observe qu'à petit angle, le bloc 1 et 3 oscillent autour du bloc 2 qui reste stable. Si le biais introduit par le poids devient plus grand (dans ce cas, $\alpha > \alpha_{2,3}$), lors d'une dilatation le bloc 2 et 3 glissent vers le bas alors que le bloc 1 est stable. Symétriquement lors d'une contraction le bloc 1 et 2 glissent vers le bas alors que le bloc 3 reste stable. Dans les 2 cas, le centre de masse du système se déplace vers le bas. On peut estimer la valeur de l'angle critique $\alpha_{2,3}$ et la valeur de la vitesse du plateau correspondant. Pour cela, on fait l'hypothèse que le coefficient de friction statique est égal au coefficient de

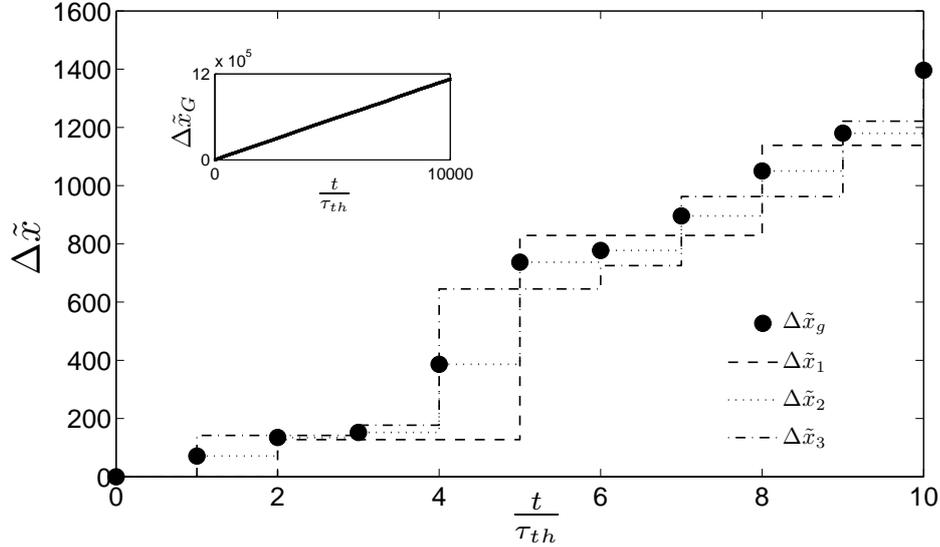


FIGURE 3.11 – Mouvement de reptation du système constitué de 3 blocs. Les déplacements des blocs 1,2 et 3 et du centre de masse sont représentés en fonction du temps. Dans l'encadré est tracé le déplacement du centre de masse en fonction du temps aux temps longs ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$, $\sigma_\theta = 0.1$ et $\tan \alpha = 0.25$).

friction dynamique ($\mu_s = \mu_d$). On considère une dilatation de la longueur à vide des ressorts. Lors de la contraction précédente, on suppose que les blocs 1 et 2 glissent vers le bas alors que le bloc 3 est stable. On peut donc estimer les forces élastiques à la fin de la contraction :

- $f_{2 \rightarrow 1} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- $-f_{2 \rightarrow 1} + f_{3 \rightarrow 2} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$

d'où $f_{3 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$

Lors de la dilatation suivante :

- le bloc 3 se met en mouvement lorsque $f_{2 \rightarrow 3} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- le bloc 2 se met en mouvement vers le bas lorsque $f_{1 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- le bloc 1 glisse vers le haut lorsque $f_{2 \rightarrow 1} = -\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$.

Ainsi le bloc 2 glisse vers le bas si

$$3(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) < 2\mu_d \cos \alpha$$

$$\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$$

Le raisonnement doit être autocohérent. En supposant qu'à la fin d'une dilatation les blocs 2 et 3 aient glissé vers le bas, on doit vérifier qu'à la contraction suivante, les blocs 1 et 2 glissent vers le bas, alors que le bloc 3 est stable pour un angle α tel que $\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$.

A la fin de la dilatation,

- $f_{2 \rightarrow 3} = (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- $f_{1 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$.

Lors de la contraction suivante,

- le bloc 1 se met en mouvement vers le bas lorsque $f_{2 \rightarrow 1} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- le bloc 2 se met en mouvement vers le bas lorsque $f_{3 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- le bloc 3 glisse vers le haut quand $f_{2 \rightarrow 3} = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$.

On en déduit que le bloc 2 glisse vers le bas lors d'une contraction si $\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$. Ainsi, lorsque qu'on applique des contractions et dilatations successives au système, l'angle $\alpha_{2,3}$ au-delà duquel le déplacement n'est pas nul est $\arctan(\frac{1}{3}\mu_d)$.

De plus, on peut déduire de cette analyse une valeur approximative du plateau de vitesse du centre de masse. En effet lors d'une dilatation, le bloc 1 est stable. Les longueurs à vide des deux ressorts ainsi que le déplacement relatif de deux blocs voisins augmentent de $\tilde{l}_0 \Delta \theta$. Le bloc 3 se déplace donc en absolu de $2 \tilde{l}_0 \Delta \theta$, le bloc 2 de $\tilde{l}_0 \Delta \theta$, le déplacement du centre de masse étant égal à $\tilde{l}_0 \Delta \theta$. Pour des variations de température gaussiennes d'écart type σ_θ , à chaque temps thermique, le centre de masse se déplace de $2 \frac{\tilde{l}_0 \sigma_\theta}{\sqrt{\pi}}$.

Nous observons, sur la figure 3.10, que les prédictions analytiques de l'angle $\alpha_{2,3}$ et de la vitesse des plateaux sont en accord avec les résultats numériques. On note cependant que lorsqu'on s'approche par valeur inférieure de l'angle d'avalanche $\arctan(\mu_d)$, la vitesse du centre de masse du système est plus grande que la valeur précédemment prédite. Cette augmentation de la vitesse est due au mouvement simultané des 3 blocs vers le bas. Lorsque la différence entre les coefficients de friction statique et dynamique diminue, la plage d'angle sur lequel le système global glisse est réduite. Par conséquent, la cause du déplacement global du système est le mouvement saccadé de "stick slip" des blocs, qui n'est pas prise en compte dans le calcul analytique. Ce résultat montre donc que, contrairement au système constitué de 2 blocs, cette transition n'est pas contrôlée par l'écart type de la distribution du coefficient de friction statique mais par sa valeur moyenne.

En conclusion, mis à part le comportement du système proche de l'angle d'avalanche, la prédiction analytique que nous effectuons, en supposant les coefficients de friction statique et dynamique égaux, permet de rendre compte de la dynamique du système. Cette analyse menée sur 3 blocs nous a permis d'entrevoir comment généraliser le résultat obtenu à 2 blocs.

Lorsque nous augmentons le nombre de blocs, passant à 5 et 6 blocs, la vitesse de reptation du système en fonction de l'angle est représentée sur la figure 3.12. On observe que le nombre de plateaux est égal à trois. Le

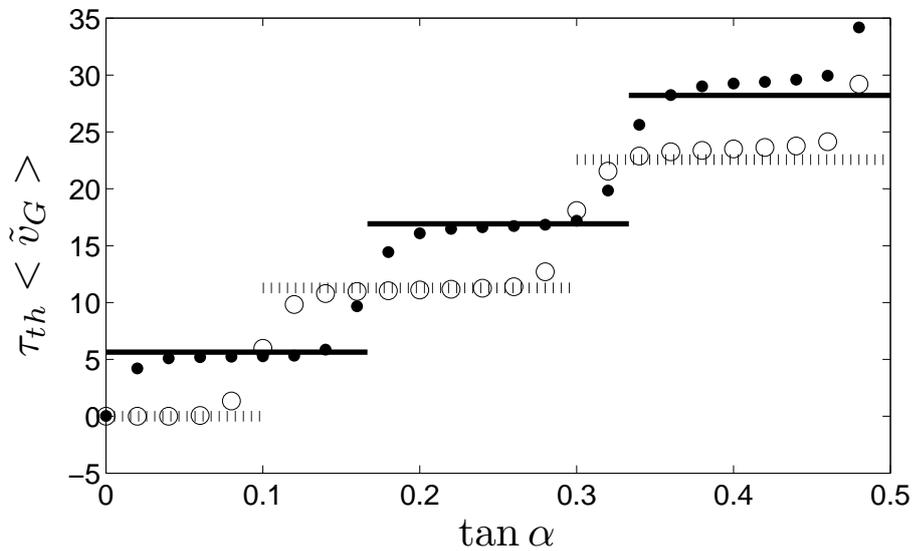


FIGURE 3.12 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 5 et 6 blocs (respectivement les cercles et les disques pour les résultats numériques et les lignes en tiret et les lignes en trait plein pour les prédictions théoriques) en fonction de l'angle α ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$, $\sigma_\theta = 0.01$).

paragraphe suivant généralise cette étude à un nombre N de blocs et présente le raisonnement à suivre pour prédire la valeur des angles de transition et des plateaux de vitesse représentés sur la figure 3.12.

3.4.2 Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs

On cherche la vitesse de reptation d'un système constitué de N blocs. Dans un premier temps, on applique des perturbations thermiques de grande amplitude pour pouvoir négliger les effets liés à la mobilisation des forces de friction. On s'intéresse à la dynamique interne du système. Déjà, on remarque que lors d'un changement de température, la force s'appliquant sur un bloc central ne change pas. Seuls les blocs aux bords sont soumis à des efforts sensibles aux variations de température. Le déplacement du système s'initie donc toujours à ses extrémités. Au cours de leurs déplacements, la force élastique que les patins appliquent sur leurs voisins évolue. Si cette force devient telle qu'elle déstabilise leurs blocs voisins, alors les 2 blocs glissent simultanément. Ainsi de proche en proche, la perturbation thermique se propage au coeur du système. Lors d'une dilatation par exemple, à mesure que l'amplitude de la dilatation augmente, le nombre de blocs entraînés par le bloc 1 dans son mouvement vers le haut augmente. Dans le même temps, le nombre de blocs entraînés par le bloc N dans son mouvement vers le bas augmente. Ces 2 "vagues" de déplacement se croisent en un bloc i. Une augmentation supplémentaire de la dilatation accroît en valeur absolue autant les forces que lui appliquent ses voisins i-1 et i+1. Le bloc i est donc stable.

En supposant que les coefficients de friction statique et dynamique ont la même valeur, on sait que lorsqu'un bloc s'arrête après avoir glissé vers le bas (resp. vers le haut), la force totale qu'il subit est égale à $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$ (resp. $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$). Lors d'une dilatation, le bloc 1 monte, donc $f_{2 \rightarrow 1} = -(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$, alors que le bloc N descend, donc $f_{N-1 \rightarrow N} = (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$. On obtient par récurrence l'expression des forces exercées par le bloc i sur le bloc i-1 et i+1 :

- $f_{i \rightarrow i-1} + (i - 1)(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) = 0$
- $f_{i \rightarrow i+1} + (N - i)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) = 0$

En exprimant la condition de stabilité du bloc i (Eq. 3.10), on peut trouver la plage d'angle pour lequel le bloc i est stable. L'angle $\alpha_{N,i}$ est l'angle limite au delà duquel le bloc i glisse vers le bas. Il est défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f_{i-1 \rightarrow i} + f_{i+1 \rightarrow i} + \sin(\alpha_{N,i}) &= \mu_d \cos(\alpha_{N,i}) \\ \tan(\alpha_{N,i}) &= \mu_d \left(1 - 2 \frac{i-1}{N} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'angle $\alpha_{N,i,+}$ est l'angle limite en dessous duquel le bloc i glisse vers le haut.

Il est défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f_{i-1 \rightarrow i} + f_{i+1 \rightarrow i} + \sin(\alpha_{N,i}) &= -\mu_d \cos(\alpha_{N,i}) \\ \tan(\alpha_{N,i,+}) &= \mu_d \left(1 - 2\frac{i}{N}\right) \end{aligned}$$

On trouve, de manière cohérente, que $\alpha_{N,i,+}$ correspond à l'angle critique au-delà duquel le bloc $i+1$ est stable. Par la suite, on se contentera de définir l'angle $\alpha_{N,i}$. Le bloc i est donc stable dans l'intervalle $\alpha_{N,i+1} < \alpha < \alpha_{N,i}$.

Un raisonnement identique doit être mené lors d'une contraction. On cherche l'angle de stabilité du bloc j . Les blocs au dessus du bloc j se déplacent vers le bas alors que les blocs en dessous se déplacent vers le haut. Les forces qu'appliquent le bloc j sur ses voisins sont donc données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_{j \rightarrow j-1} + (j-1)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) &= 0 \\ f_{j \rightarrow j+1} + (N-j)(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

L'angle $\alpha_{N,j}$ est l'angle limite au-delà duquel le bloc j glisse vers le bas

$$\tan(\alpha_{N,j}) = \mu_d \left(1 - 2\frac{N-j}{N}\right)$$

On remarque que cet angle est égal à $\alpha_{N,i}$ pour $j = N + 1 - i$. Cela signifie que les nombres de blocs montants et descendants sont les mêmes lors d'une dilatation ou lors d'une contraction. On retiendra donc que pour un angle compris entre $\alpha_{N,i+1}$ et $\alpha_{N,i}$, le bloc i est stable lors d'une dilatation alors que le bloc $N+1-i$ l'est lors d'une contraction. De l'expression des forces élastiques on déduit également que les blocs se déplacent relativement à leur voisin de $\tilde{l}_0 \Delta\theta$.

Ainsi lors d'une dilatation ($\Delta\theta > 0$), le déplacement du bloc n est donné par $\Delta\tilde{x}_n = (n-i)\tilde{l}_0 \Delta\theta$. Lors d'une contraction ($\Delta\theta < 0$), $\Delta\tilde{x}_n = [n - (N+1-i)]\tilde{l}_0 \Delta\theta$.

Le déplacement total du centre de masse associé à une variation $\Delta\theta$ de la dilatation des ressorts s'écrit alors :

$$\tilde{x}_g = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta\tilde{x}_n = \frac{1}{2}(N+1-2i)\tilde{l}_0 |\Delta\theta| \quad (3.21)$$

Par ce calcul, on montre donc que le déplacement du système devrait être

3.4. Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs 91

proportionnel au nombre de patins dont il est constitué, c'est-à-dire proportionnel à sa longueur. Par conséquent, la vitesse du système $v_{N,i}$ pour un angle α compris entre $\alpha_{N,i+1}$ et $\alpha_{N,i}$ et pour des cycles de température d'amplitude $2A_\theta$ est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{th} \tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i) \tilde{l}_0 A_\theta \quad (3.22)$$

La figure 3.13 représente le déplacement du centre de masse du système en fonction de N. A N petit, le déplacement est bien proportionnel à L, conformément à l'équation 3.22. Mais au-delà d'une taille critique, le système ralentit. Un effet de saturation apparaît.

De manière équivalente, sur la figure 3.14, on observe que pour un système constitué de 30 blocs soumis à des cycles de température, le déplacement du centre de masse est nul jusqu'à une amplitude critique θ_c , puis devient proportionnel à l'amplitude des cycles de température.

Il est utile de rappeler ici l'origine de cette température critique dans le cas de 2 blocs. Lorsqu'une dilatation suit une contraction (par exemple), le ressort passe d'un état de compression à un état de tension. L'extension correspondante est égale à $2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$.

L'argument se transpose au cas d'un système constitué de N blocs. Suite à une dilatation les blocs montants (numérotés de 1 à i) subissent la force $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ alors que les blocs descendants (numérotés de i+1 à N) sont soumis à la force $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$. Lors de la contraction suivante, pour glisser, les blocs numérotés de 1 à i doivent être soumis à la force $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$ alors que les blocs numérotés de N-i+1 à N doivent être soumis à la force totale $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$. Quant aux blocs compris entre les éléments i+1 et N-i, ils bougent vers le bas aussi bien lors d'une dilatation que d'une contraction. La force qu'ils subissent reste donc toujours égal à $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$. Le seuil de température créant un glissement macroscopique du système correspond à la valeur de la contraction qui initie le mouvement du bloc i vers le bas. En effet, si le patin i commence à bouger, il entraînera dans sa chute les blocs situés entre i+1 et N-i, ces derniers subissant une force égale à leur seuil de glissement.

A la fin de la dilatation, la force qu'exerce le bloc i sur i+1 est donnée par :

$$f_{i \rightarrow i+1} = (N - i)(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$$

Lors de la contraction suivante, le bloc i-1 impose une force élastique croissante au bloc i. Lorsque le bloc i-1 glisse,

$$f_{i \rightarrow i-1} = (i - 1)(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$$

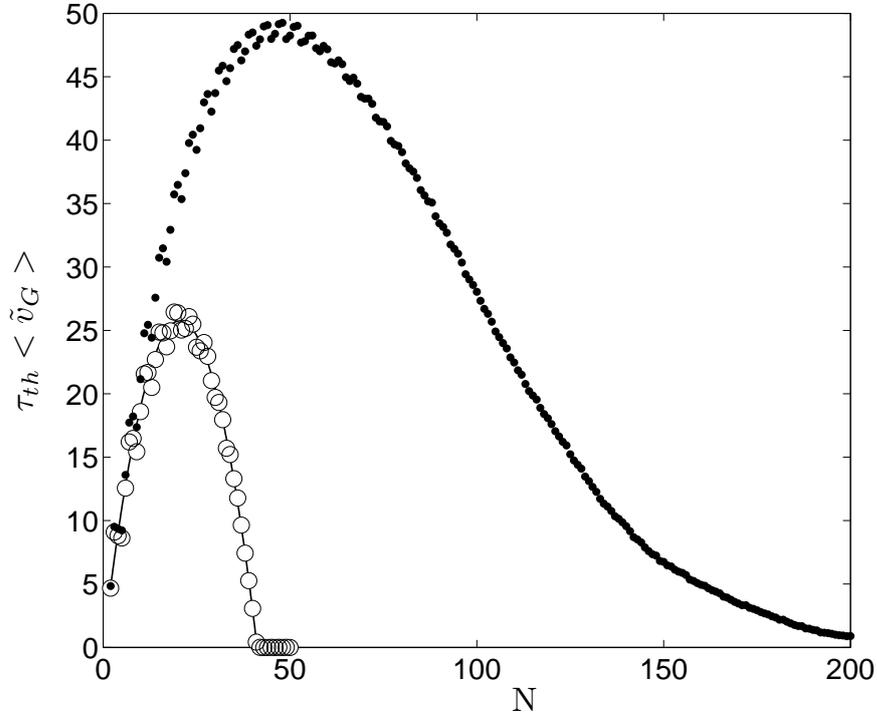


FIGURE 3.13 – Vitesse du centre de masse en fonction du nombre de blocs N dans le cas de variations gaussiennes de température (disques) et dans le cas de variations cycliques de température (cercles). L'expression analytique obtenue (Eq. 3.26) est tracée en trait plein ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $A_\theta = 0.005$ ou $\sigma_\theta = 0.005\sqrt{\pi}$, $\sigma_\mu = 0.01$ et $\tan \alpha = 0.25$)

Le bloc i glisse vers le bas lorsque la force totale qu'il subit dépasse $\mu_d \cos \alpha$.

$$f_{i+1 \rightarrow i} + f_{i-1 \rightarrow i} + \sin \alpha = \mu_d \cos \alpha$$

$$(N - i)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) - \tilde{l}_0 \Delta \theta_c + (i - 1)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) + \sin \alpha = \mu_d \cos \alpha$$

On trouve ainsi que

$$-\tilde{l}_0 \Delta \theta_c = N(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (3.23)$$

En dessous de cette dilatation critique $\tilde{l}_0 \Delta \theta_c$, le centre de masse du système

3.4. Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs 93

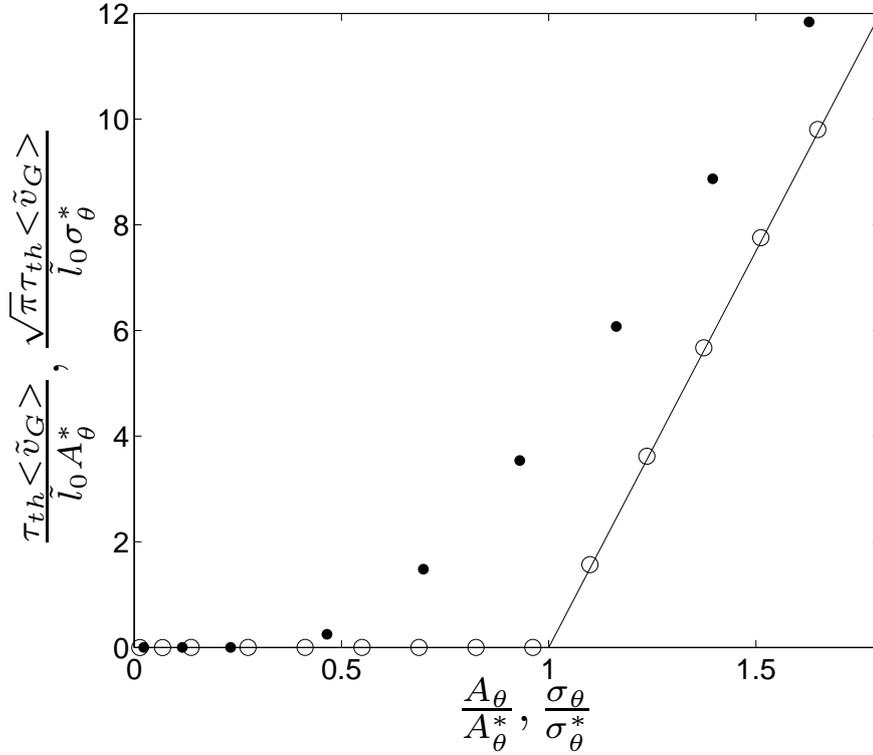


FIGURE 3.14 – Vitesse du centre de masse en fonction de l'amplitude typique des variations de température dans le cas de cycles de température (cercles) et dans le cas de variations gaussiennes de température (disques). L'expression analytique obtenue (Eq. 3.26) est tracée en trait plein ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\bar{\mu}_s = 0.6$, $\sigma_\mu = 0.01$ et $\tan \alpha = 0.25$)

ne se déplace pas, bien que les blocs aux extrémités bougent. En effet à toute valeur de la dilatation, le déplacement total des blocs se déplaçant vers le bas est égal au déplacement total des blocs se déplaçant vers le haut. La cause du glissement global du système vers le bas est le glissement des blocs compris entre $i+1$ et $N-i$ s'effectuant dans le sens de la pente à la dilatation comme à la contraction.

Dans le cas des cycles de température ($\Delta\theta = -2A_\theta$), on trouve d'après l'équation 3.23 que l'amplitude minimale de dilatation pour engendrer un mouvement de reptation de la chaîne de blocs est égale à $\frac{N}{2l_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$. Comme les déplacements des blocs sont compensés pour une amplitude plus petite que cette amplitude critique, la vitesse du système $v_{N,i}$ pour un angle

α compris entre $\alpha_{N,i+1}$ et $\alpha_{N,i}$ est donc égale à :

$$\tau_{th}\tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i)\tilde{l}_0[A_\theta - \frac{N}{2\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.24)$$

Dans le cas de variations de température gaussiennes, on peut estimer le déplacement du centre de masse $v_{N,i}$ pour un angle α compris entre $\alpha_{N,i+1}$ et $\alpha_{N,i}$ en tenant compte de la distribution des dilatations et en calculant la probabilité qu'une dilatation (resp. contraction) soit suivie d'une contraction (resp. dilatation). On trouve alors que :

$$\tau_{th}\tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i)\tilde{l}_0[\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{N}{3\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.25)$$

Comme le nombre de plateaux de vitesse prédit est de l'ordre de $\frac{N}{2}$, pour un nombre de blocs N grand, la courbe de reptation du système en fonction de l'angle devient continue. En exprimant la relation entre le bloc stable i et l'angle α à partir de la relation $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}(\tan \alpha_{N,i} + \tan \alpha_{N,i+1})$, les expressions (3.24) et (3.25) deviennent respectivement :

$$\tau_{th}\tilde{v}_G = N \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \tilde{l}_0[A_\theta - \frac{N}{2\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.26)$$

$$\tau_{th}\tilde{v}_G = N \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \tilde{l}_0[\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{N}{3\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

Les expressions analytiques proposées ci dessus (Eq. 3.26, Eq. 3.27) ainsi que les résultats numériques sont présentées sur la figure 3.14. On observe un très bon accord entre ces 2 quantités.

En définitive, cette étude montre que la vitesse de reptation n'est pas proportionnelle à la longueur du système lorsqu'on prend en compte l'élasticité du matériau dont il est constitué. En effet, nous trouvons qu'un système de taille donnée commence à bouger dans le sens de la pente pour une amplitude de dilatation supérieure à une amplitude critique.

Lorsque pour un système de taille donnée L , le nombre de points de contact devient très grand, nous pouvons considérer que nous modélisons la reptation d'un solide frictionnel de longueur L . C'est ce que nous explorons dans le paragraphe suivant.

3.5 Discussion

3.5.1 Reptation d'un solide frictionnel

On considère que la chaîne de blocs étudiée est un modèle pour un solide frictionnel de masse M , de longueur L , de section perpendiculaire à la surface de contact et à la direction de glissement S , de masse volumique ρ et de module d'Young Y . On suppose que le nombre de zones de contact N tend vers l'infini, impliquant que la longueur à vide l_0 varie en $\frac{L}{N}$. Dans ce cas, par définition la constante de raideur du ressort k est donnée par $k = \frac{YS}{l_0} = \frac{YSN}{L}$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la plage d'angle pour lequel le bloc i est stable se réduit à un angle α et la vitesse de reptation v_g du solide frictionnel donnée par l'équation 3.26 devient :

$$\tau_{th} v_g = L \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \left[A_\theta - \frac{gL\rho}{2Y} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \right] \quad (3.29)$$

D'après ce raisonnement, on s'attend donc à observer un solide glisser dans le sens de la pente sous l'effet de grandes variations de sa température. Moseley, il y a près de 150 déjà, a vu que les tuiles de l'église de Bristol exposées au cycle jour nuit descendaient lentement le long de la pente [58]. Il a expliqué, grâce à un raisonnement de mécanique continue, que des changements de température peuvent induire le fluage de solides obéissant aux lois de Amontons Coulomb. Il prétend aussi que ces variations de température peuvent être la cause du mouvement des glaciers. Rappelons ici le raisonnement de Moseley lorsque la température augmente par exemple.

Au cours d'un accroissement de la température, la contrainte élastique interne au système augmente de manière homogène si bien qu'elle est compensée dans le volume du matériau. Ce sont aux extrémités de ce dernier que cette force n'est pas compensée et est donc capable de déplacer le système. Le bloc situé en haut est poussé dans le sens opposé à la pente se déplaçant alors vers le haut, alors que le bloc situé en bas, est poussé dans le sens de la pente se déplaçant donc vers le bas. Au cours de leurs glissements, ils entraînent leurs blocs voisins. Il en résulte qu'un point P de la chaîne est entraîné dans le sens opposé à la pente par les blocs situés au dessus de lui et dans le sens de la pente par les blocs situés en dessous de lui. Le point P est donc le point fixe du système lors d'une dilatation. On cherche la position de ce point P dont nous notons p sa distance au centre de masse. Comme les points au dessus de p montent et ceux en dessous descendent, il en résulte que le support applique sur le système une force de friction F totale de :

$$F = -\left(\frac{L}{2} - p\right) \cos \alpha \mu_d \rho S g + \left(\frac{L}{2} + p\right) \cos \alpha \mu_d \rho S g$$

$$= 2p \cos \alpha \mu_d \rho S g$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système solide global, les seules forces exercées sur le système étant le poids et la friction, on obtient l'équation $2p \cos \alpha \mu_d \rho S g = \rho S g \sin \alpha$.

$$p = L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d} \quad (3.30)$$

Ainsi, lorsque le solide est soumis à une variation de température ΔT , son centre de masse, qui se situe à une distance p du point de stagnation, se déplace proportionnellement à cette distance p .

$$\Delta x_g = \kappa \Delta T L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d}$$

Il en résulte qu'en considérant des cycles de température d'amplitude ΔT de période $2\tau_{th}$, le solide descend naturellement la pente avec la vitesse v_g vérifiant $\tau_{th} v_g = \Delta x_g$.

$$\tau_{th} v_g = \kappa \Delta T L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d} \quad (3.31)$$

Cette vitesse est donc proportionnelle à la longueur L du solide.

Comme le remarque Bouasse [11], le raisonnement de Moseley ne prend cependant pas en compte une caractéristique importante du matériau : son élasticité. En effet, l'élasticité du solide, permettant au système de stocker une partie de l'énergie injectée par les cycles de températures sous forme élastique, peut empêcher le matériau de glisser. Plus précisément, comme le montre Croll [22], ce changement de température minimal nécessaire au déplacement du matériau est également proportionnel à la longueur du solide en contact. Son raisonnement est le suivant. Pour prendre en compte le seuil de variation de température ΔT_c dû à l'élasticité du matériau dans le modèle continu, il suffit de dire que la force élastique qui s'exerce au point de stagnation p doit dépasser le seuil de force associé à la friction $F_{friction}$. La force élastique due à l'expansion thermique de l'élément de volume $S dx$ placé en p est $k \Delta(dx)$, k étant la constante de raideur du matériau donné par $k = \frac{YS}{dx}$ et $\Delta(dx)$ étant la variation de longueur de l'élément dx égal dans ce cas à $\kappa \Delta T dx$. Croll [22] suppose que l'état de contrainte initial est nul. Dans ce cas, le seuil de force associé à la friction $F_{friction}$ s'écrit :

$$F_{friction} = \left(\frac{L}{2} - p \right) S \rho g (\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$$

En remplaçant p par son expression (Eq. 3.30),

$$F_{friction} = \frac{L}{2} S \rho g \mu_d \cos \alpha \left(1 - \left(\frac{\tan \alpha}{\mu_d} \right)^2 \right) \quad (3.32)$$

pour la partie du solide qui monte et donc pour la partie du solide qui descend, les deux étant égales par définition du point p . En égalant la force élastique et la force de friction, on obtient une valeur de la variation de température critique ΔT_c donnée par :

$$\Delta T_c = \frac{\mu_d \rho \cos \alpha L}{2 \kappa Y} \left[1 - \left(\frac{\tan \alpha}{\mu_d} \right)^2 \right] \quad (3.33)$$

A partir de l'équation (3.29) obtenue par passage à la limite dans notre modèle discret, nous trouvons une amplitude de variation de température critique ΔT_c égale à $\frac{gL\rho}{2\kappa Y}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$. La différence entre ces deux estimations réside dans la différence des états de contraintes initiaux du solide. Croll suppose que la mobilisation de la force de friction initiale avant la perturbation thermique est nulle. Dans notre cas, des cycles de température sont successivement appliqués. Par conséquent, au début d'une dilatation ou d'une contraction, le système est déjà sous la contrainte générée par le précédent déplacement. A la suite de la précédente contraction, la force de friction appliquée à la partie supérieure est orientée vers le haut et vaut $-(\frac{L}{2} - p)S\rho g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$. Lorsque cette partie se met à glisser vers le haut lors de la dilatation qui suit, la force de friction atteint la valeur $(\frac{L}{2} - p)S\rho g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$. La variation de la force élastique associée est donc égale à la différence entre ces deux estimations. Elle correspond à une variation de température ΔT_c donnée par :

$$\Delta T_c = \frac{\rho g L}{\kappa Y} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$$

En introduisant ce dernier résultat dans l'expression de la vitesse (3.31), nous obtenons :

$$\tau_{th} v_g = \kappa L \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \left(\frac{\Delta T}{2} - \frac{gL\rho(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)}{2Y\kappa} \right)$$

Nous retrouvons bien le résultat de l'analyse numérique discrète. Ce raisonnement met en avant le rôle de l'état de contrainte initial du système sur sa dynamique future.

3.5.2 Quel est l'intérêt de notre modèle ?

Le paragraphe précédent montre que les résultats trouvés à partir de l'analyse numérique peuvent être retrouvés grâce à la mécanique des milieux continus. Il est cependant bon de rappeler ce qu'apporte l'étude de ce modèle numérique.

- D'une part, il est aisé de calculer le mouvement de reptation du système dans le cas de cycles de température. Lorsque les variations de température sont distribuées suivant une fonction plus compliquée, il est difficile de prévoir analytiquement la solution. En effet, l'état de contrainte initial de la chaîne de blocs est un paramètre crucial pour calculer le déplacement du système. Nous avons pu obtenir une expression analytique approchée de cette valeur dans le cas de variations gaussiennes de température dans la limite où l'écart type de la distribution est grand devant l'amplitude critique des variations de température. L'étude numérique permet de connaître ce déplacement quelque soit la distribution de la température.
- D'autre part, il est possible d'étudier l'écoulement d'un système en fonction du nombre de zones de contact qu'il possède avec son support. Les zones de contact entre 2 solides réels sont en nombre limité [5, 33]. Ce modèle permet de tenir compte de ce paramètre dans l'étude de la vitesse de reptation du système.
- Enfin, l'approche numérique permet de tenir compte de la différence entre le coefficient de friction statique et le coefficient de friction dynamique. On montre par notre étude que le coefficient de friction statique et par conséquent son hétérogénéité [5, 8, 21] jouent un rôle marginal dans l'écoulement moyen du système.

3.6 Remarques

3.6.1 Sur la modélisation des effets de la température

Nous avons considéré, pour prendre en compte les effets mécaniques engendrés par les variations de température de la chaîne de patins, que les longueurs de ce système se dilatent. Cependant nous aurions pu considérer que le support sur lequel repose ce système se dilate. On peut se demander dans quelle mesure les résultats que nous avons présentés ci-dessus s'appliquent à ce dernier cas. Pour ce faire, considérons les forces engendrées à l'interface

entre un substrat et une chaîne de grains frictionnels lorsque le substrat se dilate. Nous notons x_i les abscisses des points de contact entre le substrat et l'objet. Lors d'une dilatation thermique du substrat, chaque élément de longueur $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ se dilate de $\kappa \Delta x_i \Delta T$. L'effort appliqué sur le bloc i après ce changement de température est égal à :

$$\begin{aligned} F_{2 \rightarrow 1} &= k((1 + \kappa \Delta T)(x_2 - x_1) - l_0) \\ F_i &= k(1 + \kappa \Delta T)(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ F_{N-1 \rightarrow N} &= k((1 + \kappa \Delta T)(x_{N-1,i} - x_{N,i}) - l_0) \end{aligned}$$

La force élastique induite par le changement de température est donc différente de celle proposée dans le modèle précédent. Ici, c'est la constante de raideur et la longueur à vide qui varient linéairement avec la température.

En posant initialement aléatoirement les blocs, les conditions suivantes doivent être vérifiées pour assurer la stabilité de l'ensemble :

$$\begin{aligned} |(x_2 - x_1) - l_0| &< \frac{\mu_s m g}{k} \\ |x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}| &< \frac{\mu_s m g}{k} \\ |(x_{N-1} - x_N) - l_0| &< \frac{\mu_s m g}{k} \end{aligned}$$

Dans cette configuration, la probabilité pour qu'un bloc dépasse le seuil de friction est homogène, contredisant les résultats de notre modèle, qui met en avant le rôle particulier joué par les bords. Cependant, nous avons vu que la chaîne de grains s'organise suite à l'application successive des variations thermiques. Dans ce cas, la répartition des blocs est telle que le système glisse toujours à partir de ses bords même lorsque c'est le support qui se dilate. Les résultats obtenus avec la force modèle plus simple $f_{n+1 \rightarrow n} = -k[x_n - x_{n+1} + l(T)]$ avec $l(T) = l_0[1 + \kappa(T - T_0)]$ permet de rendre compte du comportement du système dans les deux situations.

3.6.2 Sur le choix de la loi de friction

Dans les diverses études impliquant des blocs solides reliés par des ressorts, la force de friction est une fonction plus complexe dépendant de la vitesse. Par exemple, Sousa [77] et Aumaitre [4] utilise une loi de friction donnée par :

$$F_{fri} = \mu_d \frac{1}{1 + \alpha v}$$

avec v la vitesse du bloc solide et α un paramètre. Amundsen *et al* [3] proposent d'ajouter une force de viscosité au bloc en mouvement. Cette viscosité peut modéliser une viscosité interne due au mouvement relatif de 2 blocs ($F \propto \eta_a(v_2 - v_1)$) ou une viscosité due au milieu ambiant ($F \propto \eta_b v_1$). Ces lois de friction changent la dynamique interne du système.

De la même manière, Scheibert [71] a tenu compte du fait qu'un solide en contact frictionnel entraîné par une force appliquée à une hauteur h de l'interface est soumis à un couple. En effet, la force de friction est contenue dans le plan de contact des 2 surfaces alors que la force motrice qui déplace le bloc est appliquée à une hauteur h . Un couple opposé est donc nécessaire à l'équilibre rotationnel de l'ensemble. Ce couple est imposé par un gradient de force normale. Dans le cas de sollicitations thermiques, ce couple existe également ce qui peut changer les conditions de glissement.

Il est alors légitime de se demander quelle est l'influence de telles lois de friction sur la reptation du système. La dynamique interne de reptation dépend certainement des lois de friction choisies [6, 12, 52, 71]. Cependant, pour des variations de température de grandes amplitudes, le comportement moyen du système n'est pas sensible à sa dynamique sous jacente. En effet, la condition de stabilité de la chaîne de blocs suffit à déterminer la loi de reptation du solide. Les résultats de ce modèle sont donc plus généraux qu'ils ne semblent *a priori*.

Chapitre 4

Dynamique intermittente d'un système frictionnel modèle : lien avec les matériaux granulaires

Sommaire

4.1	Introduction et rappel du chapitre précédent . . .	101
4.2	Dynamique intermittente	102
4.2.1	Sensibilité aux conditions initiales	102
4.2.2	Description statistique	105
4.2.3	Dynamique interne	111
4.2.4	Vieillissement	116
4.3	Discussion	118
4.3.1	Rôle du coefficient de friction statique	118
4.3.2	Rôle du nombre de blocs	120
4.3.3	Conclusion	121

4.1 Introduction et rappel du chapitre précédent

Nous avons étudié au chapitre précédent l'écoulement moyen d'un système élastique frictionnel entraîné par son propre poids lorsque des cycles de température lui sont appliqués. Il a été possible de retrouver les résultats numériques par une approche théorique en faisant l'hypothèse que les coefficients de friction statique et dynamique sont égaux. Nous avons ainsi pu

en conclure que la différence entre ces deux coefficients n'a en général pas d'influence sur l'écoulement moyen du système. De plus, pour un système de taille L , dans la limite où le nombre de bloc N est grand (limite continue), ce calcul analytique prévoit que le système possède une transition bien définie entre un régime d'écoulement continu et un régime où le système ne bouge pas. En effet, l'expression proposée pour la vitesse du centre de masse v_g vérifie la relation suivante :

$$\tau_{th} v_g = N \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \tilde{l}_0 \left[A_\theta - \frac{N}{2\tilde{l}_0} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \right] \quad (4.1)$$

L'amplitude critique des cycles de température à la transition est donc

$$A_\theta^* = \frac{N}{2\tilde{l}_0} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (4.2)$$

Au voisinage de cette amplitude critique, pour un coefficient de friction statique donné, identique pour tous les patins ($\sigma_\mu = 0$), différent du coefficient de friction dynamique, des exemples de trajectoires d'un système constitué de 30 blocs sont représentés sur la figure 4.1.

Pour une amplitude très supérieure à l'amplitude critique, le système frictionnel glisse à chaque cycle. Lorsque l'amplitude des cycles de température s'approche de l'amplitude critique, le mouvement d'ensemble du système devient intermittent. Cette transition rappelle celle observée entre le régime de compaction intermittente et le régime de compaction continue quand une colonne de grains est sollicitée par des perturbations thermiques cycliques [26].

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier les caractéristiques de ce régime intermittent.

4.2 Dynamique intermittente

4.2.1 Sensibilité aux conditions initiales

Le système modèle étudié est très sensible à ses conditions initiales pour deux raisons distinctes. D'une part, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, le système s'organise sous l'application des cycles de température. La cause du mouvement d'ensemble du système est la mobilisation de la force de friction des blocs centraux dans une direction contraire à la pente à la dilatation comme à la contraction. Le système a donc besoin d'être placé initialement dans cette condition mécanique particulière là pour vérifier la loi théorique proposée (Eq. (4.1)). En effet, nous avons établi l'expression

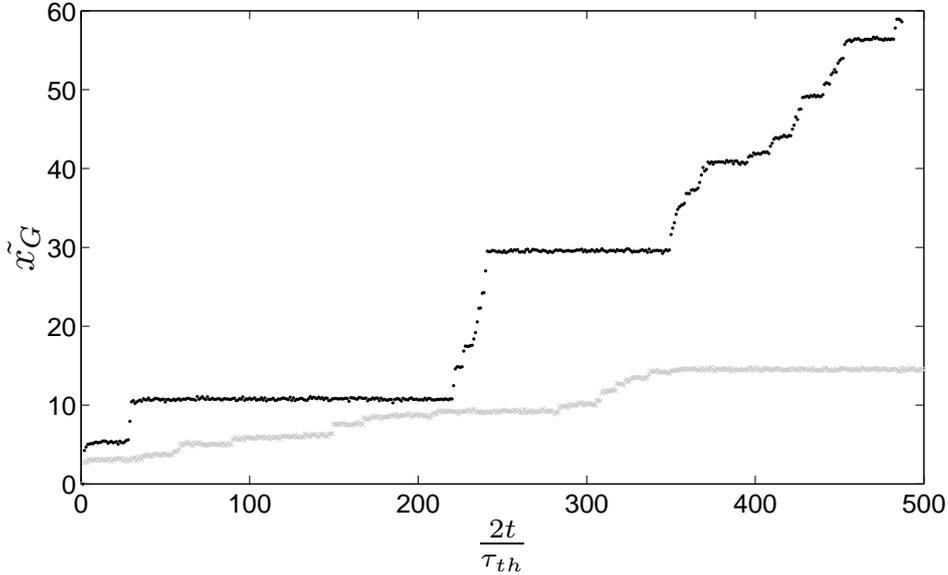


FIGURE 4.1 – Position du centre de masse d'un système constitué de 30 blocs en fonction du temps pour 2 amplitudes de température proches de l'amplitude critique A_θ^* . (En noir $A_\theta = 1.01A_\theta^*$, en gris $A_\theta = 0.99A_\theta^*$, avec dans les 2 cas $A_\theta^* \simeq 3.6 \times 10^{-3}$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\tan \alpha = 0.25$)

4.1 en supposant que le système possède un unique point stable après dilatation ou contraction thermique, ce qui n'est *a priori* pas le cas. En fait, un moyen simple d'organiser initialement le système dans la configuration qui nous intéresse est de lui appliquer une amplitude de température T_m grande devant l'amplitude critique de température. L'onde de déplacement occasionnée par ce changement de température peut ainsi se propager sur l'ensemble de la chaîne. On applique ensuite des cycles de température d'amplitude ΔT autour de cette température moyenne T_m .

D'autre part, on observe que les trajectoires du système sont extrêmement sensibles au pas de temps Δt utilisé pour résoudre numériquement les équations du mouvement (Fig. 4.2). Il est bien connu que ce genre de système est extrêmement sensible aux erreurs numériques [44]. Carlson et Langer [15] ont montré qu'un système de Burridge Knopoff [14] glissant à vitesse constante et subissant une force de friction décroissante avec la vitesse des blocs solides est instable. Pour un modèle similaire mais entraîné à une de ses extrémités à vitesse constante, Sousa [78, 79] a prouvé que ce système est chaotique. Dans notre cas, la force de friction subit une discontinuité entre sa valeur statique et sa valeur dynamique et la vitesse de déplacement de l'ex-

trémité libre n'est pas constante. A notre connaissance, il n'y a pas d'étude montrant que notre modèle est chaotique. Nous observons qu'une réduction du pas de temps pour notre méthode numérique ne conduit pas les trajectoires à converger vers une solution unique. De manière équivalente, un léger changement des positions initiales des blocs peut conduire à des trajectoires différentes. La force de frottement utilisée contenant une condition stricte de glissement est responsable de la grande sensibilité du système aux conditions initiales. En effet, une différence infiniment petite des positions des blocs peut impliquer qu'un élément commence ou non un mouvement de stick slip d'amplitude finie, proportionnelle à l'écart entre le coefficient de friction statique et le coefficient de friction dynamique. Une approche déterministe de ce problème ne peut être menée puisque nous n'avons pas accès à la trajectoire du système. Cependant de manière intéressante, les propriétés statistiques du

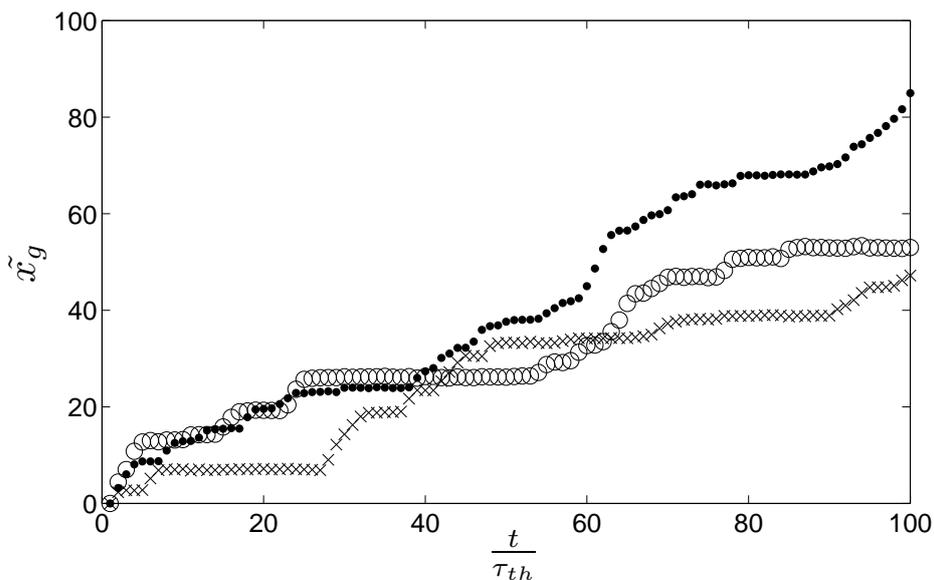


FIGURE 4.2 – Position du centre de masse d'un système constitué de 30 blocs en fonction du temps thermique pour $2A_\theta = 0.0074$ pour $\Delta t = 0.005$ (cercles), $\Delta t = 0.001$ (disques), $\Delta t = 0.0001$ (croix) ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\tan \alpha = 0.25$)

système sont reproductibles (Fig.4.3). Nous caractérisons donc par la suite ce système par ce type de grandeur.

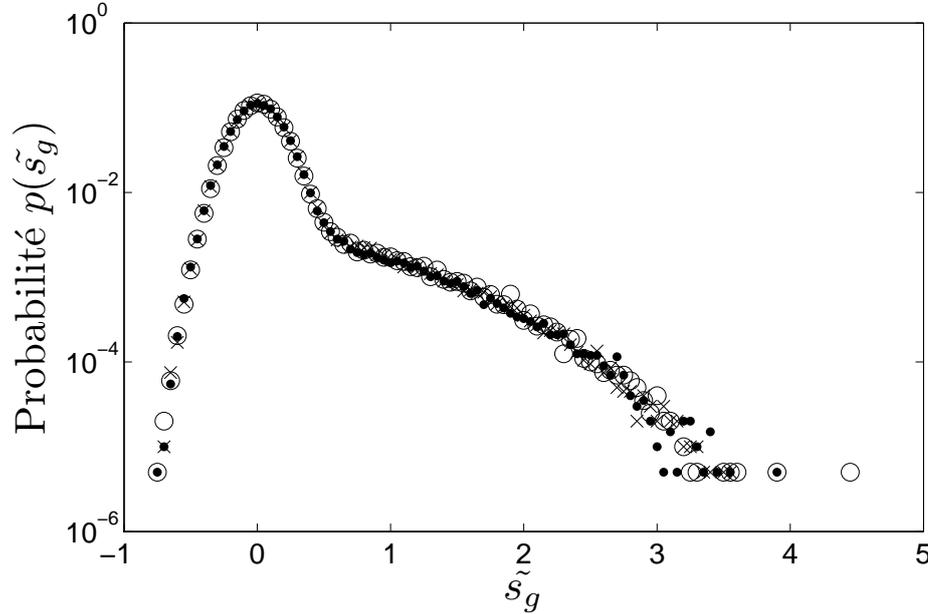


FIGURE 4.3 – Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse \tilde{s}_g ($\tilde{s}_g = \Delta \tilde{x}_g$) pour un système de 30 éléments pour différents pas de temps $\Delta t = 0.005$ (cercles), $\Delta t = 0.001$ (disques), $\Delta t = 0.0001$ (croix) ($2A_\theta = 0.0073$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\tan \alpha = 0.25$)

4.2.2 Description statistique

Dans la suite de l'exposé, nous étudions pour l'exemple les propriétés statistiques des trajectoires d'un système constitué de 30 blocs dont les coefficients de friction statique et dynamique μ_s et μ_d valent respectivement 0.6 et 0.5 posés sur un plan incliné dont l'angle d'inclinaison vérifie $\tan \alpha = 0.25$. Dans ce cas, l'amplitude de la dilatation critique A_θ^* des cycles de température vaut approximativement 0.003638 d'après l'équation 4.2. Ce système permet d'obtenir des quantités statistiques reproductibles pour un système d'assez grande taille sans nécessiter un temps de calcul trop long (quelques jours en moyenne). Nous étudions tout d'abord l'influence de l'amplitude des cycles de température sur la dynamique du système.

Distribution des déplacements

Pour une reptation continue du centre de masse, nous avons calculé au chapitre précédent que pour des coefficients de friction statique et dyna-

mique égaux, une contraction et une dilatation conduisent à un déplacement identique du centre de masse du système. On observe, sur la figure 4.4, que cette proposition reste vraie lorsque ces deux coefficients sont différents. Nous mesurons donc le déplacement du centre de masse tous les demi cycles thermiques.

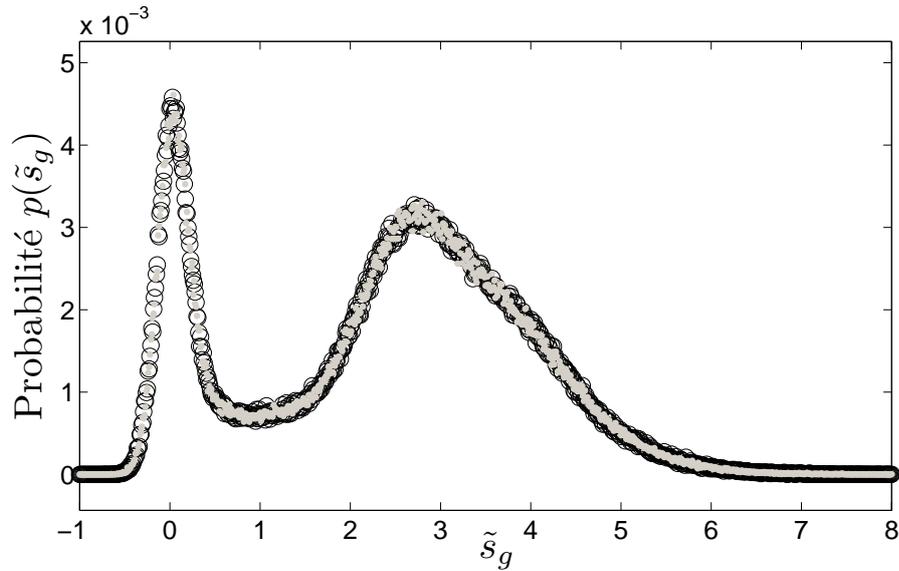


FIGURE 4.4 – Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse pour un système de 30 éléments pour une contraction (disques gris) et pour une dilatation (cercles noirs) ($2A_\theta = 0.0076$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\tan \alpha = 0.25$)

Sur la figure 4.5 et 4.6, nous traçons la distribution de probabilité p des sauts de déplacements du centre de masse \tilde{s}_g ($\tilde{s}_g = \Delta \tilde{x}_g$) après chaque perturbation thermique pour différentes valeurs de A_θ .

Pour $2A_\theta > 2A_{\theta l} \approx 0.008$ (Fig.4.5), la distribution des sauts est une gaussienne dont la valeur moyenne augmente linéairement avec l'amplitude des cycles de températures, en accord avec la prédiction théorique (Eq. (4.1)).

Pour $2A_\theta < 2A_{\theta l} \approx 0.008$ (Fig.4.6), la distribution des sauts contient deux maxima. Alors que l'un d'entre eux correspond à la taille typique des sauts issue de l'équation (4.1), le deuxième pic est centré sur zéro. Ce second pic correspond donc à des demi cycles thermiques conduisant à un déplacement du centre de masse du système nul en moyenne. Lorsqu'on réduit encore l'amplitude des cycles de température, la probabilité d'une perturbation thermique déplaçant le centre de masse diminue alors que le poids du pic à déplacement

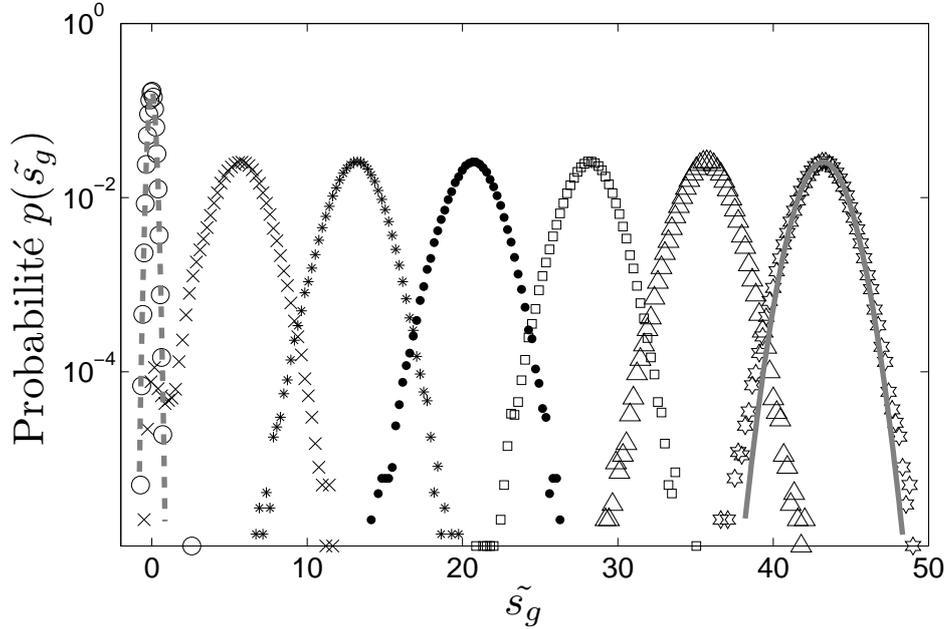


FIGURE 4.5 – Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse pour $N = 30$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et différentes valeurs de $2A_\theta$ ($2A_\theta=0.007$ (cercles), 0.008 (croix), 0.009 (étoiles), 0.01 (disques), 0.011 (carrés), 0.012 (triangles), 0.013 (étoiles ouvertes)). Les courbes grises en tiret et en trait plein correspondent aux interpolations des points de mesure par des fonctions gaussiennes.

nul croît. Lorsque $2A_\theta = 0.0071$, le seul pic centré sur $\tilde{s}_g = 0$ subsiste et le centre de masse du système ne se déplace plus.

En supposant que les déplacements engendrés lors de deux perturbations thermiques successives sont indépendants, il est possible de calculer la distribution de déplacement après un cycle complet. Cette distribution est le produit de convolution de la distribution mesurée pour une dilatation par celle mesurée pour une contraction. Sur la figure 4.7, on compare le résultat obtenu par ce calcul à la distribution obtenue à partir de la simulation numérique. Les résultats ne concordent pas. On en déduit donc que ces événements sont corrélés.

Pour explorer cette propriété du système, nous considérons que la distribution des déplacements est bivaluée, dans le régime intermittent ($0.0071 < 2A_\theta < 0.008$). Nous devons donc trouver un seuil de déplacement pour discriminer une perturbation thermique engendrant un déplacement du système qu'on appellera événement de "glissement", d'une autre n'en engendrant pas qu'on appe-

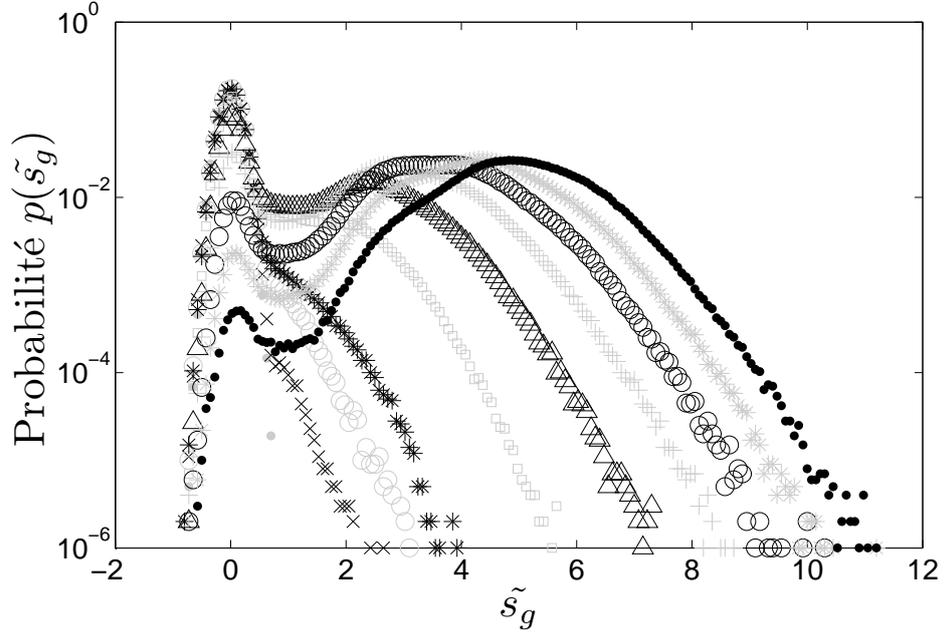


FIGURE 4.6 – Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse pour $N = 30$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et différentes valeurs de $2A_\theta$ ($2A_\theta = 0.0071$ (disques gris), 0.0072 (croix noires), 0.0073 (cercles gris), 0.0074 (étoiles noires), 0.0075 (carrés gris), 0.0076 (triangles noirs), 0.0077 (croix grises), 0.0078 (cercles noirs), 0.0079 (étoiles grises), 0.008 (disques noirs))

lera événement "arrêt". Lorsqu'on considère la distribution des déplacements pour des amplitudes de cycle thermique petites ($2A_\theta \leq 0.0071$), l'écart type de ces fluctuations de positions lorsque le système est dans sa phase "arrêt" nous donne une valeur de ce seuil. Nous avons vérifié que ce seuil n'influe pas sur les conclusions que nous tirons par la suite. Dans la suite de l'exposé, les résultats présentés sont obtenus pour une valeur du seuil choisie égale à $\tilde{s}_g = 0.7$. Ce choix consistant à séparer les événements en 2 types s'avèrera justifié par la suite. Les propriétés des 2 types d'événements "arrêt" et "glissement" présentent en effet des caractéristiques différentes.

Distribution des périodes

Nous commençons par l'étude de la distribution des durées de chacun des 2 événements.

Sur la figure 4.8 est tracée la distribution des durées de l'événement

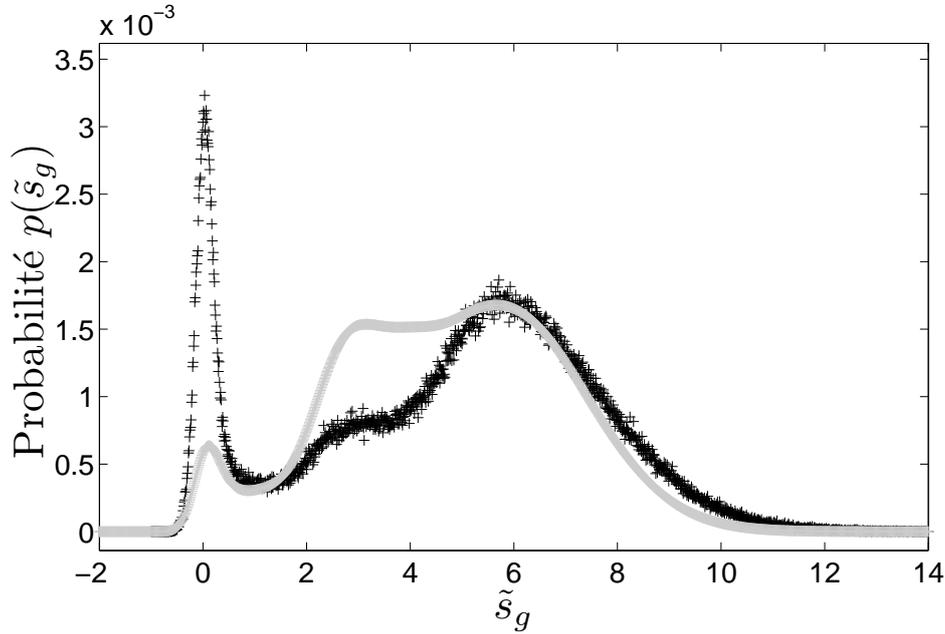


FIGURE 4.7 – Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse pour un système de 30 blocs pour un cycle contraction dilatation. Les croix noires représentent la distribution issue du programme numérique. Les points gris sont obtenus par convolution de la distribution d'une contraction avec celle d'une dilatation ($2A_\theta = 0.0076$, $l_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$, $\mu_s = 0.6$, $\tan \alpha = 0.25$)

"glissement" $p_g(\frac{t}{\tau_{th}})$ pour différentes valeurs de l'amplitude en échelle semi-logarithmique. On observe que cette distribution est exponentielle quelle que soit la valeur de A_θ . On en déduit que la probabilité pour que le système reste dans l'état "glissement" peut donc être décrite comme le tirage successif d'une variable aléatoire. En effet, en notant β la probabilité du système de rester dans l'état "glissement", la probabilité du système à rester exactement n perturbations thermiques dans cet état vaut $\beta^n(1 - \beta)$, ce qui est une loi exponentielle. Cette probabilité p ou de manière équivalente le temps caractéristique τ_c pendant lequel le système reste dans l'état "glissement" dépend de l'amplitude des cycles de température. De manière cohérente, τ_c croît avec l'amplitude des cycles jusqu'à diverger lorsque le système glisse continûment ($2A_\theta \geq 0.008$).

La distribution de durée de l'état "arrêt" $p_a(\frac{t}{\tau_{th}})$ est quant à elle représentée en double échelle logarithmique sur la figure 4.9. Elle présente une décroissance bien plus lente qu'une loi exponentielle. Nous avons décidé d'interpoler

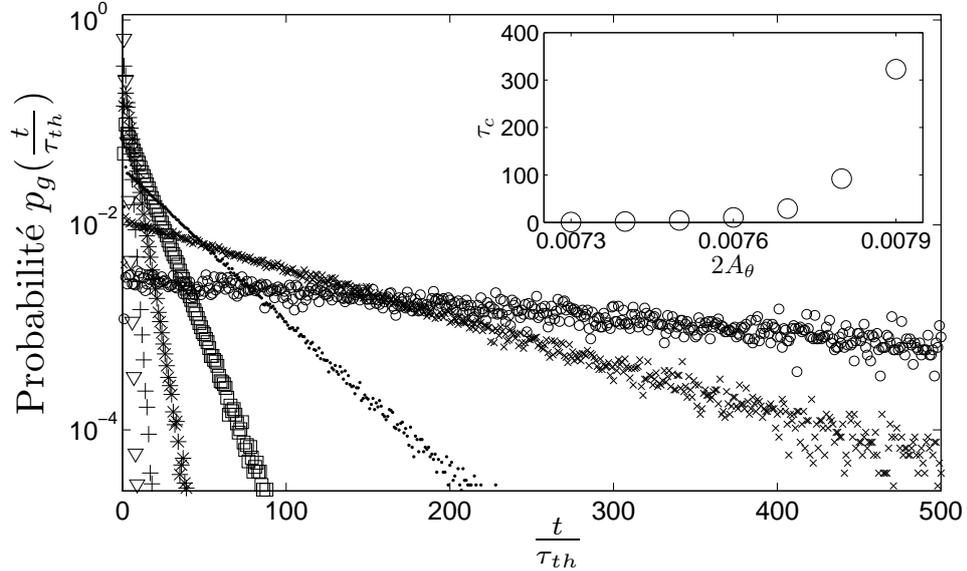


FIGURE 4.8 – Distribution de probabilité de la durée des périodes d'événement "glissement" successifs pour $N = 30$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et $2A_\theta = 0.0073$ (triangles pointant en bas), 0.0074 (plus), 0.0075 (étoiles), 0.0076 (carrés), 0.0077 (disques), 0.0078 (croix diagonales), 0.0079 (cercles). Encadré : Temps caractéristique τ_c en fonction de $2A_\theta$

ces fonctions par une loi de puissance présentant une coupure exponentielle indépendante de l'amplitude A_θ . Elles sont donc de la forme $at^b \exp(-t/\tau_{cut})$ avec a et b des paramètres libres et $\tau_{cut} \approx 205\tau_{th}$. L'exposant b décroît lorsque l'amplitude des cycles augmente, signifiant que la probabilité d'avoir une longue période d'événements "arrêt" successifs diminue à mesure que l'amplitude augmente. Ceci est en accord avec l'existence du régime d'écoulement continu pour des valeurs de $2A_\theta$ supérieures à 0.008 . La forme de cette fonction ainsi que la valeur du temps caractéristique associée à la coupure exponentielle (qui n'est pas due à la durée de la simulation) restent inconnues. Il nous paraît cependant intéressant d'ajuster nos résultats par ce type de fonction pour mettre en avant le caractère profondément différent de cette loi en comparaison avec la loi exponentielle précédemment décrite. En effet, cela signifie qu'un système dans la phase "arrêt" a une probabilité de rester dans cette phase qui dépend de l'histoire du système. Nous trouvons dans cette propriété une signature de la corrélation temporelle des déplacements que nous avons mise en évidence précédemment.

On peut résumer les caractéristiques du système ainsi :

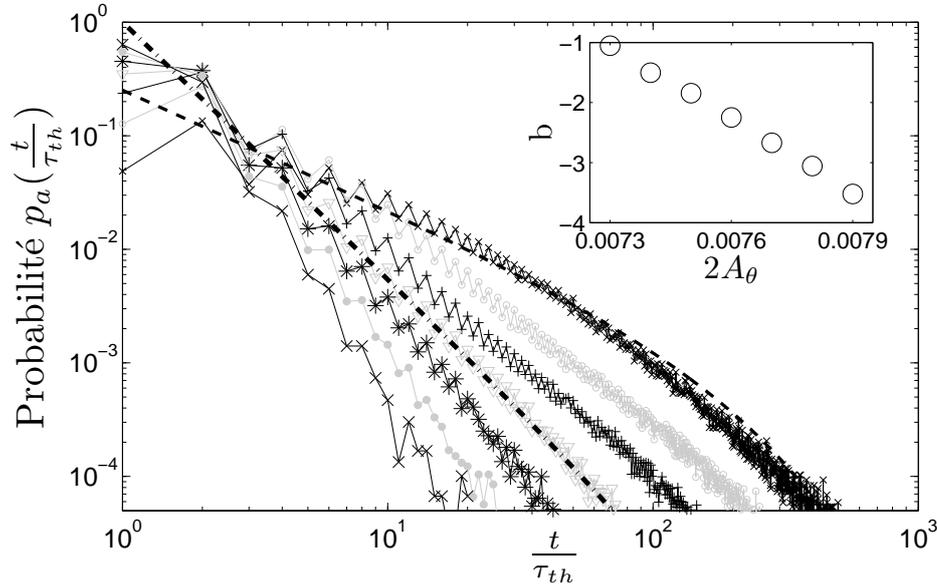


FIGURE 4.9 – Distribution de probabilité de la durée des périodes d'événement "arrêt" successif pour $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ and $2A_\theta = 0.0073$ (croix diagonales noires), 0.0074 (cercles gris), 0.0075 (croix noires), 0.0076 (triangles gris), 0.0077 (étoiles noires), 0.0078 (disques gris), 0.0079 (croix grises). Les deux lignes en tiret noir correspondent à l'interpolation par la loi de puissance avec coupure exponentielle. Encadré : Exposant b de la loi de puissance en fonction de $2A_\theta$.

Lorsque le système coule, les événements sont décorrélés. Au contraire, lorsque le système est à l'arrêt, la réponse du système aux perturbations thermiques devient dépendante de son histoire, synonyme de vieillissement. Cela nous pousse à chercher dans la suite de l'exposé une cause de ce vieillissement.

4.2.3 Dynamique interne

L'étude de l'arrangement mécanique interne de la chaîne de blocs permet de mieux comprendre l'origine de cette dynamique intermittente. La figure 4.10 présente la longueur de chaque ressort i en fonction de l'indice i après chaque dilatation et chaque compression. Chaque figure est constituée de la superposition des données provenant de plusieurs cycles thermiques d'amplitude constante (mais différente pour chaque figure) appliqués successivement. Cette figure image la distribution de la contrainte élastique interne à la chaîne. La branche supérieure correspond à la distribution des longueurs

de ressorts après une expansion alors que la branche inférieure correspond à celle obtenue après une compression. On observe qu'en moyenne, chaque branche est constituée de 2 segments linéaires représentés en tiret blanc dont les pentes sont constantes quelle que soit l'amplitude des cycles imposés.

On veut estimer les pentes moyennes $\Delta l = l_{i+1} - l_i$ tracées sur la figure 4.10 en tiret blanc à partir de la condition de stabilité mécanique des patins. En effet, $k\Delta l$ est la somme des forces élastiques exercées sur le bloc i par ses deux blocs voisins. Quand un élément glisse vers le bas et s'arrête, la force de friction passe de la force de friction statique à la force de friction dynamique donnée par $\mu_d mg \cos(\alpha)$. Le bilan des forces écrit pour le bloc i à l'équilibre conduit à la relation suivante : $k\Delta l = \mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)$. En appliquant le même raisonnement à un bloc glissant vers le haut (ce qui change le signe de la force de friction), on obtient $k\Delta l = -\mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)$. On observe que le modèle numérique vérifie bien en moyenne cet état de contrainte. Cependant la contrainte sur chacun des blocs est distribuée autour de la valeur prédite. Cela est directement relié à l'existence d'un coefficient de friction statique différent du coefficient dynamique. En effet, lorsqu'un bloc s'arrête, son voisin peut encore être en mouvement. Dans ce cas, pendant la phase d'arrêt du bloc voisin, le ressort commun à ces deux éléments change de longueur, si bien que la contrainte élastique qu'il exerce dévie de la valeur précédemment prédite. C'est le bloc déjà à l'arrêt, qui contraint par une force de friction proportionnelle au coefficient de friction statique encaisse cette contrainte élastique supplémentaire. C'est pourquoi les pentes mesurées sur la figure 4.10 sont légèrement distribuées autour de la valeur prédite. Dans le cas d'un coefficient de friction statique très légèrement différent du coefficient de friction dynamique, on vérifie que la distribution des longueurs est plus étroite (figure 4.11).

On remarque également sur la figure 4.10, que pour une amplitude des variations de température $2A_\theta = 0.009$, après une dilatation, les blocs numérotés de 1 à 7 se sont déplacés vers le haut alors que les blocs numérotés de 9 à 30 se sont mus vers le bas. Lors d'une contraction, les blocs numérotés de 1 à 22 se sont déplacés vers le bas et les blocs numérotés de 24 à 30 vers le haut. Les blocs 8 et 23 jouent un rôle capital dans le déplacement d'ensemble du système parce que les éléments compris entre eux sont ceux qui se meuvent vers le bas aussi bien au cours d'une contraction que d'une dilatation. Nous les appellerons par la suite "blocs primordiaux". Le nombre d'éléments séparant un bout de la chaîne du bloc primordial le plus proche (dans notre exemple ce nombre est égal à 7) dépend pour un angle donné uniquement

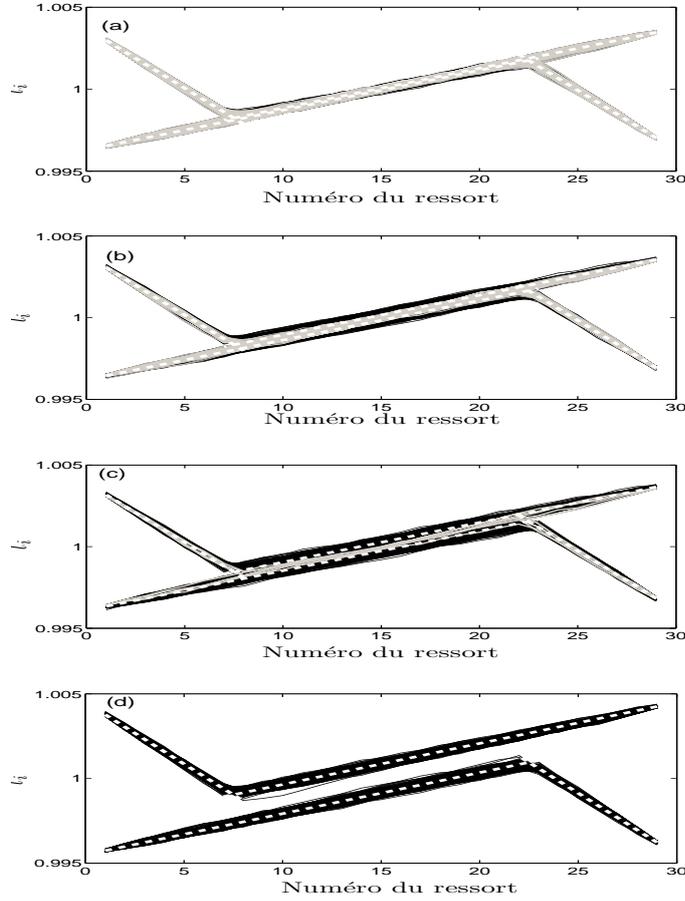


FIGURE 4.10 – Longueur des ressorts en fonction de l'indice du ressort i , après chaque demi période pour 500 cycles d'expansion/contraction pour un système de 30 blocs, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$ et $\mu_s=0.6$. Dans chacune des figures, la branche basse (resp. haute) correspond à la longueur après contraction (resp. dilatation). Pour les blocs glissant vers le haut, la pente moyenne $k\Delta l$ est $-\mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)$ alors que pour des blocs glissant vers le bas, la pente moyenne est $\mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)$ (ces droites sont en tirets blancs). Les résultats pour les différentes valeurs de $2A_\theta$ sont présentés sur les différentes figures : $2A_\theta = 0.0074$ (a), $2A_\theta = 0.0076$ (b), $2A_\theta = 0.0078$ (c), $2A_\theta = 0.009$ (d). Les longueurs après une période de repos (c'est-à-dire les demi cycles pour lesquelles le centre de masse ne bougent pas) sont tracées en gris, celles après une période de glissement sont tracées en noir

du nombre de blocs total N constituant le système. Lorsque l'amplitude des cycles de température change, ce nombre reste inchangé.

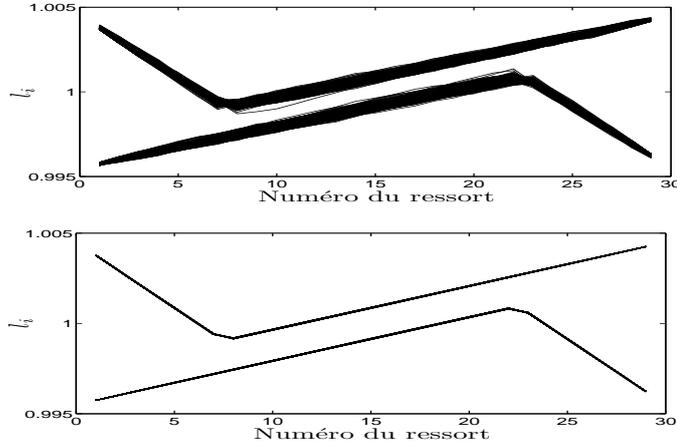


FIGURE 4.11 – Longueur des ressorts en fonction de l'indice du ressort i , après chaque demi période pour 500 cycles d'expansion/contraction pour un système de 30 blocs dont les coefficients de friction statique valent $\mu_s = 0.6$ (en haut) et $\mu_s = 0.51$ (en bas) ($\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$)

Nous avons trouvé une estimation des pentes mesurées par Δl . Pour effectivement tracer ces segments sur la figure 4.10, il est nécessaire d'en connaître un point de référence. Les conditions de stabilité des blocs 1 et 30 permettent de répondre à cette question. En suivant un raisonnement similaire à celui menant à la déduction des pentes, on obtient que lorsqu'un de ces blocs glissent vers le haut, lors d'une dilatation, la longueur du ressort impliquée est donnée par $l = l_0(1 + A_\theta) - \frac{\mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)}{k}$. Lors d'une contraction, au lieu d'être poussé par le ressort, le bloc concerné est maintenant tiré par ce dernier conduisant à $l = l_0(1 - A_\theta) + \frac{\mu_d mg \cos(\alpha) + mg \sin(\alpha)}{k}$. Le même calcul doit être mené dans le cas du déplacement d'un bloc vers le bas. En fait, il suffit d'inverser le sens de la force de friction. Cela conduit donc à $l = l_0(1 + A_\theta) - \frac{\mu_d mg \cos(\alpha) + mg \sin(\alpha)}{k}$ pour une dilatation, alors que pour une contraction $l = l_0(1 - A_\theta) + \frac{\mu_d mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)}{k}$. Cette estimation est en accord avec les résultats numériques. Ils montrent de plus que pour de larges amplitudes des cycles thermiques, il y a une nette différence entre les longueurs à vide des ressorts après dilatation et après contraction. En se rappelant qu'un des blocs "primordiaux" est stable, on en déduit qu'à cette différence correspond un déplacement conséquent du centre de masse du système. Une diminution progressive de l'amplitude de la perturbation thermique conduit à une réduction de la différence entre les longueurs des ressorts de la branche supérieure et inférieure. Ainsi la taille des sauts du centre de masse décroît.

Quand l'amplitude des cycles thermiques ne sera pas assez importante pour séparer les deux branches constituant chaque figure, on s'attend donc à obtenir des cycles de température ne déplaçant pas le centre de masse. En effet, les blocs centraux (numérotés de 9 à 22) ne seront pas contraints de se déplacer pour vérifier l'équilibre mécanique du système global. C'est ce qu'on vérifie en traçant en gris sur la figure 4.10 les longueurs de ressort en fonction de i après un demi cycle thermique n'ayant pas engendré de déplacement du centre de masse (d'après le critère sur \tilde{s}_g du paragraphe précédent). On voit que ces états correspondent à une région commune aux 2 branches.

En revenant à nouveau à la distribution des sauts des figures 4.5 et 4.6, on observe que pour de grandes amplitudes des variations de température le système bouge à chaque demi cycle sur une distance caractéristique. La prédiction analytique prévoit l'existence de cette taille caractéristique. Elle correspond à la somme des déplacements de chaque bloc, chacun d'eux étant proportionnel à leur position relative par rapport au bloc stable. Cependant cette prédiction théorique ne tient pas compte de la différence entre le coefficient de friction statique et dynamique. Quand cet effet supplémentaire est pris en compte, on obtient une large distribution de déplacement. La figure 4.10 nous permet de relier cette variabilité à la position interne des blocs. Comme nous l'avons présenté dans ce paragraphe, la différence entre μ_s et μ_d permet aux ressorts d'explorer une plus large gamme de longueur en vérifiant toujours la condition de stabilité mécanique du système. En plus de cet "espace de phase" plus grand, l'introduction du coefficient de friction dynamique implique une dynamique compliquée de stick slip à plusieurs éléments solides dont nous avons pointé l'extrême sensibilité aux conditions initiales. On comprend ainsi pourquoi cette variabilité n'entache pas le mouvement global du système à grande amplitude des cycles de température, mais devient par contre importante pour des amplitudes proches de l'amplitude critique. En effet, certaines configurations initiales ne sont pas propices à la propagation d'une onde de déplacement. Plus précisément, en se rappelant qu'un des 2 "blocs primordiaux" doit être destabilisé pour que le système se déplace significativement (les blocs 9 à 22 sont prêts à glisser vers le bas), les blocs en bout de chaîne explorent différentes configurations de position, certaines générant un mouvement d'ensemble du système et d'autres non. C'est ainsi que le pic centré en zéro apparaît sur la distribution des déplacements. Cette étude ne nous permet cependant toujours pas de voir pourquoi le système présente une corrélation entre événements successifs "d'arrêt".

4.2.4 Vieillessement

Comme nous l'avons souligné, la distribution en loi de puissance montre que le comportement du système est dépendant des événements passés. Un mécanisme possible serait que le système, une fois dans l'état "arrêt" s'organise progressivement dans un état de plus en plus stable, réduisant la probabilité de celui-ci de glisser à nouveau. Nous traçons sur la figure 4.12 la pente $\Delta\tilde{l}_m$ d'une régression linéaire interpolant les points de mesure correspondant aux valeurs des longueurs des ressorts compris entre les blocs 8 et 23 lorsque le système est dans l'état "arrêt". La figure 4.12 est constituée de la superposition de nombreuses périodes de repos. Comme nous pouvons le voir, la distribution initiale de cette pente est largement distribuée au début d'une période "d'arrêt". On observe qu'aux états "d'arrêt" les plus longs correspond une pente plus grande. On en déduit donc qu'une pente plus grande implique que le système est plus stable. De plus, en traçant la distribution des pentes après les six premières variations de température on remarque que des systèmes présentant une grande pente, initialement non représentés, naissent. Pour comparaison, nous traçons sur la figure 4.13 la pente de ce système au cours des événements successifs de "glissement". La distribution de ces pentes ne changent pas. On en déduit donc que dans la phase "arrêt" le système s'organise de telle manière à avoir une pente plus grande. La pente des blocs internes vieillit donc au cours du temps. On confirme quantitativement cette observation en traçant sur la figure 4.14 la distribution $p(\delta\Delta\tilde{l}_m)$ des sauts de pente $\delta\Delta\tilde{l}_m$ pendant une période d'arrêt. On constate que la distribution est dissymétrique présentant un poids prépondérant pour des sauts d'amplitude positive. La pente moyenne des longueurs des ressorts reliant les blocs internes croît donc pendant une phase d'arrêt.

D'un point de vue mécanique, on peut essayer de comprendre pourquoi, d'une part, une pente plus grande implique une stabilité plus importante du système et pourquoi, d'autre part, le système tend progressivement vers des états plus stables.

D'abord une forte pente signifie que la longueur du ressort entre les blocs 8 et 9 est petite et que celle entre les blocs 22 et 23 est grande. Nous savons par l'étude de la dynamique interne que les blocs 8 et 23 jouent un rôle crucial dans la dynamique d'ensemble du système. Si un de ces 2 "blocs primordiaux" bougent alors la chaîne entière se déplace. Au cours d'une contraction thermique, l'élément 8 est débloquent si les longueurs l_7 et l_8 vérifient la condition $k(l_8 - l_7) > \mu_s mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$. Quand la longueur l_8 est petite, l_7 doit atteindre une valeur d'autant plus petite pour débloquent le système. Or la distribution de la longueur l_7 après une contraction est distribuée suivant une fonction présentée sur la figure 4.15. A mesure que l_8 diminue, la probabilité

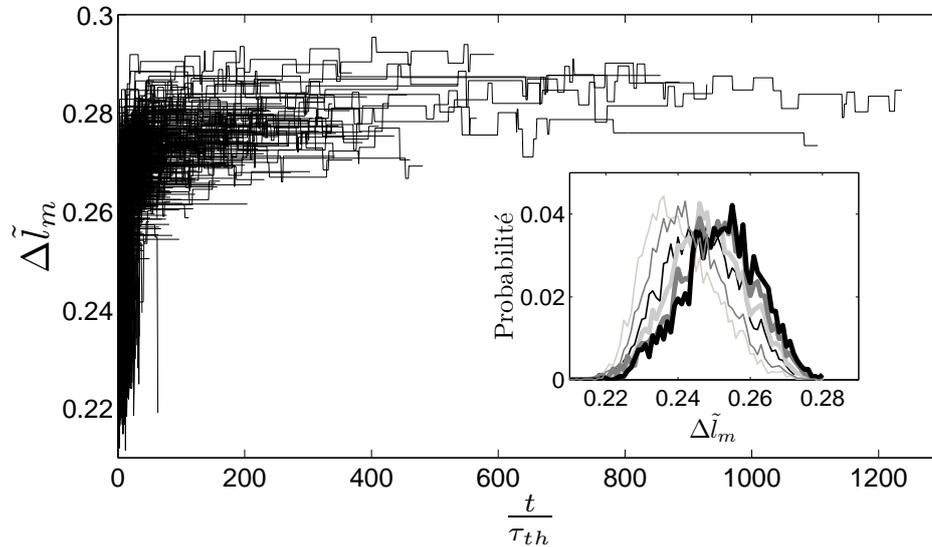


FIGURE 4.12 – Pente moyenne des blocs centraux $\Delta\tilde{l}_m$ pendant une période d'événement "arrêt" successif pour 30 blocs et $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et $2A_\theta = 0.0074$. Les données de plusieurs périodes d'événements "arrêt" successifs sont superposés. Encadré : la distribution de $\Delta\tilde{l}_m$ pour les six premiers demi cycles d'une phase "arrêt". La distribution de probabilité de la pente moyenne $\Delta\tilde{l}_m$ se décale progressivement vers les grandes valeurs cycle après cycle

de débloquent le système devient donc de plus en plus petite. Une observation similaire peut être faite pour l'autre "bloc primordial" (le bloc 23) au cours d'une dilatation thermique.

De plus, nous pouvons justifier une augmentation de la pente au cours de la phase "arrêt" à partir de l'explication suivante. Dans cette phase, il arrive que le bloc 8 se déstabilise mais que le système reste pour autant "à l'arrêt". Dans ce cas, la vague de déplacement est arrêtée au milieu de la chaîne de bloc. Un cas extrême est celui où le bloc 8 bouge mais s'immobilise avant de réussir à mettre en mouvement le bloc 9. La longueur du ressort l_8 entre le bloc 8 et 9 diminue, ce qui conduit à une augmentation de la pente interne des blocs et ainsi accroît la stabilité du système.

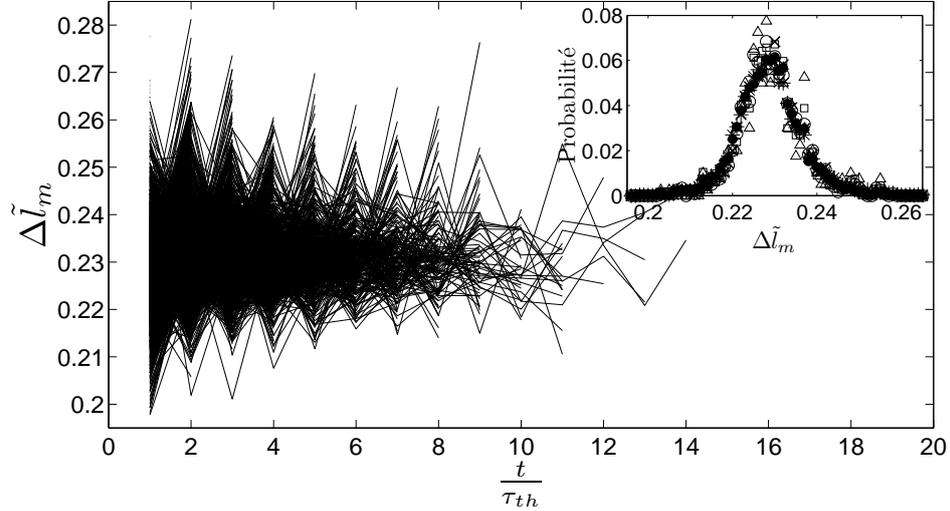


FIGURE 4.13 – Pente moyenne des blocs centraux $\Delta\tilde{l}_m$ pendant une période d'événements "glissement" successifs pour 30 blocs et $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et $2A_\theta = 0.0074$. Les données de plusieurs périodes d'événements "glissement" successifs sont superposées. Encadré : la distribution de $\Delta\tilde{l}_m$ pour les six premiers demi cycles d'une phase "glissement". La distribution de probabilité de la pente moyenne $\Delta\tilde{l}_m$ est constante cycle après cycle

4.3 Discussion

Le régime intermittent décrit plus haut a lieu sur une certaine gamme d'amplitude de variations de température et pour un certain jeu de paramètre. Nous étudions ici le rôle de la différence entre le coefficient de friction statique et dynamique et le rôle du nombre de blocs dans la dynamique intermittente du système.

4.3.1 Rôle du coefficient de friction statique

Lors de l'étude de l'arrangement mécanique interne des blocs nous avons déjà mis en évidence l'importance de l'écart entre les coefficients statique et dynamique des blocs frictionnels sur le comportement de l'ensemble de la chaîne. Nous étudions ici les répercussions de ce changement sur la loi gouvernant le déplacement moyen du système et sur la gamme d'amplitude pour laquelle on peut considérer qu'il évolue de façon intermittente. De plus, nous disposons d'une expression analytique pour cette vitesse de reptation lorsque $\mu_s = \mu_d$. Ainsi étudier la courbe de reptation en faisant tendre le

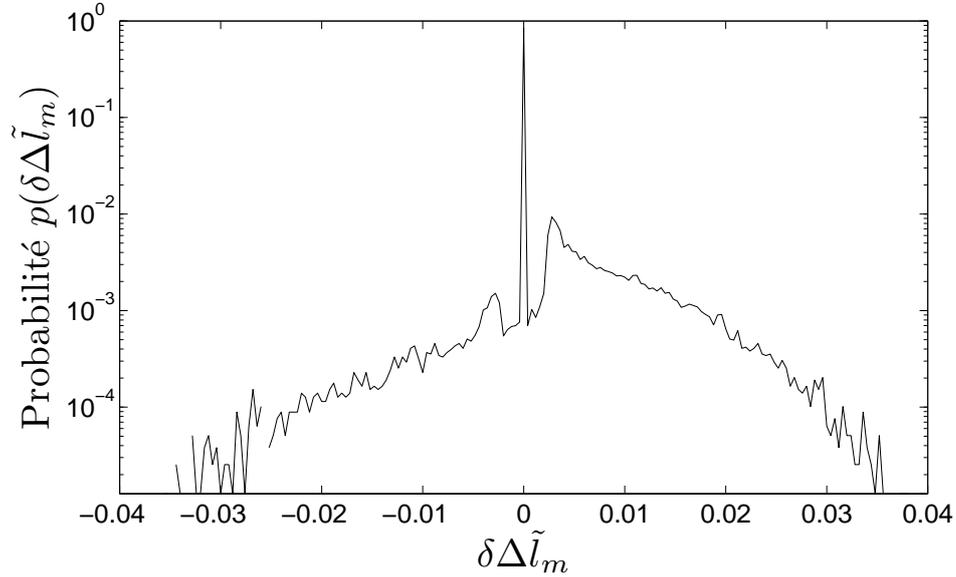


FIGURE 4.14 – Distribution de l'accroissement de la pente moyenne des blocs centraux $\delta\Delta\tilde{l}_m$, pendant une période d'événements "arrêt" successifs pour 30 blocs et $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et $2A_\theta = 0.0074$.

coefficient de friction statique vers le coefficient de friction dynamique est un moyen de nous conforter sur la validité de notre approche numérique.

La figure 4.16 représente la vitesse du centre de masse du système en fonction de $2A_\theta$ pour différentes valeurs de l'écart entre μ_s et μ_d . On trace également sur cette figure, la prédiction théorique obtenue en prenant ces deux coefficients égaux donnés par l'équation 4.1. On observe que l'écart entre la prédiction théorique et la mesure numérique diminue à mesure que l'écart entre μ_s et μ_d décroît. A la limite où ces 2 coefficients sont égaux, on en déduit que la mesure numérique s'accorde à la prédiction théorique.

De plus, la différence entre les courbes numériques et théoriques pour des amplitudes proches de la transition peut être directement attribuée à l'existence de ce régime intermittent. Pour confirmer cette hypothèse nous traçons sur la figure 4.18, l'écart type de la distribution des sauts du centre de masse du système en fonction de A_θ pour différentes valeurs de l'écart entre μ_s et μ_d . Nous normalisons cet écart type par $\mu_s - \mu_d$ parce que dans le régime des amplitudes inférieures à la transition il y a une relation de proportionnalité entre ces 2 quantités (Fig.4.20). Une relation de proportionnalité entre ces 2 quantités est également vérifiée dans le régime d'écoulement continu (non montré ici). De plus dans ces deux régimes l'écart type de la distribu-

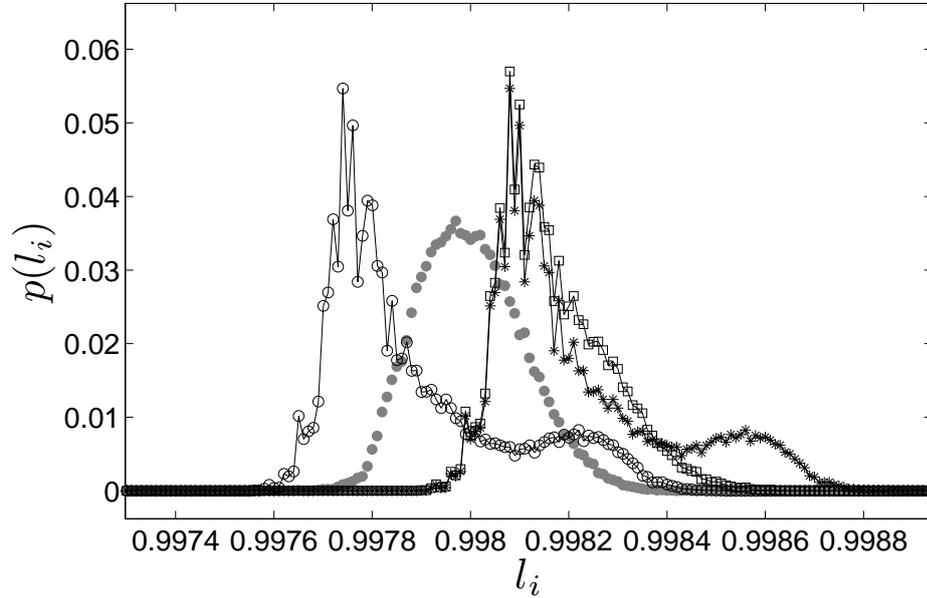


FIGURE 4.15 – Distribution de différentes longueurs de ressort l_i . Les disques gris représentent celle de l_7 après une contraction, les carrés noirs, celle de l_8 après une dilatation, les étoiles noires celle de l_8 après une contraction, les cercles noirs celle de $l_8 - (\mu_s mg \cos \alpha - mg \sin \alpha)$ ($l_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et $2A_\theta = 0.0074$)

tion est presque constant lorsque l'amplitude des cycles thermiques change. On peut donc grâce à cette courbe visualiser facilement l'étendue du régime intermittent. On vérifie ainsi que la gamme d'amplitude dans laquelle ce comportement est observée diminue avec l'écart entre μ_s et μ_d . L'intermittence est donc causée par l'existence d'un coefficient de friction statique différent du coefficient de friction dynamique.

4.3.2 Rôle du nombre de blocs

Dans ce paragraphe, nous considérons un bloc solide de masse M , de longueur L , de section $S(h \times l)$, possédant un module d'Young Y et une densité ρ . Nous souhaitons étudier l'influence du nombre fini (la limite continue nécessite de changer les équations régissant la dynamique de l'interface frictionnelle [45]) de points de contact N sur la dynamique du système. Dans ce cadre, la raideur k du ressort est égale à $\frac{NYS}{L}$ et la vitesse du système vérifie l'expression (4.1). Cette formule montre que la vitesse de ce système de taille

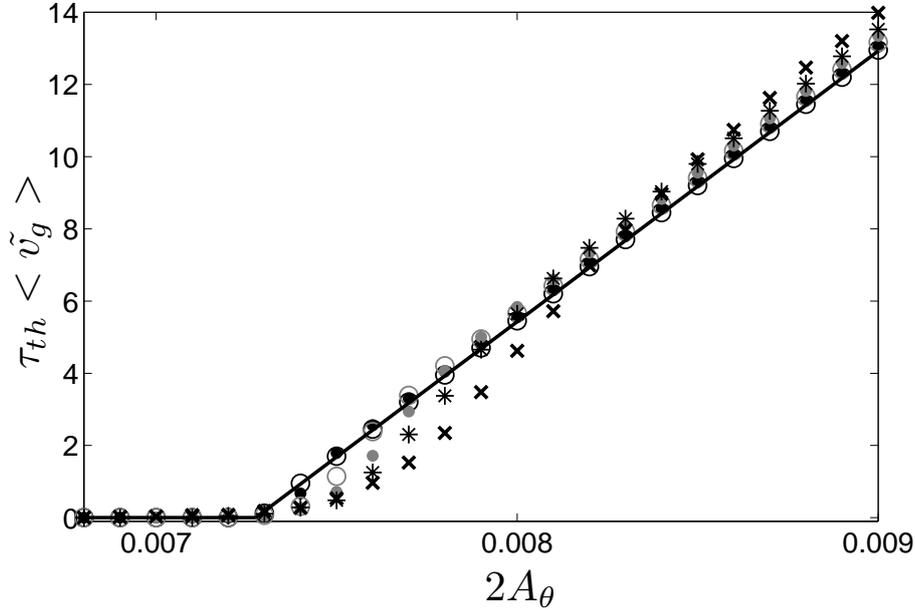


FIGURE 4.16 – Vitesse du centre de masse du système en fonction des variations de température pour $N = 30$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$ et différentes valeurs de μ_s [$\mu_s = 0.51$ (cercles noirs), 0.55 (disques noirs), 0.6 (cercles gris), 0.65 (disques gris), 0.7 (étoiles) et 0.8 (croix)]

L ne dépend pas du nombre de points de contact. Nous traçons sur la figure 4.19 le déplacement du centre de masse du système en fonction de l'amplitude des cycles thermiques pour un coefficient de friction statique différent du coefficient de friction dynamique. On observe qu'à grande amplitude, la reptation du système ne dépend pas de N . Cependant proche de la transition, un solide comportant un grand nombre de points de contact exhibe une dynamique intermittente sur une gamme d'amplitude de température plus petite (Fig. 4.20). Les variations de contrainte interne sont moyennées sur un plus grand nombre de blocs ce qui conduit à une dynamique plus régulière du centre de masse.

4.3.3 Conclusion

Nous avons étudié ici la dynamique d'une chaîne de blocs placée sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = \arctan(0.25)$ avec l'horizontale. Proche de la transition prédite analytiquement, nous avons observé que la dynamique de la chaîne est intermittente. Des périodes d'arrêt et des périodes de glissement

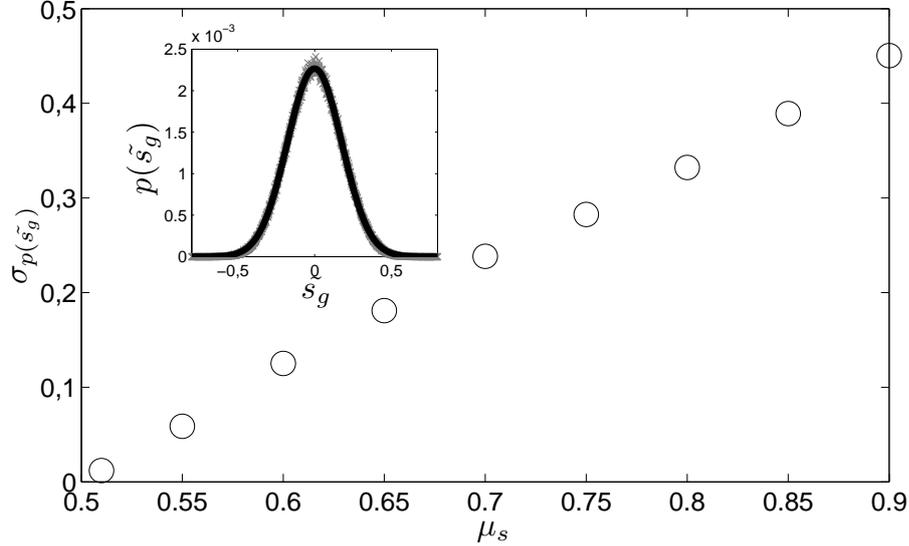


FIGURE 4.17 – Ecart type de la distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse en fonction de μ_s pour $N=30$, $2A_\theta = 0.007$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$. Encadré : Distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse pour $\mu_s = 0.6$ et son interpolation par une fonction gaussienne (en trait plein)

se succèdent. Bien que les trajectoires semblent dans ce cas chaotique, une description statistique de celles-ci est possible parce que, d'une part, ces indicateurs sont reproductibles (ils ne dépendent pas du temps numérique utilisé) et, d'autre part, un régime d'écoulement stationnaire est atteint. Nous montrons alors que cette dynamique existe lorsqu'il y a une différence entre le coefficient de friction statique et dynamique et que le nombre de points de contact du système est petit.

Cette dernière remarque nous pousse donc à relier nos observations numériques à des observations expérimentales dans les milieux granulaires. Le premier système expérimental auquel on peut connecter notre modèle est la dynamique intermittente d'une colonne de grains soumise à des cycles thermiques [26]. Bien que les 2 systèmes soient très différents, on peut calculer l'ordre de grandeur de la température de transition prédite par l'équation (4.1) dans le cas de la colonne de grains et la comparer à la mesure expérimentale. En notant R le rayon des billes de verre, δ leur interpénétration lorsqu'elles se déforment élastiquement, et Y leur module d'Young, on a $k \sim Y(R\delta)^{1/2}$. La pression moyenne P dans la colonne de grains est donnée

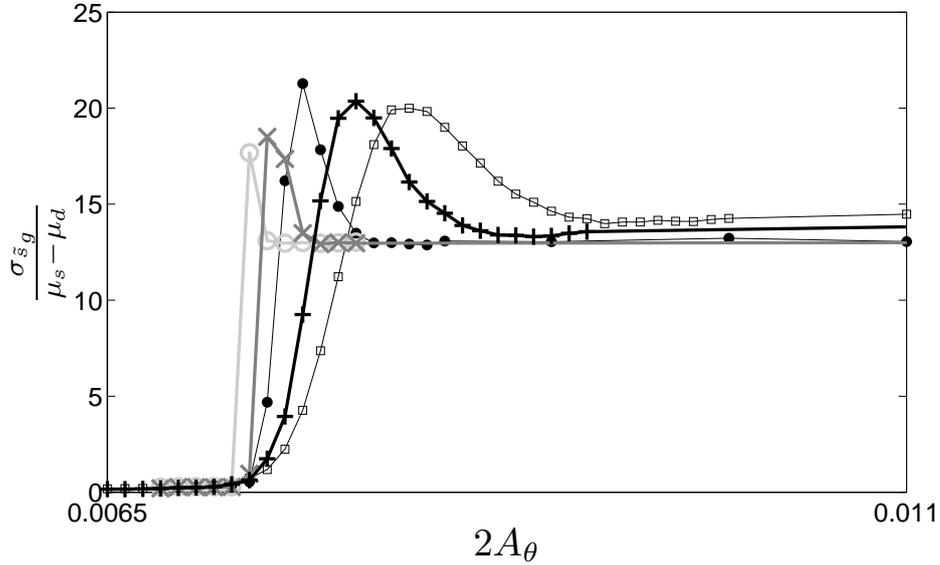


FIGURE 4.18 – Ecart type de la distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse normalisé par $\mu_s - \mu_d$ en fonction de $2A_\theta$ pour $N=30$, $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$ et $\mu_s = 0.51$ (cercles gris), $\mu_s = 0.55$ (croix grises), $\mu_s = 0.6$ (étoiles noires), $\mu_s = 0.7$ (croix noires), $\mu_s = 0.8$ (carrés noirs)

par la pression Janssen $P \sim \rho g D_v$ où D_v est le diamètre de la colonne et ρ la masse volumique du verre. En égalant la force élastique et la pression exercée sur les grains, on obtient un ordre de grandeur de la raideur du système $k \sim R(\rho g D_v Y^2)^{1/3}$. La taille d'un bloc l_0 correspond ici au diamètre des billes égal à $2R$ et le nombre de bloc N est égal à $\frac{D_v}{2R}$. Dans ce cas, la température de transition vaut $A_\theta^* = (\rho g D_v / Y)^{2/3}$. En prenant $\rho \sim 2.10^3$, $D_v \sim 1\text{cm}$ et $Y \sim 20\text{GPa}$, $A_\theta^* = 5.10^{-6}$, ce qui avec un coefficient de dilatation thermique de l'ordre de 3.10^{-6}K^{-1} conduit à une température de transition de l'ordre de 1K. Expérimentalement, la valeur mesurée est de 3K. L'existence d'une transition similaire et la valeur proche des températures critiques nous encourage à comparer les propriétés statistiques de cette expérience et de notre modèle. Elles s'avèrent cependant bien différentes. En effet, la distribution des sauts de compaction est gaussienne dans la colonne de grains. De plus ces déplacements sont des événements isolés. En comparaison, notre modèle exhibe une distribution de taille de sauts bivaluée, la durée d'une période de glissement est distribuée suivant une loi exponentielle alors que celle d'une période d'arrêt obéit plutôt à une loi de puissance [27].

Ces comportements statistiques se retrouvent dans deux autres systèmes

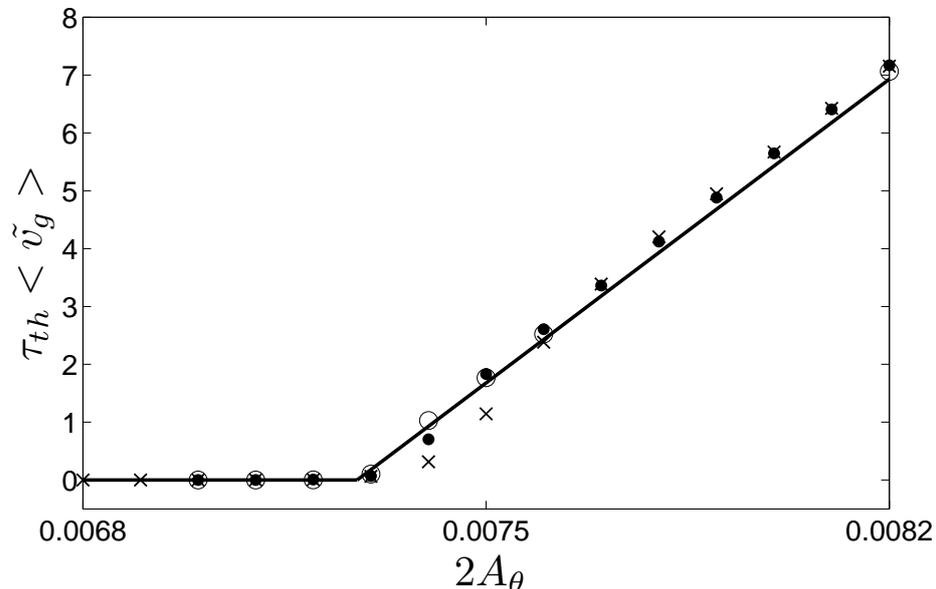


FIGURE 4.19 – Vitesse du centre de masse du système en fonction de l'amplitude de la perturbation thermique pour $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d=0.5$, $\mu_s=0.6$ et différentes valeurs du nombre de points de contact N . $N=30$ (croix), 60 (cercles) et 120 (disques). La ligne en trait plein correspond à la prédiction analytique

granulaires denses. Premièrement, la vidange d'un silo de grains pour une ouverture proche de celle prédite par la loi de Beverloo présente une distribution exponentielle des durées d'écoulement. Lorsque pour débloquer le système, des vibrations mécaniques lui sont appliquées, la distribution des temps d'arrêt est distribuée en loi de puissance, l'exposant variant avec l'amplitude de la perturbation [37, 38, 53, 54]. La dynamique d'un intrus dans un milieu granulaire vibré présente également une dynamique intermittente. Les périodes d'arrêt sont distribuées elles aussi suivant une loi de puissance d'exposant $-\frac{3}{2}$ [35]. Trouver une loi de puissance d'exposant $-\frac{3}{2}$ pour la distribution de durée des périodes inactives dans un système présentant une dynamique intermittente est une caractéristique répandue dans de nombreux systèmes hors équilibre. Cela correspond à la distribution statistique du premier temps de retour à son point de départ d'une marche aléatoire. Dans notre système numérique et dans les expériences de vidange de silo sous vibration mécanique [37], l'exposant de la loi de puissance dépend de l'amplitude de la perturbation. Bien que le lien entre ces deux sujets est difficile à clairement identifier, les mécanismes physiques mis en cause sont similaires. En effet, la gravité est

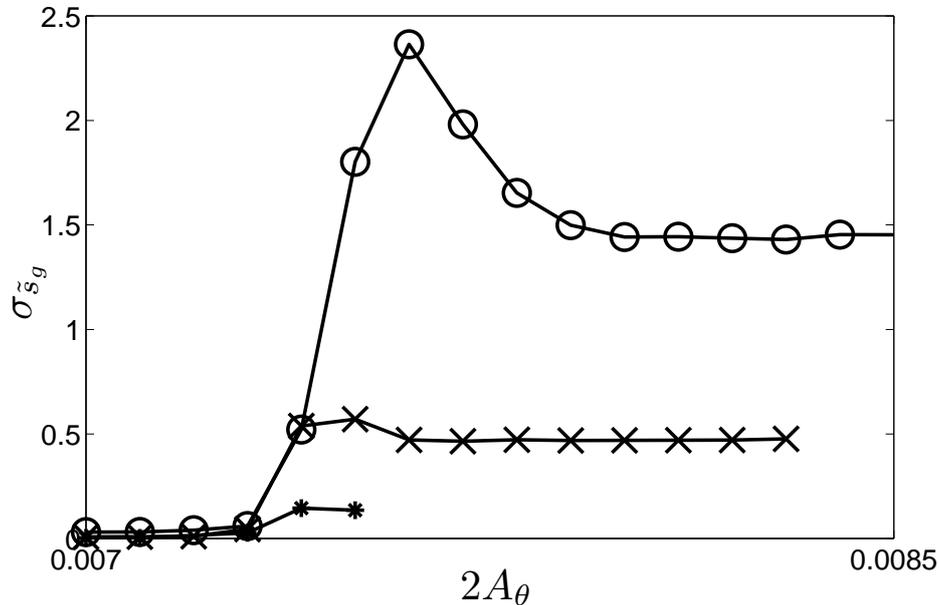


FIGURE 4.20 – Ecart type de la distribution de probabilité de la taille des sauts du centre de masse en fonction de $2A_\theta$ pour différents nombres de points de contact $N=30$ (cercles noirs), $N=60$ (croix noires) et $N=120$ (étoiles noires), $\tilde{l}_0 = 10^3$, $\mu_d = 0.5$ et $\mu_s = 0.6$

le moteur du mouvement, la friction permet de stabiliser le système mécanique, les perturbations engendrées au bord du système sont repercutées sur l'ensemble de la structure grâce à l'élasticité de ces constituants.

La suite...

Nous avons préféré ici étudier un système donné et tenter d'identifier la cause de l'intermittence observée. Un diagramme de phase complet avec comme variables l'angle du système, le nombre de blocs, le coefficient de friction statique et l'amplitude des cycles de température reste à établir. Comme la dynamique interne est cruciale à l'existence de cette intermittence, il serait intéressant d'étudier également cette transition pour différentes lois de friction et de regarder si les caractéristiques observées sont communes à ces systèmes.

De plus, nous avons analysé ici le comportement du système proche de sa transition entre arrêt et mouvement d'ensemble. Proche de l'angle d'ava-

lanche $\arctan \mu_d$, la chaîne de bloc est également dans un état critique. Une infime perturbation permet de créer un événement de glissement de grandes amplitudes. Il pourrait être intéressant d'étudier la déstabilisation de ce système soumis à des cycles de température.

Enfin, ce modèle initialement proposé pour capturer les propriétés de la compaction de la colonne de grains soumise à des cycles de température ne permet pas de reproduire la dynamique observée expérimentalement. Lorsque le bloc à l'extrémité basse de la chaîne est fixée, la surface libre oscille à chaque cycle autour d'une position moyenne constante. Une dilatation décompacte le système de la même quantité que la contraction thermique précédente. Pour rendre une dilatation différente d'une contraction, il est possible d'ajouter une variation de la contrainte normale N avec la température. En effet, lorsque le matériau granulaire se dilate, la force qu'il exerce sur les parois du tube est plus grande ce qui accroît la force de cisaillement nécessaire à la mise en mouvement d'un bloc. Au contraire, lors d'une contraction, la force normale diminue, facilitant le mouvement des blocs. Cependant cela ne permettra certainement pas de reproduire une dynamique intermittente. En effet, lorsqu'aucun déplacement ne sera engendré au cours d'un cycle thermique, les perturbations thermiques suivantes ne créeront pas de déplacement non plus. Suivant les observations expérimentales de Kabla [40], le matériau granulaire se texture même en l'absence de compaction macroscopique. Il est donc intéressant de modéliser le contact frictionnel d'un bloc par une multitude de microcontacts comme le propose Braun [13]. Ainsi les cycles de température pourront changer la distribution de ces microcontacts sans créer systématiquement un glissement complet du bloc. Le bloc fluierait lentement alors qu'un saut de compaction correspondrait à un décrochement du bloc entier.

Chapitre 5

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'influence des variations de température sur la stabilité mécanique d'un système frictionnel.

Une première partie expérimentale a consisté à étudier la dynamique de compaction d'une colonne de grains. Un effort particulier a été fourni pour limiter les effets mécaniques liés à la dilatation des parois. Pour cela, une colonne de grains est chauffée par l'effet Joule d'un fil parcouru par un courant sinusoïdal la traversant sur son axe. On peut ainsi contrôler la profondeur de pénétration du profil de température généré grâce à la fréquence des cycles de courant électrique imposé. La choisir plus petite que le rayon du tube permet de s'affranchir de la dilatation des parois extérieures. De plus, encastrier le fil préalablement tendu permet de supprimer l'effet de son cisaillement résiduel sur l'empilement de grains. Dans ces conditions, nous montrons que la compaction du matériau granulaire subsiste. Cependant la grande sensibilité du système à ses conditions initiales et la durée des expériences (entre 1 et 10 jours) nous empêchent de trouver une loi explicite de compaction en fonction des paramètres du problème. Nous étudions donc uniquement le rôle qualitatif de l'amplitude et de la fréquence des cycles de température sur l'efficacité de la compaction. Nous vérifions premièrement qu'en accord avec la bibliographie existante, une amplitude de cycle de température croissante augmente l'efficacité de la compaction. De plus, nous observons qu'une fréquence de cycle thermique plus grande accroît également la vitesse de compaction. Ainsi le matériau granulaire est déstabilisé préférentiellement par des gradients de température. Ceci constitue une preuve que le cisaillement induit par cyclage thermique est la cause principale des réorganisations. Enfin ce dispositif nous permet d'observer la compaction de la même colonne de grains à différentes hauteurs. On peut ainsi savoir si la compaction intermittente observée jusqu'à lors à la surface libre uniquement provient de la

remontée lente de bulles de densité. Cette hypothèse initiale s'avère fautive puisque ces événements de glissement sont « simultanés » tout au long de la colonne à l'échelle d'un cycle thermique.

Dans le même temps, nous nous sommes intéressés également à la stabilité mécanique d'un système élastique frictionnel modèle dans le champ de pesanteur soumis à des cycles thermiques. Ce modèle a été proposé dans sa version continue par Moseley, il y a plus d'un siècle, pour expliquer la reptation des tuiles d'une cathédrale soumises à des cycles de température jour/nuit. En prenant en compte l'élasticité du matériau, une amplitude de température critique en dessous de laquelle le système ne bouge plus, apparaît. L'application de cycles de température pour un système discret constitué de blocs frictionnels reliés par des ressorts (modèle de Burridge Knopoff) possédant un coefficient de friction statique différent du coefficient de friction dynamique conduit à l'apparition, à la transition, d'une dynamique intermittente de glissement. En effet seulement certains cycles engendrent un déplacement d'ensemble du système. Ce résultat rappelle la transition observée expérimentalement lors de l'étude de la compaction d'une colonne de sable soumise à des cycles thermiques. On montre tout d'abord que dans notre modèle cette dynamique est reliée à la nature chaotique du mouvement des blocs solides. Plus précisément, c'est l'écart entre le coefficient de friction statique et dynamique qui conduit à cette intermittence. Lorsque la différence entre ces 2 coefficients tend vers 0, on retrouve la prédiction théorique analytique, nous confortant sur la validité de notre approche numérique. De plus, nous mettons en évidence qu'un « petit » nombre de constituants est nécessaire à l'existence de ce régime. L'écoulement de milieux granulaires denses doit donc présenter de manière plus générale ce type d'intermittence. Les propriétés statistiques de notre modèle s'avèrent certes différentes de celles mises en évidence expérimentalement lors de la compaction par sauts de la colonne de sable à faible amplitude de cycles de température. Cependant un autre dispositif mettant en jeu un matériau granulaire présente des caractéristiques très similaires : la vidange intermittente d'une colonne de grains soumise à des vibrations mécaniques.

Il reste encore beaucoup de résultats expérimentaux à établir dans le cas de la colonne de grains soumis à des cycles de température. Nous aimerions tout d'abord isoler les paramètres contrôlant la taille des sauts de compaction du système. De plus, en travaillant à des amplitudes de cycles de température plus grandes, nous espérons augmenter l'efficacité de la compaction pour pouvoir négliger le large bruit inhérent à la préparation du système devant l'évolution moyenne de sa hauteur. Conjointement à cette étude, nous aimerions étudier le lent fluage d'une couche de grains soumise à des cycles de température sur un plan incliné. Sur ce nouveau dispositif, la contrainte

normale est constante au cours des cycles de température contrairement au dispositif utilisant la colonne de grains. Nous pourrions ainsi tester l'effet propre du cisaillement sur la dynamique de compaction du système. Il serait également intéressant de mettre en parallèle les résultats expérimentaux obtenus sur ce nouveau dispositif avec les simulations numériques de la chaîne de blocs frictionnels s'écoulant sur un plan incliné.

Bibliographie

- [1] Allen, M. P., Tildesley, D. J., (1987). Computer Simulation of Liquids, Clarendon, Oxford
- [2] Alarcón, H., Géminard, J. C., Melo, F., (2012). Effect of cohesion and shear modulus on the stability of a stretched granular layer, *Physical Review E*, **86** (6), 061303.
- [3] Amundsen, D. S., Scheibert, J., Thøgersen, K., Trømborg, J., Malthes-Sørensen, A. (2012). 1D model of precursors to frictional stick-slip motion allowing for robust comparison with experiments, *Tribology Letters*, **45** (2), 357-369.
- [4] Aumaître, S., Fauve, S., McNamara, S., Poggi, P. (2001). Power injected in dissipative systems and the fluctuation theorem. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **19** (3), 449-460.
- [5] Baumberger, T., Caroli, C. (2006). Solid friction from stick-slip down to pinning and aging. *Advances in Physics*, **55** (3-4), 279-348.
- [6] Ben-David, O., Cohen, G., Fineberg, J. (2010). The dynamics of the onset of frictional slip. *Science*, **330** (6001), 211-214.
- [7] Bertho, Y. (2003). Dynamiques d'écoulements gaz/particules en conduite verticale (Doctoral dissertation, Ecole Polytechnique X).
- [8] Berthoud, P., Baumberger, T., G'sell, C., Hiver, J. M. (1999). Physical analysis of the state-and rate-dependent friction law : Static friction. *Physical review B*, **59** (22), 14313.
- [9] Blanc, B., Pugnaroni, L. A., Géminard, J. C. (2011). Creep motion of a model frictional system. *Physical Review E*, **84** (6), 061303.
- [10] Bonamy, D., Laurent, L., Claudin, P., Bouchaud, J. P., Daviaud, F. (2000). Electrical conductance of a 2D packing of metallic beads under thermal perturbation. *EPL (Europhysics Letters)*, **51** (6), 614.
- [11] Bouasse, H. (1920). Statique. Bibliothèque Scientifique de l'Ingénieur et du Physicien, pp. 259-261

- [12] Braun, O. M., Barel, I., Urbakh, M. (2009). Dynamics of transition from static to kinetic friction. *Physical review letters*, **103**(19), 194301.
- [13] Braun, O. M., Peyrard, M. (2013). Role of aging in a minimal model of earthquakes. *Physical Review E*, **87** (3), 032808.
- [14] Burridge, R., Knopoff, L. (1967). Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **57** (3), 341-371.
- [15] Carlson, J. M., Langer, J. S. (1989). Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Physical Review Letters*, **62** (22), 2632-2635.
- [16] Carlson, J. M., Langer, J. S. (1989). Mechanical model of an earthquake fault. *Physical Review A*, **40** (11), 6470.
- [17] Chen, K., Cole, J., Conger, C., Draskovic, J., Lohr, M., Klein, K., ... Schiffer, P. (2006). Granular materials : Packing grains by thermal cycling. *Nature*, **442** (7100), 257-257.
- [18] Chen, K., Harris, A., Draskovic, J., Schiffer, P. (2009). Granular fragility under thermal cycles. *Granular Matter*, **11** (4), 237-242.
- [19] Claudin, P., Bouchaud, J. P. (1997). Static avalanches and giant stress fluctuations in silos. *Physical review letters*, **78** (2), 231-234.
- [20] Clement, E., Serero, Y., Lanuza, J., Rajchenbach, J., Duran, J. (1997). Fluctuating aspects of the pressure in a granular column. *Powders and Grains*, 97, 349.
- [21] Crassous, J., Bocquet, L., Ciliberto, S., Laroche, C. (1999). Humidity effect on static aging of dry friction. *EPL (Europhysics Letters)*, **47** (5), 562.
- [22] Croll, J. G. (2009). Thermally induced pulsatile motion of solids. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 465(2103), 791-807.
- [23] Daerr, A. Dynamique des avalanches. Thèse, Université Paris VII (2000)
- [24] de Gennes, P. G. (1999). Thermal expansion effects in a silo. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(2), 267-274.
- [25] Divoux, T. (2010). Invited review : Effect of temperature on a granular pile. *Papers in Physics*, 2, 020006.
- [26] Divoux, T., Gayvallet, H., Géminard, J. C. (2008). Creep motion of a granular pile induced by thermal cycling. *Physical review letters*, **101** (14), 148303.
- [27] Divoux, T. (2009). Bruit et fluctuations dans les écoulements de fluides complexes (Doctoral dissertation, Ecole normale supérieure de lyon-ENS LYON).

- [28] Divoux, T., Vassilief, I., Gayvallet, H., Géminard, J. C. (2009, June). Aging of a granular pile induced by thermal cycling. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1145, p. 473).
- [29] Duran, J. (1997). *Sables, poudres et grains*, Eyrolles Sciences, Paris (1997)
- [30] Géminard, J. C., Gayvallet, H. (2001). Thermal conductivity of a partially wet granular material. *Physical Review E*, **64** (4), 041301.
- [31] Géminard, J.-C. (2003). Quelques propriétés mécaniques des matériaux granulaires immergés, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble I, p. 32
- [32] Géminard, J.-C., Bertin, E. (2010). Aging of the frictional properties induced by temperature variations *Physical Review E*, **82**, 056108
- [33] Greenwood, J. A., Williamson, J. B. P. (1966). Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442), 300-319.
- [34] Geng, J., Longhi, E., Behringer, R. P., Howell, D. W. (2001). Memory in two-dimensional heap experiments. *Physical Review E*, **64** (6), 060301.
- [35] Harich, R., Darnige, T., Kolb, E., Clément, E. (2011). Intruder mobility in a vibrated granular packing. *EPL (Europhysics Letters)*, **96** (5), 54003.
- [36] Jaeger, H. M., Liu, C. H., Nagel, S. R. (1989). Relaxation at the angle of repose. *Physical Review Letters*, **62** (1), 40-43.
- [37] Janda, A., Maza, D., Garcimartín, A., Kolb, E., Lanuza, J., Clément, E. (2009). Unjamming a granular hopper by vibration. *EPL (Europhysics Letters)*, **87** (2), 24002.
- [38] Janda, A., Harich, R., Zuriguel, I., Maza, D., Cixous, P., Garcimartín, A. (2009). Flow-rate fluctuations in the outpouring of grains from a two-dimensional silo. *Physical Review E*, **79** (3), 031302.
- [39] Josserand, C., Tkachenko, A. V., Mueth, D. M., Jaeger, H. M. (2000). Memory effects in granular materials. *Physical review letters*, **85** (17), 3632-3635.
- [40] Kabla, A., Debrégeas, G. (2004). Contact dynamics in a gently vibrated granular pile. *Physical review letters*, **92** (3), 035501.
- [41] Kob, W., Andersen, H. C. (1994) Scaling behavior in the β -relaxation regime of a supercooled Lennard-Jones mixture. *Physical review letters*, **73**, 1376.
- [42] Kob W. and Barrat J. L. Aging effects in a lennard-jones glass. *Phys. Rev. Lett.*, 78(4581), 1997.

- [43] Knight, J. B., Fandrich, C. G., Lau, C. N., Jaeger, H. M., Nagel, S. R. (1995). Density relaxation in a vibrated granular material. *Physical review E*, **51** (5), 3957.
- [44] L. Knopoff, X. X. Ni, *Geophys. J. Int.* **147**, F1–F6 (2001)
- [45] L. Knopoff, J. O. Mouton, R. Burridge, *Geophys.J.R.astr.Soc* **35**, 169-184 (2009)
- [46] Krapivsky, P. L., Ben-Naim, E. (1994). Collective properties of adsorption-desorption processes. *Journal of Chemical Physics*, **100**, 6778-6782.
- [47] Lechenault, F. (2007). La transition de 'Jamming' dans un milieu granulaire bidimensionnel : Statique et dynamique d'un système athermique modèle (Doctoral dissertation, Université Paris Sud-Paris XI).
- [48] Liu, A. J., Nagel, S. R. (1998). Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more. *Nature*, **396** (6706), 21-22.
- [49] Liu, C. H., Nagel, S. R., Schecter, D. A., Coppersmith, S. N., Majumdar, S., Narayan, O., Witten, T. A. (1995). Force Fluctuations in Bead Packs. *Science*, **269** (5223), 513-515.
- [50] Liu, C. H. (1994). Spatial patterns of sound propagation in sand. *Physical Review B*, **50** (2), 782.
- [51] Majmudar, T. S., Behringer, R. P. (2005). Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, **435** (7045), 1079-1082.
- [52] Maegawa, S., Suzuki, A., Nakano, K. (2010). Precursors of global slip in a longitudinal line contact under non-uniform normal loading. *Tribology Letters*, **38** (3), 313-323.
- [53] Mankoc, C., Janda, A., Arevalo, R., Pastor, J. M., Zuriguel, I., Garcimartín, A., Maza, D. (2007). The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, **9** (6), 407-414.
- [54] Mankoc, C., Garcimartín, A., Zuriguel, I., Maza, D., Pugnaloni, L. A. (2009). Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo. *Physical Review E*, **80** (1), 011309.
- [55] Marty, G. (2005). Comportement vitreux des systèmes athermiques : étude expérimentale d'un matériau granulaire bidimensionnel (Doctoral dissertation, Université Paris Sud-Paris XI).
- [56] Maxwell, J. C. (1864). L. on the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **27** (182), 294-299.

- [57] Mehta, A., Barker, G. C. (1991). Vibrated powders : A microscopic approach. *Physical review letters*, **67** (3), 394-397.
- [58] Moseley, H. (1853). The mechanical principles of engineering and architecture, Eds. Wiley et Halstead, New York
- [59] Moukarzel, C. F. (1998). Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials. *Physical review letters*, **81** (8), 1634-1637.
- [60] Nicolas, M., Duru, P., Pouliquen, O. (2000). Compaction of a granular material under cyclic shear. *The European Physical Journal E*, **3** (4), 309-314.
- [61] Nowak, E. R., Knight, J. B., Ben-Naim, E., Jaeger, H. M., Nagel, S. R. (1998). Density fluctuations in vibrated granular materials. *Physical Review E*, **57**, 1971.
- [62] O'Hern, C. S., Silbert, L. E., Liu, A. J., Nagel, S. R. (2003). Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Physical Review E*, **68** (1), 011306.
- [63] Perge, C., Aguirre, M. A., Gago, P. A., Pagnaloni, L. A., Le Tourneau, D., Géminard, J. C. (2012). Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo. *Physical Review E*, **85** (2), 021303.
- [64] Philippe, P., Bideau, D. (2002). Compaction dynamics of a granular medium under vertical tapping. *EPL (Europhysics Letters)*, **60** (5), 677.
- [65] O. Pouliquen "Les milieux granulaires : entre fluide et solide", (Cours de DEA, initialement Cours ENSTA)(disponible à <http://iusti.polytech.univ-mrs.fr/pouliquen/enseignement.htm>)
- [66] Radjai, F., Wolf, D. E., Jean, M., Moreau, J. J. (1998). Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical review letters*, **80** (1), 61-64.
- [67] Radjai, F., Jean, M., Moreau, J. J., Roux, S. (1996). Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Physical review letters*, **77** (2), 274-277.
- [68] Ramos, O., Altshuler, E., Måløy, K. J. (2009). Avalanche prediction in a self-organized pile of beads. *Physical review letters*, **102** (7), 078701.
- [69] Restagno, F. (2000). Interactions entre contacts solides et cinétique de la condensation capillaire. Aspects macroscopiques et aspects microscopiques (Doctoral dissertation).
- [70] Richard, P., Nicodemi, M., Delannay, R., Ribiere, P., Bideau, D. (2005). Slow relaxation and compaction of granular systems. *Nature materials*, **4** (2), 121-128.

- [71] Scheibert, J., Dysthe, D. K. (2010). Role of friction-induced torque in stick-slip motion. *EPL (Europhysics Letters)*, **92** (5), 54001.
- [72] Tsoungui, O., Vallet, D., Charmet, J. C. (1998). Use of contact area trace to study the force distributions inside 2D granular systems. *Granular Matter*, **1** (2), 65-69.
- [73] Umbanhowar, P., van Hecke, M. (2005). Force dynamics in weakly vibrated granular packings. *Physical Review E*, **72** (3), 030301.
- [74] Vanel, L., Clément, E. (1999). Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **11** (3), 525-533.
- [75] Vanel, L., Howell, D., Clark, D., Behringer, R. P., Clément, E. (1999). Memories in sand : Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles. *Physical Review E*, **60** (5), R5040-R5043.
- [76] Vargas, W. L., McCarthy, J. J. (2007). Thermal expansion effects and heat conduction in granular materials. *Physical Review E*, **76** (4), 041301.
- [77] de Sousa Vieira, M. (1992). Self-organized criticality in a deterministic mechanical model. *Physical Review A*, **46** (10), 6288.
- [78] de Sousa Vieira, M. (1995). Chaos in a simple spring-block system. *Physics Letters A*, **198** (5), 407-414.
- [79] de Sousa Vieira, M., Lichtenberg, A. J. (1996). Presence of chaos in a self-organized critical system. *Physical Review E*, **53** (2), 1441.
- [80] Wyart, M. (2005). On the Rigidity of Amorphous Solids. arxiv
- [81] <http://www.geo.fr/voyages/vos-voyages-de-reve/namibie-desert-mer-et-savane/desert-du-namib-a-l-ombre-d-une-dune>

