
Étude des rebonds d'une bille dans l'espace des phases

Résumé :

En faisant rebondir une bille sur une lentille concave vibrante, il a été précédemment observé que la position de rebond au centre de la lentille est instable. Cette instabilité a déjà été décrite et caractérisée. Cependant, lorsqu'on souhaite observer ce phénomène avec des amplitudes de vibration de la lentille plus faibles il arrive que la bille, initialement accrochée dans le premier mode périodique, s'immobilise sur le plateau sans raison apparente. L'objectif de ce travail est de trouver les paramètres pertinents du problème, ainsi que d'être capable de prédire en fonction d'un rebond si la bille s'immobilisera ou non lors du suivant. Pour cela, nous nous sommes placés dans un espace des phases de choc qui s'est avéré pertinent, et nous avons pu confronter simulation numérique et observations expérimentales.

Mots clefs : *Mécanique statistique, bille, rebond, bassins d'attraction*

Stage encadré par :

Jean-Christophe GÉMINARD

jean-christophe.geminard@ens-lyon.fr / tél. (+33) 4 72 72 88 65

Laboratoire de Physique

École Normale Supérieure de Lyon

46 Allée d'Italie

69007 Lyon

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE>



Remerciements

Je remercie d'abord mon maître de stage, Jean-Christophe, qui a été présent pour m'orienter lorsque je doutais de la démarche à adopter et me remotiver lorsque je n'obtenais pas autant de résultats que j'aurais aimé. Merci à Antoine Naert, pour sa relecture de ce rapport et la seconde approche de ce qu'est la recherche en laboratoire qu'il m'a donnée. Merci également à mes co-bureaux, dont les précieux conseils sur Matlab et L^AT_EX m'ont épargné bien des prises de tête et des heures sur internet !

Table des matières

Introduction	1
1 Éléments de théorie	1
1.1 Mouvement de chute libre entre deux chocs	1
1.2 Coefficient de restitution	1
1.3 Loi de choc	2
1.4 Position des chocs dans l'espace (v, Φ)	2
2 Montage et techniques expérimentales	3
2.1 Montage	3
2.2 Schéma du dispositif	3
2.3 Principe d'étalonnage du capteur inductif	3
2.3.1 Correction sur le temps de détection des chocs	4
2.3.2 Correction sur l'amplitude (en volt) mesurée	4
2.4 Détection automatique des phases de chacun des rebonds	4
2.4.1 Périodes du plateau	5
2.4.2 Pics du micro	5
2.4.3 Résultat	6
2.5 Repérage de la position (x,y) de la bille	7
2.5.1 Synchroniser les images avec les autres capteurs	7
2.5.2 Connaître l'altitude exacte de la bille à chaque choc	8
3 Travail de recherche et résultats	9
3.1 Mesure du coefficient de restitution de notre système	9
3.2 Trajectoire observée de la bille	9
3.3 Vitesses et phases de choc	9
3.4 Confrontation à la forme prévue pour l'emplacement des points (elliptique)	13
3.5 Autre technique pour repérer nos points expérimentaux dans (v, Φ)	13
3.6 Étude du temps de survie de la bille	14
3.7 Observation d'un "glissement" des phases	15
4 Conclusion et Perspectives	18
Annexe	19

Introduction

Les montages constitués d'un plateau vibrant ainsi que d'une bille rebondissant dessus ont d'abord été utilisés dans les laboratoires de physique pour étudier les phénomènes de transition vers le chaos. En effet, si l'on confère au plateau une forte accélération, la bille a un mouvement chaotique, c'est-à-dire qu'une variation infinitésimale de ses conditions de lancement modifie complètement sa trajectoire ultérieure. Cependant, ceci est irréalisable avec un plateau plan puisque la moindre perturbation causant un mouvement horizontal entraînera une sortie de la bille du dispositif. Pour contraindre le mouvement de la bille à rester sur le plateau vibrant, on choisit une surface qui est incurvée (une lentille concave). Expérimentalement, il a alors été observé que, contrairement à l'intuition qui a mené à construire ce dispositif, la position de la bille est instable : petit à petit, elle se met à osciller autour du centre de la lentille avec une amplitude de plus en plus grande, jusqu'à atteindre une trajectoire quasi-circulaire autour de ce même point. On observe également que, parfois, cette trajectoire n'a pas le temps de s'établir puisque la bille s'immobilise sur le plateau avant que l'instabilité ne s'installe dans un régime stationnaire. L'objectif de cette étude est de caractériser cette immobilisation de la bille : dans quels cas l'observe-t-on ? Peut-on prédire les immobilisations de la bille ? Quels sont les paramètres importants ? C'est à toutes ces questions que ce travail propose de répondre.

1 Éléments de théorie

La trajectoire complète de la bille peut être décomposée en deux parties majeures : un mouvement de chute libre entre deux chocs (la bille est en l'air grâce à la vitesse initiale que le dernier choc lui a conféré) et l'étude de ce qui se passe lors d'un rebond sur le plateau.

1.1 Mouvement de chute libre entre deux chocs

Entre deux chocs successifs de la bille sur le plateau, aucune force autre que la gravité n'est significative. Si l'on est capable de connaître la vitesse de la bille à l'instant juste après un rebond, ainsi que l'altitude à laquelle ce rebond a lieu, on connaît l'altitude à tout instant t ultérieur avant le prochain choc :

$$z(t) = z_{rebond} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

où $z(t)$ est l'altitude à l'instant t , l'origine des temps étant prise sur le rebond, z_{rebond} l'altitude à laquelle se produit le rebond, v_0 la vitesse de la bille juste après le rebond et g l'accélération de la pesanteur. Connaissant ce qui se passe entre deux rebonds successifs, en étudiant ce qui se passe lors d'un rebond on sera capable de reconstruire toute la trajectoire de la bille.

1.2 Coefficient de restitution

On considère une bille rebondissant sur un plateau immobile. À chaque choc, chacun sait que la bille va rebondir de moins en moins haut, du fait des pertes d'énergie (de déformation, principalement). On suppose que ce coefficient ne dépend pas de l'énergie de la bille avant le rebond (il est donc constant). On définit par un indice $(n, n+1, \dots)$ le numéro du choc dont on parle. Quand la distinction est nécessaire, on ajoute un $+$ pour parler de l'instant juste après le choc, ou un $-$ pour l'instant juste avant. Le coefficient de restitution rend compte de la perte de vitesse entre deux chocs. Pour le choc numéroté n , il est défini par l'équation :

$$v_n^+ = -e v_n^-$$

Le plateau étant immobile, on a $v_n^+ = -v_{n+1}^-$ d'après les propriétés d'une chute libre d'où :

$$v_{n+1}^- = e v_n^-$$

On reconnaît une suite géométrique, on peut donc écrire de façon directe : $v_n = e^n v_0$. Or, dans le cas d'une chute libre (comme ici entre deux rebonds), la vitesse avant chaque rebond est proportionnelle au temps entre deux rebonds successifs. On a donc la même relation pour la durée de vol entre deux rebonds :

$$\Delta t_n = e^n \Delta t_0.$$

En considérant le logarithme de cette équation, on se rend compte que mesurer la durée entre les temps de vol sur un plateau immobile nous permet d'obtenir le coefficient de restitution.

$$\ln(\Delta t_n) = n \ln(e) + \ln(\Delta t_0).$$

1.3 Loi de choc

Dans cette partie, on s'intéresse cette fois à l'étude d'une bille rebondissant sur un plateau auquel on fournit une excitation (connue car choisie par l'expérimentateur). Dans notre cas, on note $u(t)$ la vitesse du plateau à l'instant t . Cette vitesse est algébrique : $u(t) > 0$ si le plateau est en phase ascendante et $u(t) < 0$ si le plateau est en phase descendante. Dans ce cas, e est le coefficient qui relie la différence de vitesse entre la bille et le plateau avant la collision, et après celle-ci. C'est-à-dire : $v_n^+ - u_n = -e(v_n^- - u_n)$. Or, on mène cette étude dans le premier mode périodique, donc on sait que $v_n^+ = -v_n^-$ (la vitesse de décollage après un choc est en norme la même que celle de l'atterrissage qui précède). La loi de choc se réécrit alors :

$$v_n(1 - e) = u_n(1 + e).$$

Or, la position du plateau étant imposée par l'opérateur (en imposant $A \sin(\omega t)$) sa vitesse est : $A \omega \cos(\omega t)$. On note $\Phi = \omega t$ la phase du cosinus décrivant la position du plateau lors d'un rebond de la bille. On appellera ces instants "phases de choc" par la suite. On a donc, à chaque rebond :

$$\cos(\Phi_n) = \frac{v_n}{A \omega} \frac{1 - e}{1 + e}.$$

Entre deux chocs, la bille suit un mouvement de chute libre. Elle chute à partir de son apogée pendant une demi-période du plateau. Cela implique que $v_n = \frac{gT}{2} = \frac{\pi g}{\omega}$ avec g l'accélération de la pesanteur, T la période des oscillations du plateau et ω la pulsation du plateau. En remplaçant, on obtient : $\cos(\Phi) = \frac{\pi g}{A \omega^2} \frac{1 - e}{1 + e}$. On définit $\Gamma = \frac{A \omega^2}{g}$ l'accélération réduite. C'est le rapport entre l'accélération du plateau et celle de la pesanteur, seul paramètre de contrôle de notre système (que nous pouvons faire varier en modifiant soit la fréquence, soit l'amplitude de mouvement du plateau). Finalement, on obtient dans la limite de faibles amplitudes de vibration du plateau que $\cos(\Phi) = \frac{\pi}{\Gamma} \frac{1 - e}{1 + e}$. On note cette équation (*).

1.4 Position des chocs dans l'espace (v, Φ)

Le cas expérimental sur lequel repose cette étude est légèrement plus compliqué que ce qui est présenté en 1.3. Cela vient du fait que l'instabilité de la bille (qu'elle ne reste pas au centre de la lentille) cause des variations dans la phase des rebonds (qui n'est donc plus une constante) et la vitesse de choc, puisque la durée entre deux chocs n'est plus constante non plus. L'objectif de cette étude est d'être capable de représenter chaque rebond de la bille dans l'espace (v, Φ) , afin de tenter d'expliquer pourquoi certains d'entre eux amènent à une immobilisation de la bille. Un calcul des perturbations créées par les oscillations de la bille est détaillé en annexe. Le résultat de ce calcul est que les points de l'espace des phases correspondants aux chocs devraient se situer dans une ellipse, dont le calcul donne les propriétés. Ce calcul est détaillé en ANNEXE.

2 Montage et techniques expérimentales

2.1 Montage

Le montage utilisé est composé d'un pot vibrant sur lequel est fixé une lentille concave en plexiglas, de rayon de courbure $R = 15,6$ cm. La bille en acier que nous plaçons dessus a un diamètre de $1,895$ cm. Pour repérer la position du plateau, le pot vibrant a été fixé sur une plaque en métal (qui est donc immobile). Un capteur inductif, fixé sur le plateau, donne en sortie une tension proportionnelle à la distance entre le capteur et la plaque. Le dispositif contient également un micro, qui permet de détecter les instants où ont lieu les chocs entre bille et plateau, et un dispositif de LEDs avec interrupteur.

2.2 Schéma du dispositif

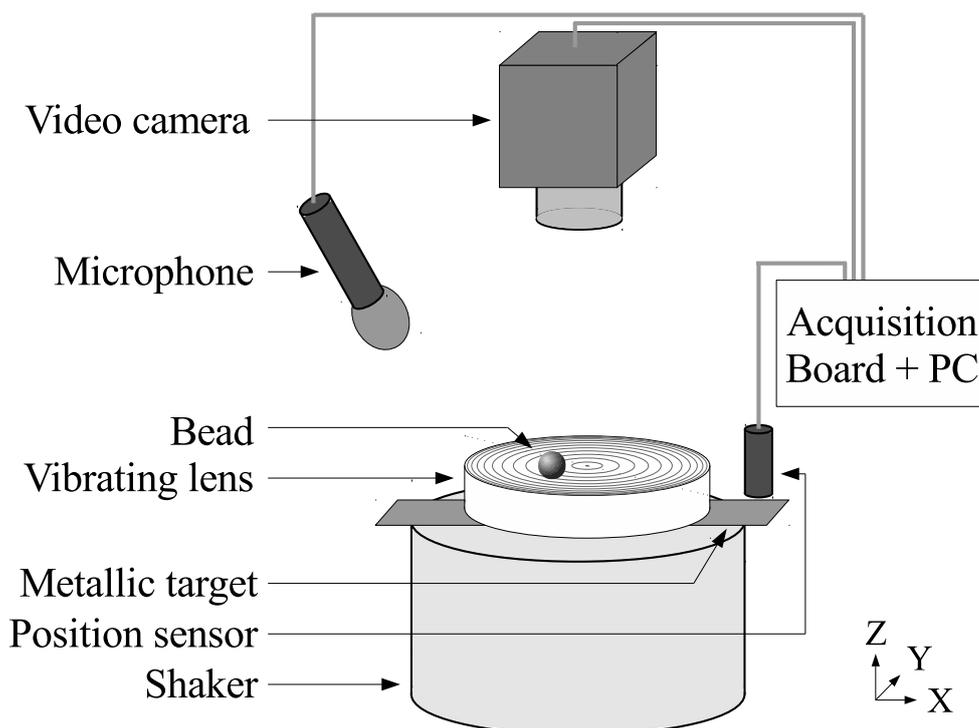


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental, réalisé par J-Y Chastaing

La bille rebondit sur la lentille, qui elle-même est mise en vibration par le pot vibrant. Ces vibrations sont contrôlées grâce au logiciel Labview, qui permet de générer des tensions qu'il transmet par le biais de la carte d'acquisition. Ce même logiciel permet d'enregistrer les données mesurées par la caméra, le micro ainsi que le capteur inductif. L'allure du tracé de ces signaux est en FIGURE 2.

2.3 Principe d'étalonnage du capteur inductif

On s'est servi de l'équation (*) obtenue précédemment pour calibrer notre dispositif. A étant l'amplitude de vibration du plateau en mètre, on pose $A_V B = A$ avec A_V l'amplitude en volt en sortie du capteur inductif et B le coefficient liant ces deux grandeurs. En traçant $\cos(\Phi) = f(\frac{1}{A_V})$, on s'est rendu compte que cela donnait effectivement une droite mais ne passant pas par l'origine. On n'avait pas correctement estimé les amplitudes et les phases.

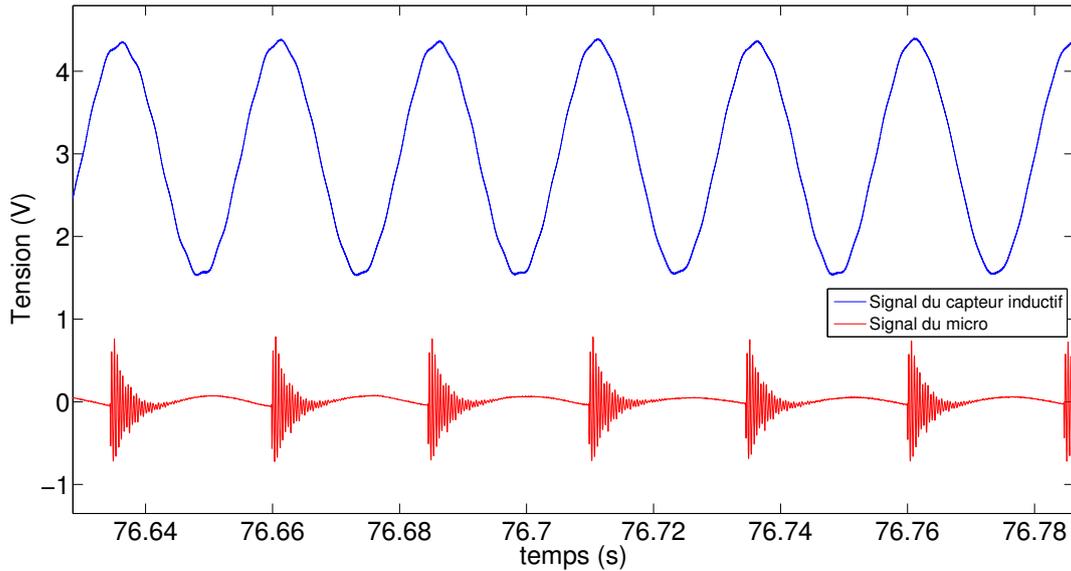


FIGURE 2 – Allure des signaux que l’on enregistre grâce à Labview. Le signal quasi-sinusoidal (en bleu) est celui donné par le capteur inductif : il permet de connaître la position de la lentille au cours du temps. Le signal en rouge est celui provenant du micro : il permet de déterminer les temps de choc.

2.3.1 Correction sur le temps de détection des chocs

On n’avait pas encore tenu compte du temps de propagation du son jusqu’au micro. Pour le déterminer, on laisse le plateau à l’arrêt et on lance manuellement la bille. On repère le choc par une variation de la position du plateau engendrée par le choc, qui constitue notre référence. On regarde aussi à quel instant le micro détecte le choc. La différence entre ces deux temps nous donne le retard que nous devons considérer. Il n’est pas négligeable du tout, puisqu’il vaut $0,67 \pm 0,02$ ms d’après une série de plusieurs mesures. À la fréquence de 40 Hz à laquelle nous travaillons, cela décale toutes les phases de $\frac{2\pi \cdot 0,67 \cdot 10^{-3}}{1/40} = 0,17$ rad ce qui doit être pris en compte.

2.3.2 Correction sur l’amplitude (en volt) mesurée

Le signal obtenu grâce au capteur inductif est bruité. Étant donné que le programme de détection mesure l’amplitude de chaque période en cherchant les extremums atteints, toutes les amplitudes qu’on utilisait étaient surestimées. Nous avons donc regardé ce que vaut le bruit de ce signal (en étudiant la position du plateau immobile). En soustrayant à nos amplitudes précédentes la demi-amplitude du bruit, nous obtenons la “bonne” amplitude. En considérant la “bonne” phase, c’est-à-dire en prenant en compte le temps de propagation du son et la “bonne” amplitude, on obtient la régression linéaire de la FIGURE 3.

Cette régression linéaire permet d’obtenir $B = 1,08 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{V}^{-1}$

2.4 Détection automatique des phases de chacun des rebonds

Pour avoir accès à la phase de chacun des rebonds (on appelle phase des rebonds la phase de la position du plateau lorsque la bille le touche), on doit connaître la date de début de la période du plateau (définie comme la date de passage à l’altitude moyenne pendant la phase ascendante du plateau), ainsi que la date de détection du choc par le micro. La technique qu’on a utilisée pour obtenir ces deux dates est détaillée ci-dessous.

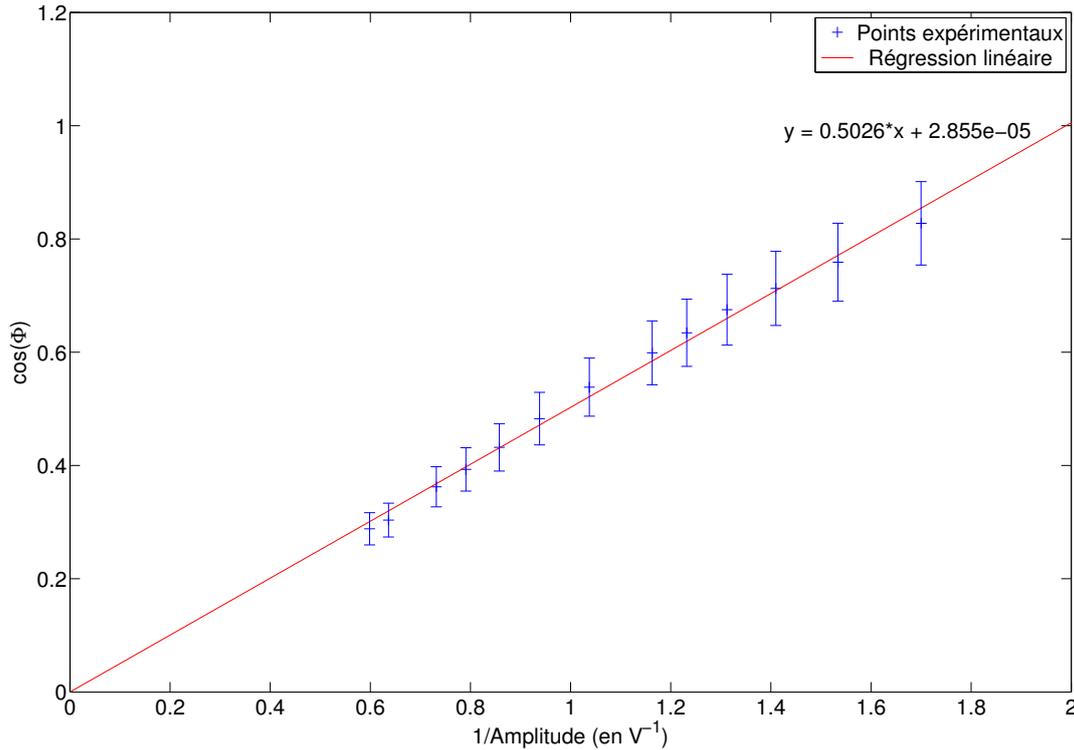


FIGURE 3 – Régression linéaire $\cos(\Phi) = f\left(\frac{1}{A_V}\right)$ après avoir effectué les corrections sur les dates de détection des chocs ainsi que l'amplitude de vibration du plateau.

2.4.1 Périodes du plateau

La façon la plus simple de faire aurait été de détecter le début de la première période puis, connaissant la fréquence d'échantillonnage ainsi que la fréquence du plateau, d'en déduire le début de chacune des autres périodes. Cependant, à des temps longs, si les horloges ne sont pas parfaitement synchronisées cela revient à courir le risque d'un glissement des dates, qui fausserait nos mesures. On a donc détecté le début de chacune des périodes pour éviter ce glissement. Pour cela, on soustrait au signal provenant du capteur inductif sa valeur moyenne et on repère les instants où le signal passe d'une valeur négative à une valeur positive. Le signal étant bruité, on rajoute d'autres conditions pour éviter de détecter des points sur la phase de descente de la position du plateau (le bruit faisant que parfois le signal remonte au-dessus de zéro pendant la phase de descente du plateau, voir exemple en FIGURE 4)

2.4.2 Pics du micro

L'allure de chacun des pics est présentée à la FIGURE 5. Détecter l'instant du choc, c'est-à-dire l'instant où le signal du micro subit une discontinuité n'est pas si évident qu'on aurait pu le penser. En effet, la discontinuité n'a pas toujours la même forme. Heureusement, on remarque que le signal fait apparaître une fréquence bien définie (vérifié expérimentalement à diverses amplitudes et fréquences). Grâce à cela, on peut, au lieu de repérer la discontinuité elle-même, repérer le premier minimum et soustraire à cette date un quart de la période du micro.

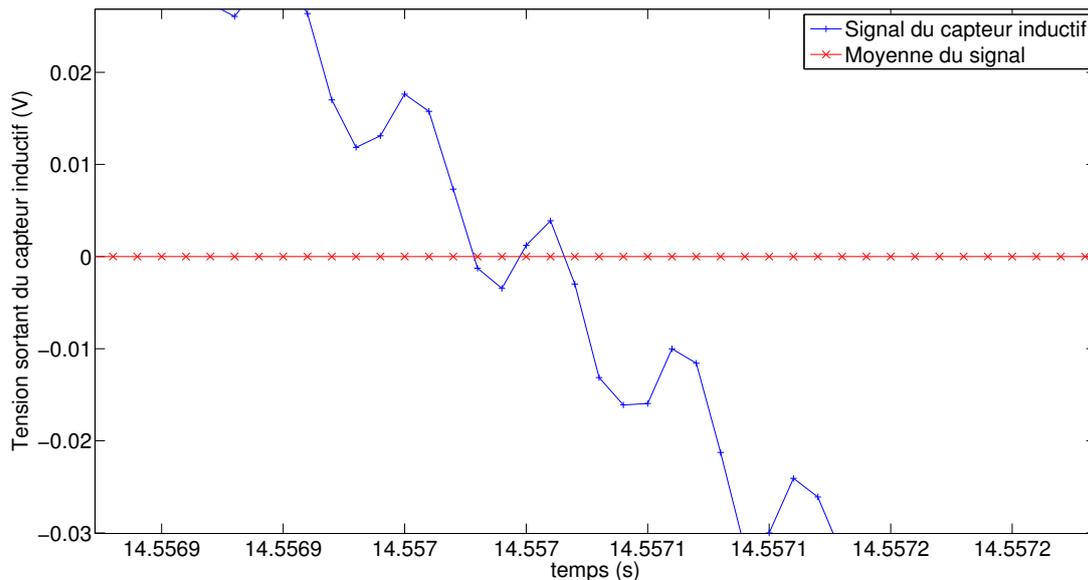


FIGURE 4 – Exemple de cas dans lequel ne pas ajouter des conditions supplémentaires aurait mené à une détection d'un début de période qui n'en est pas vraiment un (puisqu'on franchit la moyenne en allant d'une valeur plus petite à une valeur plus grande alors qu'on est sur une partie de courbe où le plateau est en phase descendante). Ceci est un zoom sur le signal provenant du capteur inductif, dont un exemple est en FIGURE 2.

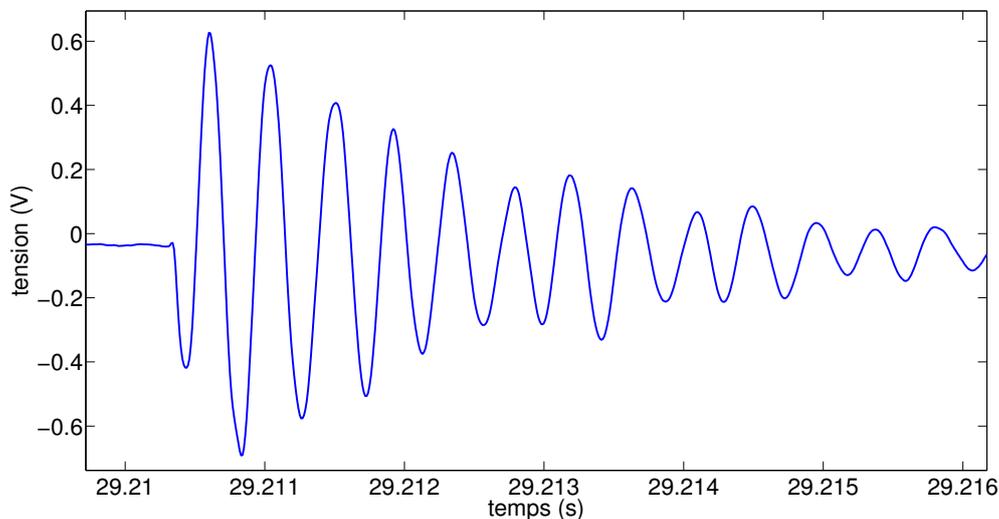


FIGURE 5 – Allure de la tension en sortie du micro lors d'un choc entre la bille et le plateau

2.4.3 Résultat

La FIGURE 6 est un exemple du fonctionnement du programme de recherche automatique des phases. Le marqueur rouge repère le début de la période du plateau et le marqueur vert l'instant où le programme situe le choc. La différence de ces deux temps permet de trouver la phase que l'on cherche. Grâce à cela, on obtient facilement le déphasage pour chaque choc : $\Phi = \omega t$

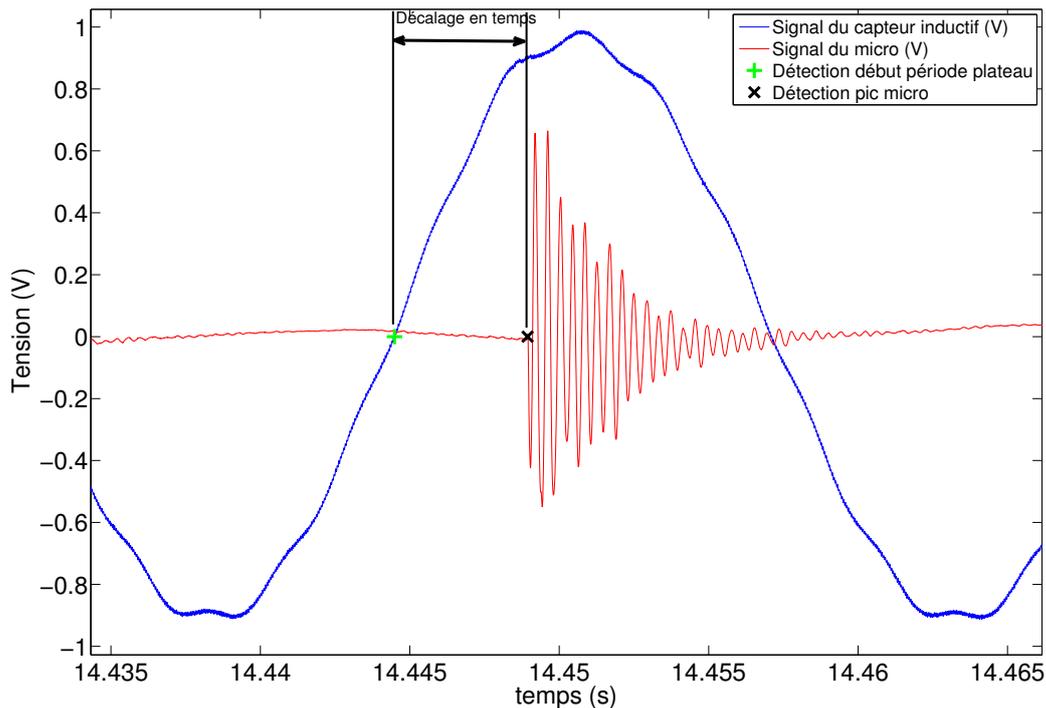


FIGURE 6 – Exemple de détection automatique du début d’une période du plateau, de la date de choc détectée par le micro ainsi que le décalage en temps qui nous permet d’obtenir la phase du rebond en question.

2.5 Repérage de la position (x,y) de la bille

Le dispositif expérimental étant concave au lieu d’être plat pour les raisons évoquées dans l’introduction, cela rajoute une difficulté supplémentaire. Les altitudes auxquelles se produisent les chocs ne sont pas exactement celles du centre du plateau. Pour connaître les altitudes de choc, il faut donc ajouter à l’altitude du plateau celle induite par sa courbure. Pour la trouver, nous avons besoin de connaître la distance entre la bille et le centre du plateau, à chaque temps de choc. D’où la nécessité de repérer la position (x, y) de la bille.

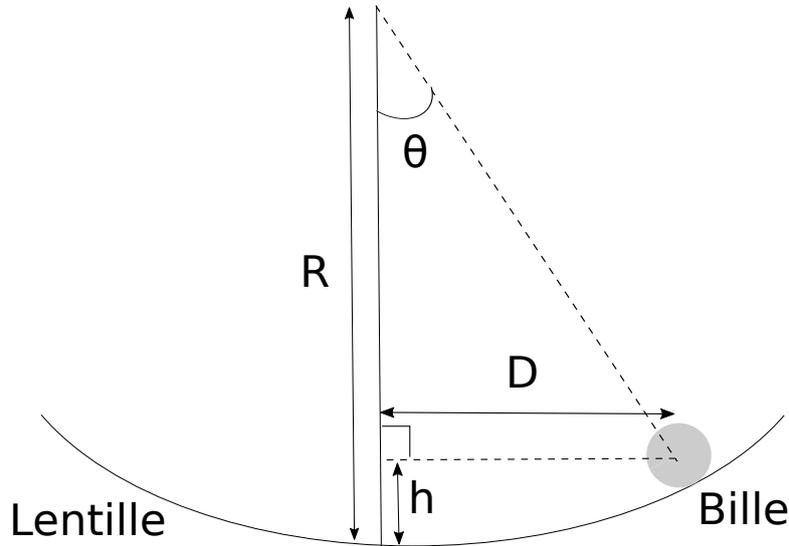
2.5.1 Synchroniser les images avec les autres capteurs

Un problème se pose à nous lorsqu’on veut repérer la position (x,y) de la bille à chaque choc : la caméra et les capteurs ont des horloges qui sont complètement indépendantes. On ne peut donc pas, a priori, savoir quelles images correspondent à quels instants dans les signaux donnés par les capteurs. Pour obtenir cette synchronisation, on va avoir recours à un autre élément, un ensemble de LEDs déjà présent sur le dispositif auquel on rajoute un interrupteur. De cette façon, on repérera sur les images le temps d’allumage comme étant la première image où la bille a été détectée (car si les LEDs sont éteintes, la bille est dans le noir et la fonction “détection de particule” de Labview ne la repère pas.) Pour ce qui est des capteurs, on mesure la tension aux bornes de l’interrupteur dont le basculement nous donne ce même instant, dans l’horloge des capteurs. En résumé, cet élément extérieur nous permet de donner une référence commune à nos deux signaux. Il reste cependant un problème : les horloges sont synchronisées mais les images ne sont pas prises à chaque temps de choc pour autant. On ne peut pas espérer qu’il en soit ainsi puisque nous ne pouvons excéder 30 images/seconde, et que nous avons 40 chocs/seconde.

2.5.2 Connaître l'altitude exacte de la bille à chaque choc

Nous avons choisi pour chaque choc de regarder la position de la bille sur la photo précédent immédiatement le choc, sur celle immédiatement après et de prendre le barycentre de ces deux points, en pondérant par le temps séparant la prise de photo et l'instant de choc (plus le choc est proche d'une des deux images, et plus le coefficient devant la position de la bille sur cette image sera grand.)

On dispose maintenant des positions x et y de la bille à chaque choc. Pour connaître l'altitude à laquelle la bille touche le plateau, on définit la distance au centre du plateau comme étant $D = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ avec (x_0, y_0) la position du centre du plateau. La situation est celle de la FIGURE 7.



Légende:
 R rayon de courbure de la lentille
 D distance entre le centre de la bille et celui de la lentille
 h différence de hauteur entre le point de choc et la hauteur du plateau

FIGURE 7 – Schéma de la situation.

On a :

$$\begin{aligned}
 R - R\cos(\Theta) &= h \\
 R - R\left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right) &= h \\
 R\frac{\Theta^2}{2} &= h \\
 \frac{RD^2}{2R^2} &= h \\
 h &= \frac{D^2}{2R}
 \end{aligned}$$

On connaît donc l'altitude de chaque choc, qui est $z_{choc} = z_{plateau} + h$. On peut également tracer l'évolution de la distance de la bille au centre du plateau au cours du temps (FIGURE 8), témoin de l'instabilité dont nous parlions plus tôt.

On observe que la distance moyenne de la bille au centre du plateau augmente jusqu'à se stabiliser autour d'une valeur seuil. Même lorsque la valeur seuil est atteinte, D continue d'osciller ce qui nous

renseigne sur le fait que le mouvement décrit est elliptique et non circulaire (D serait constant si le mouvement décrit était un cercle). Cependant, l'amplitude des oscillations semble s'amortir (très) lentement. On peut alors penser que le mouvement sera parfaitement circulaire si l'on attend suffisamment longtemps pour que le régime stationnaire s'établisse.

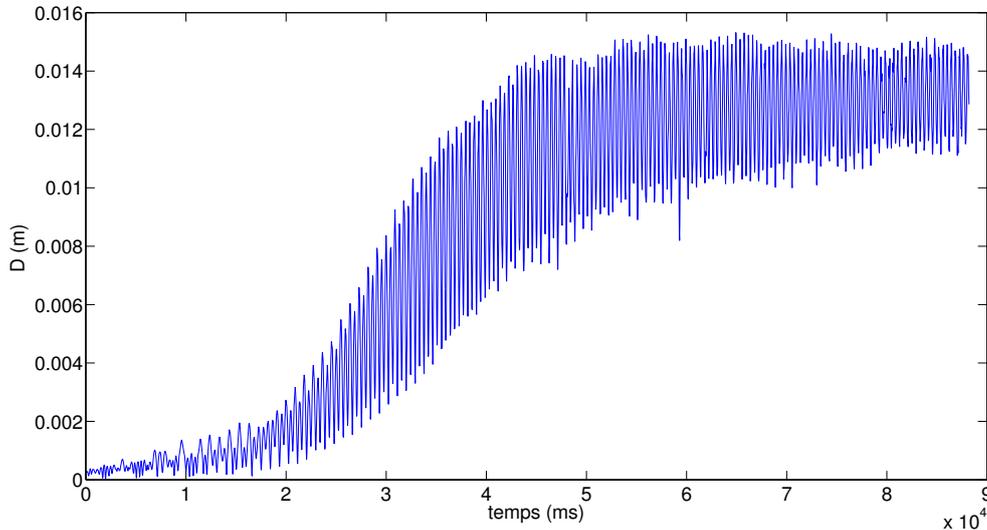


FIGURE 8 – Évolution de la distance de la bille au centre du plateau au cours du temps

3 Travail de recherche et résultats

3.1 Mesure du coefficient de restitution de notre système

La méthode de la SECTION 1.2 a été mise en oeuvre expérimentalement. Les résultats sont ceux de la FIGURE 9. De cette régression linéaire, on déduit que $e = \exp(-0,227) \simeq 0,80$. Cette valeur est proche de celle déterminée par J-Y Chastaing, 0,81. Avec moins de 2% d'écart relatif, les deux mesures sont cohérentes. On utilisera $e = 0,80$ pour toute la suite. Cette mesure a été réitérée quelques semaines plus tard pour vérifier que les propriétés du dispositif n'aient pas changé pendant le stage (ce qui aurait pu être le cas à cause de la chaleur par exemple). Cette nouvelle mesure a donné le même coefficient de restitution qu'au début du stage.

3.2 Trajectoire observée de la bille

En suivant la méthode indiquée en SECTION 2.5.2, on obtient des trajectoires similaires à celle de la FIGURE 10. Les différents points correspondent aux positions successives de la bille à chaque choc.

3.3 Vitesses et phases de choc

À l'aide de Matlab, nous avons codé un programme qui simule le lancer d'une bille, sur un plateau (plat). Le principe est le suivant : pour une vitesse et une phase de premier choc données, le programme simule les 100 prochains rebonds de la bille afin de savoir si la bille continuera de rebondir après 100 rebonds ou si elle se sera immobilisée sur le plateau. Cette valeur de 100 rebonds peut paraître arbitraire, mais l'expérience montre qu'en choisir beaucoup plus ne modifie pas les résultats. Cette valeur est donc suffisante pour se faire une idée, sans augmenter outre-mesure le temps que met le programme à tourner (3 jours pour la FIGURE 11.) Le code couleur est le suivant : on place un point vert si la bille continue de rebondir après 100 rebonds et un point rouge si elle s'est immobilisée sur le plateau avant.

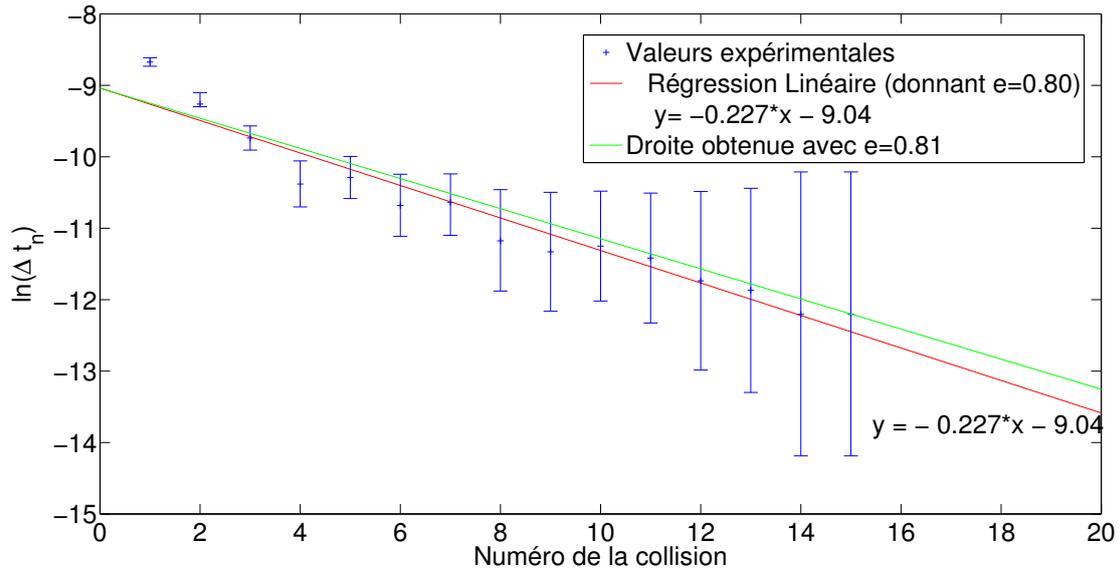


FIGURE 9 – Tracé du logarithme du temps séparant un rebond de celui qui le précède, en fonction du numéro du rebond auquel on se place. Tous ces rebonds font partie du même lâcher de bille. La régression linéaire (en rouge) donne ce qui est indiqué sur la figure, c'est-à-dire un coefficient directeur de $-0,227$. En vert, nous avons tracé la droite qui correspond à $e=0,81$, valeur trouvée par J-Y Chastaing. Elle concorde également bien avec nos points expérimentaux.

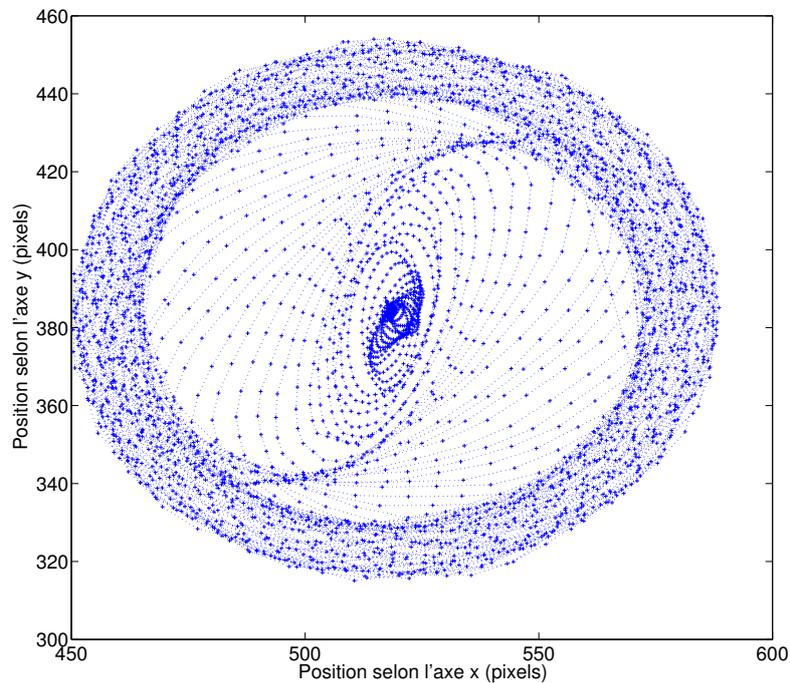


FIGURE 10 – Exemple de trajectoire décrite par la bille. Aux premiers instants, la bille reste au centre du plateau (là où il y a l'agglomération de points), puis l'instabilité va peu à peu s'accroître jusqu'à ce que la bille décrive des ellipses quasi-circulaires.

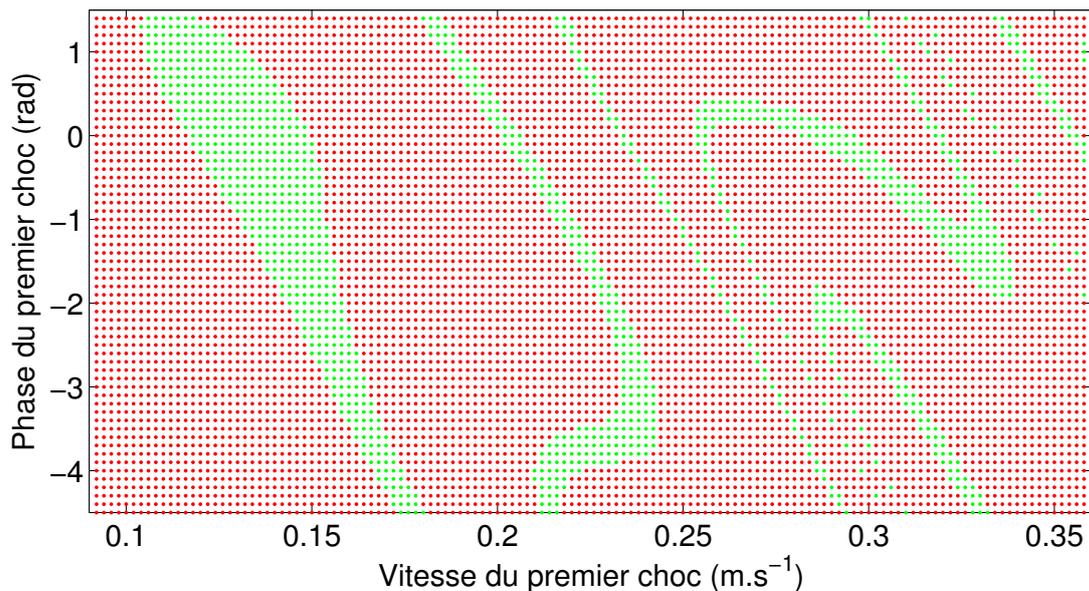


FIGURE 11 – Carte permettant de connaître les vitesses et phases qui mènent à un arrêt de la bille, pour une accélération réduite $\Gamma = 0,40$

Si l'on augmente Γ , les zones vertes deviennent de plus en plus grandes à l'image de la FIGURE 12 (ce qui est cohérent avec nos observations expérimentales, c'est-à-dire que plus Γ est grand et plus on a de mal à observer l'arrêt de la bille.)

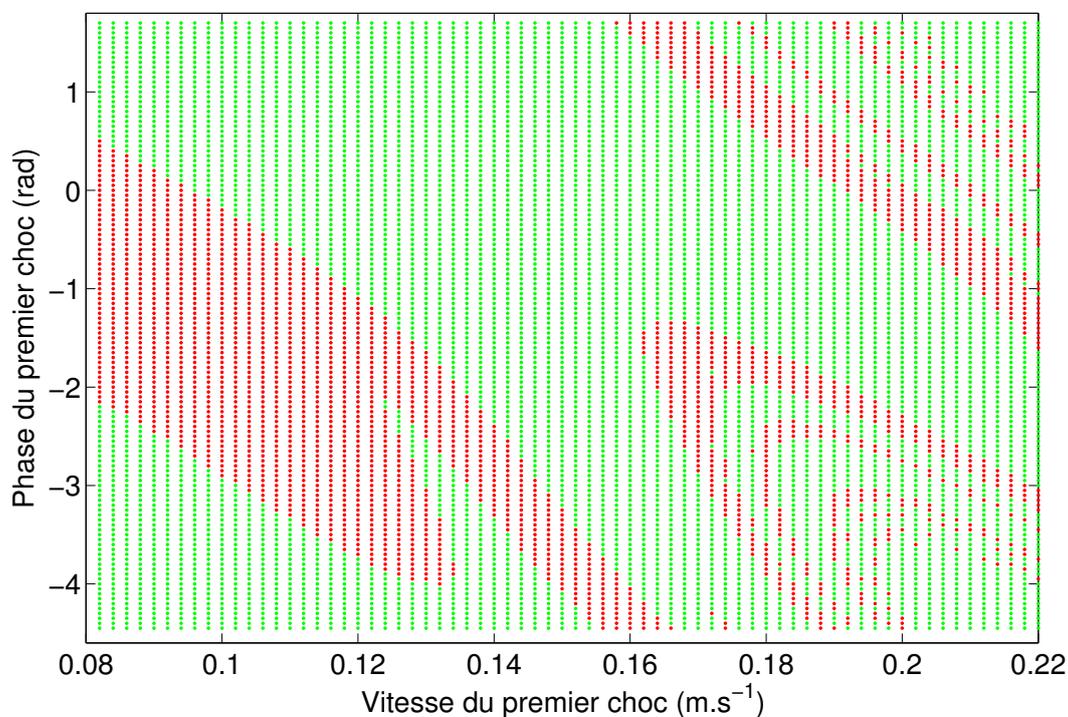


FIGURE 12 – Carte permettant de connaître les vitesses et phases qui mènent à un arrêt de la bille, pour une accélération réduite $\Gamma = 0,97$

Avoir obtenu ces cartes est une énorme avancée : c'est en comparant ces cartes avec nos lancers expérimentaux que nous pourrions tenter de comprendre quel phénomène est à l'origine de l'arrêt de la bille, qui est si peu intuitif lorsqu'on la laisse rebondir sur un plateau vibrant. Grâce aux programmes Matlab dont nous avons déjà parlé, qui détectent les débuts de période du plateau ainsi que les rebonds grâce aux pics du micro, nous sommes en mesure pour chaque rebond de donner la phase ainsi que la vitesse. Pour montrer à quoi cela ressemble, reprenons les deux mêmes accélérations réduites que précédemment et regardons où se situent les points. La FIGURE 13 montre l'exemple de points menant à l'arrêt de la bille. Chaque point bleu est un point expérimental, et les croix roses sont les cinq derniers points de la trajectoire. On observe grâce à ces croix roses que, avant de s'arrêter, la bille se rapproche des bords du bassin d'attraction obtenu par simulation numérique. C'est donc bien parce que la bille explore des zones de l'espace des phases qu'elle n'aurait pas exploré sur un support plat qu'elle s'immobilise.

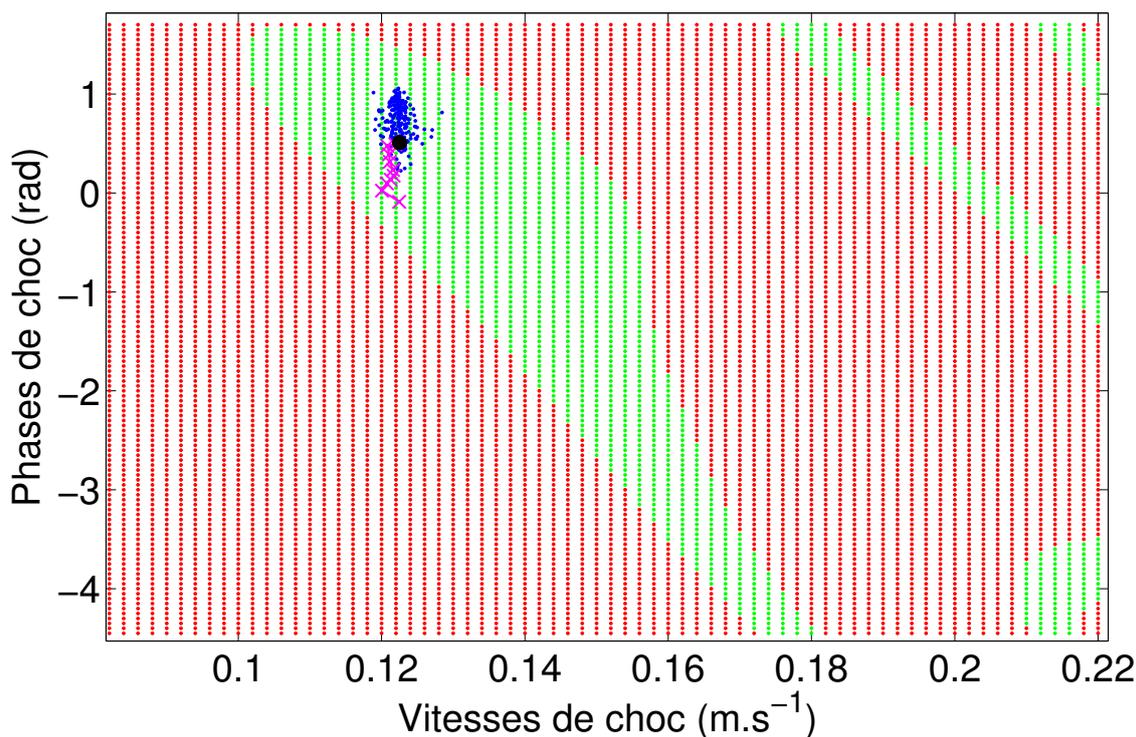


FIGURE 13 – Carte pour une accélération réduite $\Gamma = 0,40$ sur laquelle on a superposé les points expérimentaux d'une trajectoire menant à l'arrêt de la bille sur le plateau. Les points bleus sont les points expérimentaux, les croix roses sont les cinq derniers points de la trajectoire (on observe qu'ils se rapprochent peu à peu du bord du bassin). Le point noir est l'attracteur théorique : c'est la position, obtenue grâce à (*) où devraient se trouver tous les points s'il n'y avait pas d'instabilité. Le fait qu'il soit dans la même zone que les autres points est rassurant quant à la justesse de nos mesures.

À plus grande accélération, comme sur la FIGURE 14, tous les points sont très éloignés des bords du bassin d'attraction dans lequel on se situe. Expérimentalement, on n'observe pas d'immobilisation dans ce cas. Cela conforte ce que l'on pensait, lorsqu'on ne s'approche pas des bords du bassin, la bille ne s'arrête pas.

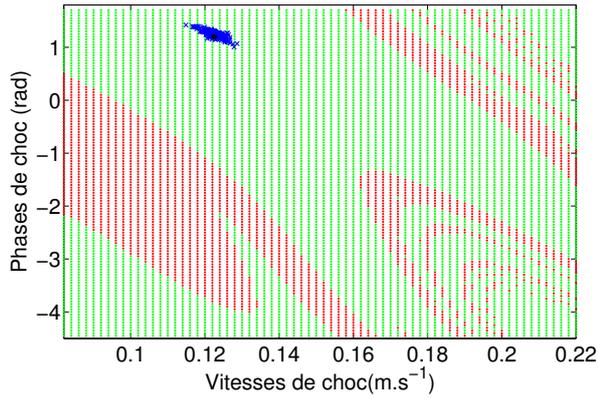


FIGURE 14 – Carte pour une accélération réduite $\Gamma = 0,97$, qui donne une trajectoire où l'on n'observe pas d'arrêt de la bille

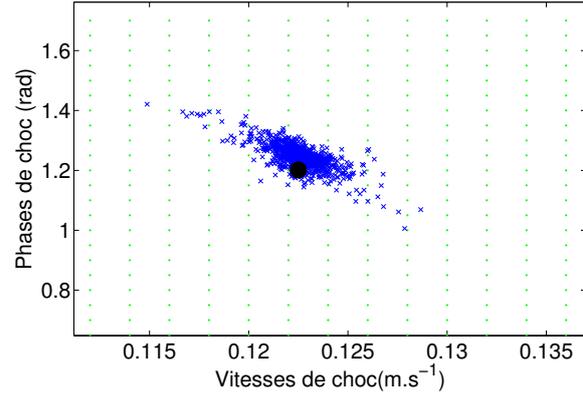


FIGURE 15 – Zoom sur les points expérimentaux de la FIGURE 14. On observe qu'aucune bordure de bassin n'est à proximité, ce qui est cohérent avec le fait qu'on n'observe pas d'arrêt de la bille.

L'espace des phases est donc très approprié à la description du phénomène qui nous intéresse, puisque les cartes des bassins d'attraction permettent de comprendre pourquoi il existe des cas dans lesquels la bille s'arrête et d'autres où ce n'est pas le cas.

3.4 Confrontation à la forme prévue pour l'emplacement des points (elliptique)

On observe sur les figures 13 et 15 que les points semblent situés dans une ellipse, n'ayant pas la même inclinaison. En faisant d'autres mesures, on observe qu'à Γ fixé, l'ellipse contenant les points a toujours la même orientation. Les caractéristiques de l'ellipse dépendent donc de Γ , comme ce qui était prévu par le calcul de l'ANNEXE. La FIGURE 16 en est l'exemple dans le cas où $\Gamma = 0,40$. On observe que la position de l'ellipse est cohérente avec nos mesures expérimentales, mais que celle-ci n'englobe toutefois pas l'ensemble des points.

Dans le cas où $\Gamma = 0,97$, cela ne fonctionne pas : l'ellipse est une droite et on ne peut donc y inclure les points. Cela est lié au fait qu'une fois que l'instabilité s'est développée, un nouveau régime est établi (celui dans lequel la bille fait des tours autour du centre). Dans ce régime, les propriétés de notre système ne sont pas les mêmes.

3.5 Autre technique pour repérer nos points expérimentaux dans (v, Φ)

Étant donné que, comme mentionné dans la partie précédente, tous les points ne sont pas dans l'ellipse, on se demande si les mesures expérimentales sont suffisamment précises. On a donc réfléchi à une autre manière d'avoir accès aux points de choc dans l'espace (v, Φ) . Sachant que l'on détermine plus précisément la phase que la vitesse (dont le calcul fait entrer en jeu la position du centre de la lentille, la position du plateau...), on a remarqué qu'il est possible d'obtenir la vitesse en ne connaissant que la phase. En effet, si l'on pose : $v = \bar{v} + \delta v \cos(\omega t)$ et $\Phi = \bar{\Phi} + \delta \phi \cos(\omega t)$, on peut écrire $v = \bar{v} + \delta v \frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\delta \phi}$.

Le calcul proposé en ANNEXE donne $\frac{\delta \Phi}{\delta v}$ et on obtient une équation à une inconnue, v . Dans le cas où $\Gamma = 0,40$, cela donne la FIGURE 17.

On n'observe plus que les derniers points s'écartent des précédents puisque cette méthode nécessite l'usage d'une moyenne glissante qui nous contraint à ne pas utiliser les premiers et derniers points, qui sont justement ceux qui nous intéressaient. De plus, certains points sont maintenant placés hors du bassin d'attraction alors qu'ils ne mènent pas à une immobilisation de la bille. Pour cette raison ainsi que la précédente (le fait que l'on perde les derniers points), on n'a pas cherché à aller plus loin avec cette méthode.

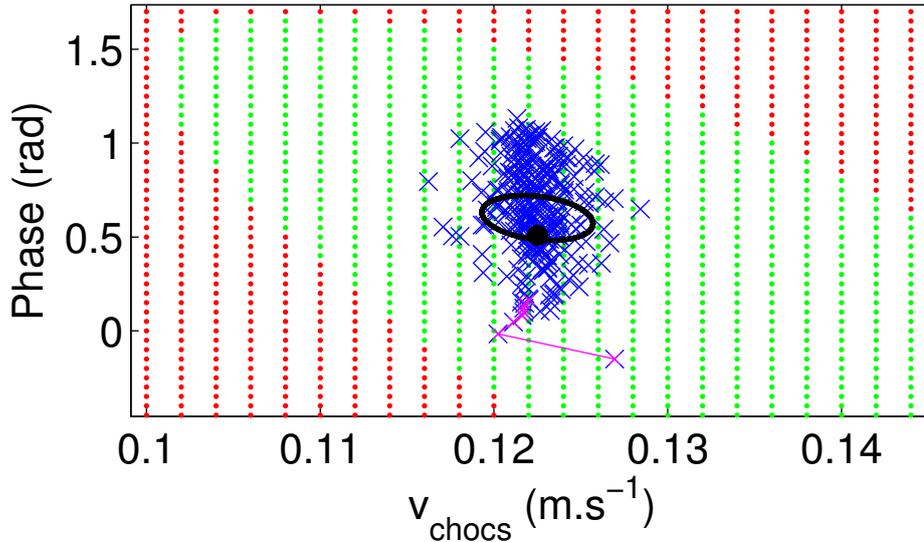


FIGURE 16 – Tracé de l'ellipse dans laquelle devraient se trouver les points d'après le calcul de l'annexe. Ceci correspond au cas $\Gamma = 0,40$ dans lequel la bille s'immobilise. Les points bleus représentent les chocs, les points roses les 5 derniers d'entre eux. Le point noir est l'attracteur théorique et l'ellipse est l'emplacement prédit par le calcul pour les points.

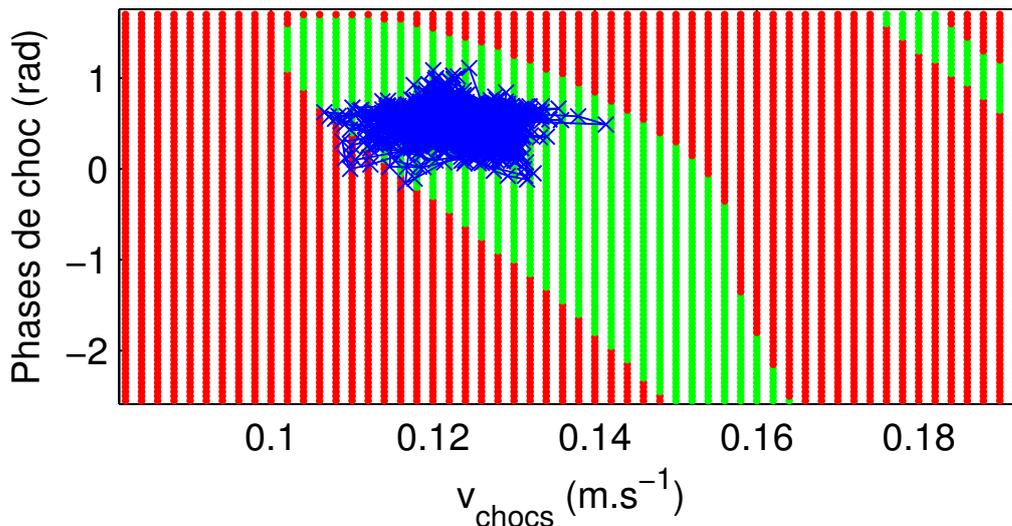


FIGURE 17 – Carte pour $\Gamma = 0,40$ des vitesses et phases de choc menant ou pas à une immobilisation, sur laquelle on a superposé les points expérimentaux obtenus par la seconde méthode tout juste décrite.

3.6 Étude du temps de survie de la bille

Maintenant que nous avons montré que se placer dans l'espace des phases est pertinent pour comprendre les arrêts de la bille, on peut se demander s'il est possible de prévoir le temps que met la bille à s'arrêter, ainsi que de quels paramètres cela dépend. Pour cela, nous avons commencé par supposer que le paramètre Γ , puisqu'il est la cause de l'élargissement des bassins est peut-être un bon paramètre pour étudier cela. En se plaçant à différentes valeurs de Γ , on lance la bille et on note le temps écoulé avant qu'elle ne s'arrête. Ces résultats sont répertoriés sur la FIGURE 18.

On observe que le temps de survie de la bille augmente avec Γ , ce qui est conforme à l'intuition (plus

l'accélération du plateau est grande et moins la bille aura de chance de s'arrêter). Ce qu'il se passe pour de faibles Γ n'est pas très représentatif dans le sens où pour faire décoller la bille de façon la plus verticale possible, on applique une impulsion via le pot vibrant. Cette impulsion est une exponentielle décroissante, dont le temps d'amortissement est responsable de la survie aux premiers instants, alors que l'on est à une accélération si faible qu'on ne prédit pas que ce soit possible. À partir d'une certaine valeur "seuil" de Γ , on observe que le temps de survie croît brutalement. Cette ascension tend vers $+\infty$, puisque si on augmente encore le Γ , on n'arrive plus à observer d'arrêt de la bille (c'est ce qu'on considère comme étant l'infini.)

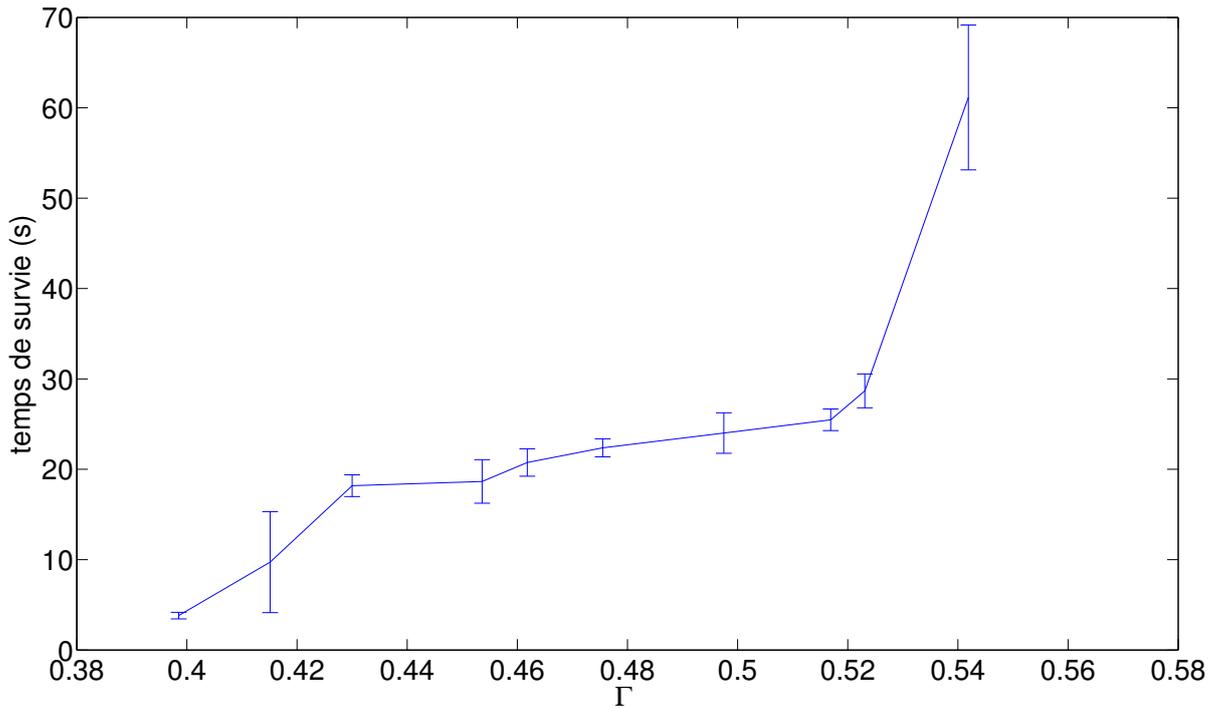


FIGURE 18 – Évolution du temps de survie de la bille (en secondes) en fonction de Γ . L'accélération critique théorique, c'est-à-dire celle en-dessous de laquelle on ne doit pas avoir de survie de la bille vaut $\Gamma = 0.33$

3.7 Observation d'un "glissement" des phases

Une autre façon de voir les choses est de remarquer que la modulation de la trajectoire dans l'espace (v, Φ) qui est à l'origine de la sortie du bassin est surtout due aux variations de la phase. On peut donc s'intéresser à l'allure d'une carte (Γ, Φ) qui nous permettrait d'avoir accès rapidement à la largeur du bassin (en phases) en fonction de Γ . Nous avons tracé cette carte, qui se trouve en FIGURE 19.

Sur cette figure, on a placé deux courbes : la courbe croissante est le tracé des attracteurs théoriques correspondants à chacun des Γ , tandis que la décroissante n'a pas de signification physique. C'est uniquement l'opposé de la première. On observe qu'elle décrit parfaitement le bord inférieur du bassin. Cette observation expérimentale étant étonnante, c'est pourquoi nous la laissons apparaître sur le tracé. Au vu de cette carte, on peut conjecturer que le temps de survie dépend de la largeur du bassin, ou encore de la distance entre l'attracteur théorique et le bord inférieur du bassin puisqu'expérimentalement, en ayant réitéré dix fois l'expérience on remarque que c'est toujours par le côté inférieur du bassin que la bille sort. Pour illustrer tout cela, nous avons tracé l'évolution de la phase des rebonds au cours du temps, pour une bille qui ne s'immobilise pas (FIGURE 20) et une bille qui s'immobilise (FIGURE 21).

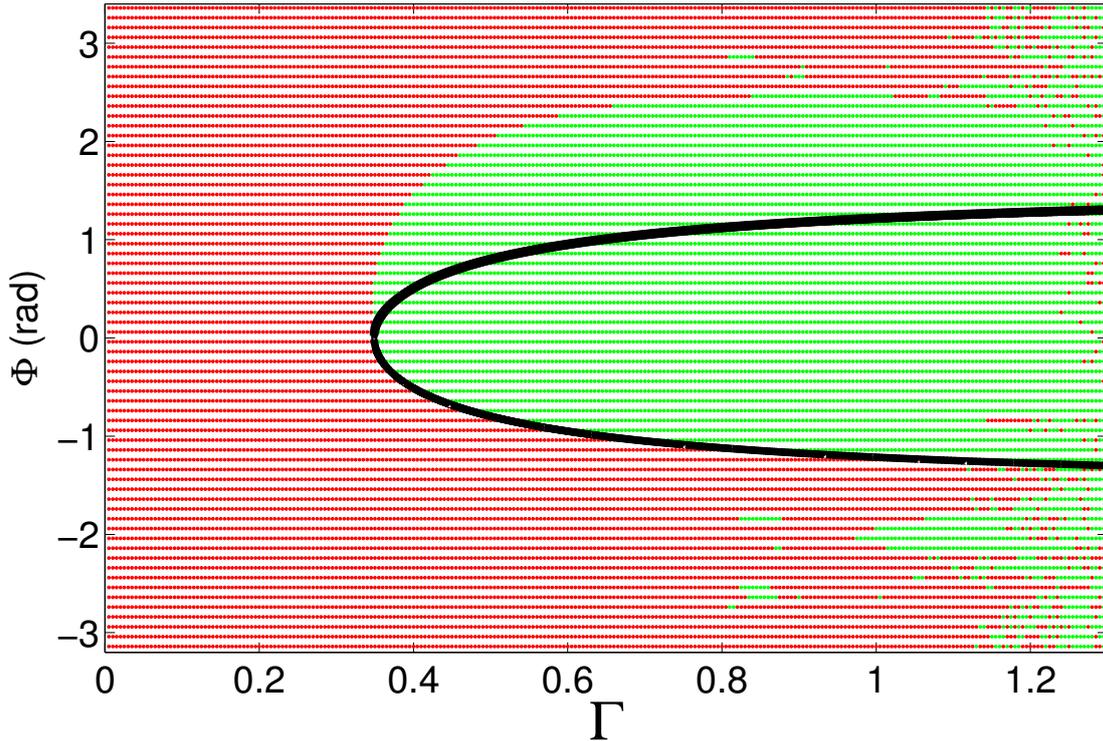


FIGURE 19 – Carte des phases pour lesquelles la bille survit après 100 rebonds, en fonction de Γ . Les points verts et rouges ont la même signification que précédemment. Les courbes (en noir) sont les tracés de $\Phi = +\arccos\left(\frac{\pi}{\Gamma} \frac{1-e}{1+e}\right)$ (celle qui est croissante) et $\Phi = -\arccos\left(\frac{\pi}{\Gamma} \frac{1-e}{1+e}\right)$

On observe sur la FIGURE 20 qu'aux premiers instants la phase est celle prévue par le calcul, puis elle glisse vers une autre valeur, plus faible, où elle devient stationnaire. Cela correspond au moment où l'instabilité a fini de se développer, quand elle a établi un mouvement quasi-circulaire. L'autre cas est présenté à la FIGURE 21 : à la fin du mouvement, juste avant que la bille ne s'arrête, la phase se met à tendre de plus en plus vers la limite inférieure. On ne voit pas clairement qu'on franchit cette limite, mais on peut imaginer en extrapolant qu'avec quelques oscillations de plus, la limite serait franchie. La phase semble donc bien jouer un rôle prédominant dans la sortie du bassin menant à l'arrêt de la bille. On trace à nouveau l'évolution du temps de survie de la bille, mais cette fois en fonction de la distance entre l'attracteur théorique (la courbe croissante sur la FIGURE 19) et le bas du bassin (la courbe décroissante). Cette distance est $2\arccos\left(\frac{\pi}{\Gamma} \frac{1-e}{1+e}\right)$. Le résultat est similaire à celui du tracé en fonction de Γ , c'est à dire que la courbe est croissante puis se met à tendre brusquement vers l'infini. Ceci ne permet pas de conclure quel paramètre est le plus pertinent (entre Γ et la largeur du bassin).

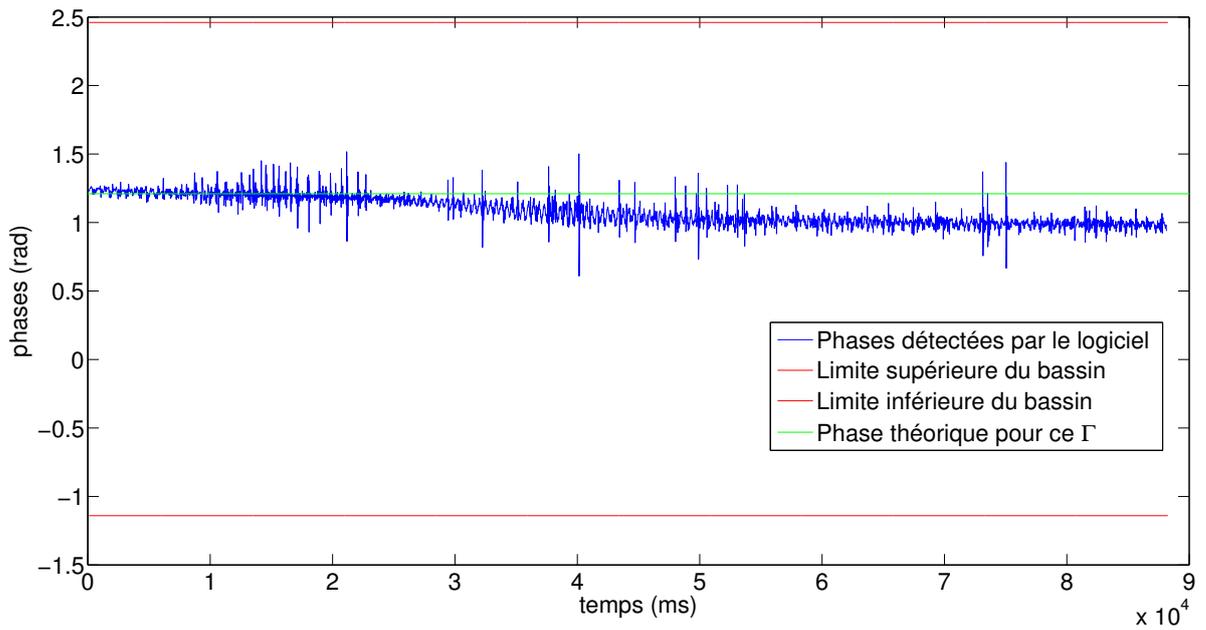


FIGURE 20 – Évolution de la phase des rebonds au cours du temps. On s'est placé à $\Gamma = 0,97$ de manière à ne pas observer d'immobilisation de la bille.

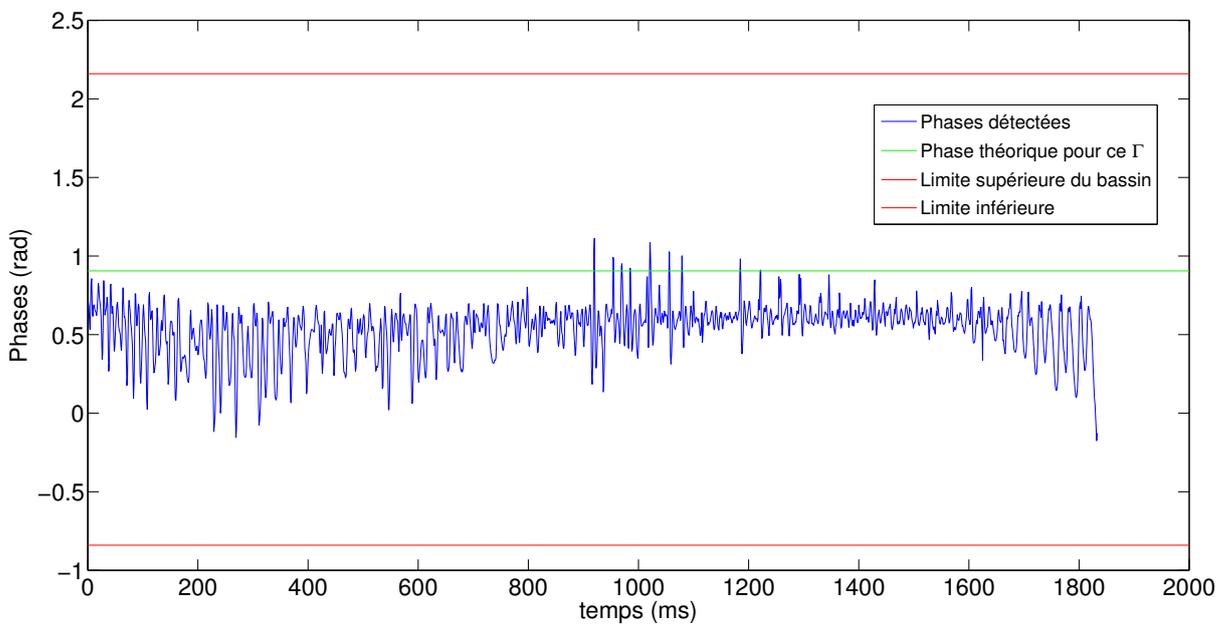


FIGURE 21 – Évolution de la phase des rebonds au cours du temps. On s'est placé à $\Gamma = 0,40$ de manière à observer une immobilisation de la bille.

4 Conclusion et Perspectives

L'hypothèse de départ de ce stage était la bonne, c'est-à-dire qu'il est judicieux de se placer dans l'espace des phases pour étudier la situation qui nous intéresse. On a vu que dans cet espace, on peut tracer par simulation numérique les positions de la bille qui mènent ou non à une immobilisation. Cela nous donne des bassins d'attraction, dont la forme et la taille dépendent de l'accélération réduite du plateau à laquelle on travaille. En ayant étalonné le dispositif expérimental, on a pu comparer ces bassins d'attraction avec l'expérience, et ainsi observer que juste avant une immobilisation, les chocs se rapprochent des limites du bassin ce qui valide notre hypothèse. Pour déterminer plus précisément la cause des immobilisations, on a tracé l'évolution du temps de survie de la bille en fonction de différents paramètres, comme l'accélération réduite ou la largeur en phase du bassin pour l'accélération réduite choisie. Malgré cela, on n'a pas pu trancher quant au paramètre le plus pertinent. Enfin, on a vu qu'un calcul théorique permet de prévoir la forme que décrivent les chocs dans l'espace des phases (une ellipse). Expérimentalement, elle est dans la bonne zone de l'espace des phases mais n'englobe pas tous nos points.

Références

- [1] J.-Y. Chastaing, E. Bertin and J.-C. Géminard, "Dynamics of the bouncing ball", *arXiv*, **1405.3482 [cond-mat.stat-mech]** (2014).
- [2] J.-Y. Chastaing, G. Pillet, N. Taberlet and J.-C. Géminard, "Transersal stability of the bouncing ball on a concave surface.", *Phys. Rev.*, **E 91**, **052918** (2015).

Annexe

On note V la vitesse de décollage de la bille suite au rebond 'i' et on a : $V - g\Delta t = -v_{i+1}$ d'où $V = g\Delta t - v_{i+1}$

On repart de la loi de choc :

$$(V - u_i) = -e(-v_i - u_i \text{ avec } u_i = A\omega \cos(\Phi_i) \quad V - ev_i = (1 + e)u_i \\ g\left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i + 2\pi}{\omega}\right) - v_{i+1} - ev_i = (1 + e)A\omega \cos(\Phi_i)$$

d'où :

$$\frac{2\pi g}{A\omega^2} + g\left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{A\omega^2}\right) - \frac{v_{i+1} - ev_i}{A\omega} = (1 + e)\cos(\Phi_i)$$

Si l'on moyenne chacun de ces termes, avec $v_{i+1} = v_i = \bar{v} = \frac{\pi g}{\omega} \cos(\bar{\Phi}) = \bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}$, on retombe sur une expression déjà connue, $\cos(\bar{\Phi}) = \frac{\Pi}{\Gamma} \frac{1 - e}{1 + e}$

Si cette fois on souhaite ne garder que les termes de perturbation, en supposant que Φ et v oscillent périodiquement. On pose : $v = \bar{v} + \delta v \exp(j\Omega i)$ et $\Phi = \bar{\Phi} + \delta \Phi \exp(j\Omega i)$.

Attention, ici i est l'indice du numéro de la collision.

On a :

$$\frac{\delta \Phi}{\Gamma} (\exp(j\Omega) - 1) \exp(j\Omega i) - \frac{\delta v}{A\omega} (\exp(j\Omega) + e) \exp(j\Omega i) = -(1 + e) \sin(\bar{\Phi}) \delta \Phi \exp(j\Omega i) \\ \frac{\delta \Phi}{\Gamma} \left(\frac{\exp(j\Omega) - 1}{\Gamma} + (1 + e) \sin(\bar{\Phi}) \right) = \frac{\delta v}{A\omega} (\exp(j\Omega) + e) \\ A\omega \left(\frac{\delta \Phi}{\delta v} \right) = \Gamma \frac{\exp(j\Omega) + e}{\exp(j\Omega) - 1 + \Gamma(1 + e) \sin(\bar{\Phi})}$$

Or, $\sin(\bar{\Phi}) = \pm \sqrt{1 - \cos(\bar{\Phi})^2}$. D'où :

$$A\omega \left(\frac{\delta \Phi}{\delta v} \right) = \Gamma \frac{\exp(j\Omega) + e}{\exp(j\Omega) - 1 \pm \sqrt{\Gamma^2(1 + e)^2 - \pi^2(1 - e)^2}}$$

De cela, on déduit le module (ρ) et l'argument (ϕ) de $A\omega \left(\frac{\delta \Phi}{\delta v} \right)$:

$$\rho = \frac{\omega}{g} \frac{\sqrt{(e + \cos(\Omega))^2 + \sin(\Omega)^2}}{\sqrt{\left(\cos(\Omega) - 1 \pm \sqrt{\Gamma^2(1 + e)^2 - \pi^2(1 - e)^2} \right)^2 + \sin(\Omega)^2}}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{\left(-e - 1 \pm \sqrt{\Gamma^2(1 + e)^2 - \pi^2(1 - e)^2} \right) \sin(\Omega)}{\sin(\Omega)^2 + (e + \cos(\Omega)) \left(\cos(\Omega) - 1 \pm \sqrt{\Gamma^2(1 + e)^2 - \pi^2(1 - e)^2} \right)} \right)$$

Si $\Phi = \bar{\Phi} + \delta \Phi \cos(\omega_0 t)$, alors $v = \bar{v} + \rho \delta \Phi \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Donc

$$v - \bar{v} = \rho (\cos(\omega_0 t) \cos(\phi) - \sin(\omega_0 t) \sin(\phi))$$

Et finalement,

$$v = \bar{v} + \rho \left((\Phi - \bar{\Phi}) \cos(\phi) \pm \sqrt{(\delta \Phi)^2 - (\Phi - \bar{\Phi})^2} \sin(\phi) \right)$$

Pour chaque valeur de Φ , on a donc deux valeurs de v . En traçant sur un intervalle suffisamment large de Φ , on devrait obtenir une ellipse que nous pourrions comparer avec la répartition de nos points expérimentaux.