



THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon,
délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : **Physique**

Laboratoire de Physique, ENS de Lyon

École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Présentée et soutenue publiquement le 13 Juillet 2016
par **M. Jean-Yonnell CHASTAING**

Mécanique statistique de systèmes macroscopiques hors-équilibre

Directeur de Thèse : M. Jean-Christophe GÉMINARD

Devant la commission d'examen formée de :

M. Sébastien AUMAITRE	Ingénieur de Recherche	<i>CEA Saclay</i>	Membre
M. Éric BERTIN	Chargé de Recherche	<i>CNRS - LIPhy</i>	Invité
M. Jean-Christophe GÉMINARD	Directeur de Recherche	<i>CNRS - LPENSL</i>	Directeur
M. Hamid KELLAY	Professeur	<i>U. Bordeaux - LOMA</i>	Rapporteur
M. Antoine NAERT	Maître de Conférences	<i>ENSL - LPENSL</i>	Co-encadrant
M. Stefano RUFFO	Professeur	<i>SISSA Trieste</i>	Membre
M. Emmanuel TRIZAC	Professeur	<i>U. Paris-Sud - LPTMS</i>	Membre
M. Pascal VIOT	Professeur	<i>UPMC - LPTMC</i>	Rapporteur

Laboratoire de Physique
École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69007 Lyon

École doctorale de Physique et
Astrophysique de Lyon
4, Rue Enrico Fermi
69622 Villeurbanne Cedex

Table des matières

Résumé	7
Abstract	9
1 Introduction générale	11
1.1 La physique statistique hors-équilibre	12
1.2 Les systèmes dissipatifs stationnaires	13
1.3 Les gaz granulaires	14
1.4 Résultats généraux en Physique Statistique proche ou loin de l'équilibre	17
1.4.1 Le Théorème de Fluctuation-Dissipation	17
1.4.2 La Relation de Fluctuation	18
1.5 Plan et objectifs	23
2 Mécanique statistique des rebonds d'une bille sur une surface vibrée	25
2.1 Introduction	26
2.2 Description du problème	28
2.2.1 Principe de l'expérience	28
Loi de choc	28
Vol libre	29
2.2.2 Dispositif expérimental	29
Analyse des données	31
Mesures indépendantes du coefficient de restitution e	31
2.2.3 Mouvement du plateau	34
2.2.4 Simulation numérique du problème	35
2.3 Caractérisation du régime chaotique, entretenu et stationnaire	37
2.3.1 Étude des corrélations entre les mouvements de la bille et du plateau	37
2.3.2 Énergie cinétique moyenne de la bille	41
2.3.3 Corrélation temporelle - Perte de mémoire	43
2.3.4 Statistiques de différentes quantités d'intérêt	45
2.4 Étude des échanges énergétiques entre la bille et le plateau	50
2.4.1 Étude du paysage énergétique	50
Statistiques des échanges d'énergie	50
Réversibilité de la dynamique	51

Caractère markovien du processus	53
2.4.2 Distinction entre injection et dissipation	54
2.5 Mesures de l'écart à l'équilibre	57
2.5.1 Nouvelle définition de l'injection et de la dissipation	57
2.5.2 Taux de création d'entropie	58
2.5.3 Test du bilan détaillé par les taux de transitions	60
2.5.4 Relation de Fluctuation - Théorème de Gallavotti-Cohen	62
2.6 Conclusion et perspectives	67
3 Étude expérimentale d'un gaz granulaire peu dense	71
3.1 Introduction	72
3.2 Description du problème	73
3.2.1 Le dispositif expérimental	73
Le gaz granulaire	73
Comment sonder ce gaz ?	74
3.2.2 Caractérisation du gaz	76
État d'agitation du gaz	76
Dynamique du gaz	78
3.3 Mesure de la "température" du gaz granulaire	81
3.3.1 Introduction	81
3.3.2 Théorème de Fluctuation-Dissipation	82
3.3.3 Relation de Fluctuation	86
3.3.4 Résultats	89
3.4 Étude d'un gaz raréfié à température constante	91
3.4.1 Protocole expérimental	91
3.4.2 Mesures du temps de corrélation	91
Auto-corrélation et spectre de la vitesse	91
Incréments de vitesse	93
3.4.3 Discussion et conclusion	95
3.5 Étude de deux gaz couplés électro-mécaniquement	97
3.5.1 Introduction	97
3.5.2 Protocole expérimental	97
3.5.3 Résultats	99
Distribution des vitesses	99
Flux entre les gaz	100
Énergie injectée	102
3.5.4 Conclusion	104
3.6 Conclusion et perspectives	106

Annexes	113
A Stabilité d'une bille rebondissant sur une surface concave	115
A.1 Introduction	116
A.2 Dispositif expérimental	116
A.3 Résultats préliminaires	117
A.3.1 Premières observations	117
A.3.2 Premier modèle théorique	118
A.4 Résultats détaillés	120
A.4.1 Caractérisation du mouvement de la bille	120
A.4.2 Modèle théorique	121
Description du vol libre	122
Description de la collision	123
Description complète	124
A.5 Conclusions et perspectives	125
B Travaux complémentaires sur les gaz granulaires	127
B.1 Température cinétique du gaz	128
B.2 Temps entre deux chocs successifs	129
C Étude d'un autre système dissipatif stationnaire : dynamique d'une chaîne de patins frictionnels	133
C.1 Introduction	134
C.2 Description du modèle	135
C.2.1 Construction du processus	136
C.2.2 Choix des paramètres	138
C.3 Étude complète d'un processus	138
C.3.1 Caractéristiques du processus	139
C.3.2 Théorème de Fluctuation-Dissipation	141
C.3.3 Relation de Fluctuation	143
C.4 Résultats globaux	145
C.4.1 Résultats à taille de système fixée ($N = 30$ blocs)	145
C.4.2 Influence de la taille de système	146
C.5 Évolution du modèle et perspectives	147
Bibliographie	151

Résumé

Au cours des vingt dernières années, le formalisme en mécanique statistique permettant de décrire des états loin de l'équilibre s'est beaucoup développé. Cependant, les réalisations expérimentales permettant de tester les résultats, et leur robustesse lorsque le système s'éloigne des hypothèses dans le cadre desquelles ils sont établis, sont peu nombreuses et récentes. Partant de ce constat, nous proposons de considérer des systèmes macroscopiques qui permettent un bon contrôle des paramètres expérimentaux. Nous rapportons principalement l'étude de deux systèmes dissipatifs maintenus dans un état stationnaire.

D'une part, nous étudions la dynamique d'une bille seule rebondissant à la verticale d'une surface vibrée. Nous considérons tout particulièrement les propriétés des échanges d'énergie entre la particule (la bille) et le thermostat (la surface vibrée) : propriétés statistiques, écart à la situation d'équilibre, réversibilité. D'autre part, nous considérons les propriétés d'un gaz granulaire maintenu dans un état stationnaire sondées au moyen des fluctuations de la position angulaire d'une pale plongée dans le système. Nous avons vérifiés ainsi que certaines prédictions théoriques destinées à la description de systèmes non dissipatifs restent encore valables dans ce système dissipatif : théorème de fluctuations, théorème de fluctuation-dissipation, etc. L'utilisation de deux dispositifs expérimentaux couplés, nous permet, de plus, de discuter des échanges d'énergie entre des systèmes maintenus dans des conditions expérimentales différentes, température ou densité, en particulier dans la limite des gaz très raréfiés.

Abstract

Over the last two decades, formalism in statistical mechanics describing states far from equilibrium has been significantly developed. However, there are few experimental achievements to test exact results and robustness when the system is far from the assumptions under which they are established. On this basis, we propose to consider macroscopic systems that allow good control of experimental parameters. We report here the study of two dissipative systems maintained in a steady state.

On the one hand, we study the dynamics of a single bead bouncing vertically upon a vibrated surface. We consider the properties of energy exchanges between the particle (bead) and the thermostat (the vibrated surface) : statistical properties, deviation from equilibrium, reversibility. On the other hand, we consider the properties of a granular gas maintained in a steady state, studying the fluctuations in the angular velocity of a blade immersed in the gas. We test some theoretical expectations for non dissipative systems and show that they are compatible with our measurements : fluctuation theorem, fluctuation-dissipation theorem. Using two coupled experimental devices, we discuss energy exchanges between systems maintained under different states, temperature or density, especially in the limit of very low density gases.

CHAPITRE 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	La physique statistique hors-équilibre	12
1.2	Les systèmes dissipatifs stationnaires	13
1.3	Les gaz granulaires	14
1.4	Résultats généraux en Physique Statistique proche ou loin de l'équilibre	17
1.4.1	Le Théorème de Fluctuation-Dissipation	17
1.4.2	La Relation de Fluctuation	18
1.5	Plan et objectifs	23

Historiquement introduite sous la forme de la théorie cinétique des gaz, la physique statistique apparaît au milieu du XIXe siècle, sous l'impulsion de Kelvin, Maxwell ou encore Boltzmann. À l'époque, on cherche à proposer un modèle de la matière à l'échelle atomique pour expliquer le comportement de certaines quantités macroscopiques (pression, volume, capacité calorifique, etc). L'élément principal de ce modèle repose sur la description des collisions entre atomes (ou molécules). Ainsi, la pression a, par exemple, pu être interprétée comme mesure de la quantité de mouvement des constituants d'un gaz. La mécanique statistique a ensuite été formalisée, notamment en 1902 par Gibbs. Son formalisme a permis de généraliser et de justifier *a posteriori* les principes de la thermodynamique d'équilibre. Il repose sur un postulat central : tous les micro-états accessibles d'un système isolé en équilibre sont équiprobables. Ainsi, on peut associer une probabilité à un état donné du système et définir des fonctions d'état qui contiennent la plupart des renseignements sur la physique du système. Ce formalisme repose sur plusieurs principes, comme celui d'ergodicité, ou sur des résultats mathématiques tels le théorème central limite, qui établit que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Il en résulte que ce cadre n'est pas adapté pour décrire les systèmes hors de l'équilibre.

1.1 La physique statistique hors-équilibre

Dans la physique statistique hors-équilibre, on s'intéresse à des processus dont la dynamique est tellement lente qu'ils n'atteignent jamais l'équilibre thermodynamique, ou à des processus irréversibles qui sont en général induits par un apport extérieur d'énergie (ou de matière) au système. Dans le premier cas, les systèmes sont dits vitreux : ils font intervenir des processus de relaxation extrêmement lents lorsqu'ils sont soumis à une variation d'un paramètre de contrôle. Ils sont par essence hors-équilibre car ils n'atteignent jamais l'état d'équilibre thermodynamique [Berthier et Biroli - 2011]. On peut citer par exemple les fluides complexes (colloïdes, émulsions, polymères) [Knaebel *et al.* - 2000], les systèmes magnétiques désordonnés (verres de spins) [Gabay et Toulouse - 1981] ou encore les verres structuraux [Mézard et Parisi - 2000]. La physique de ces systèmes est très riche puisqu'elle fait intervenir des effets mémoire, du vieillissement, etc. Pour décrire le second cas, on peut par exemple considérer un système placé dans un état stationnaire, *i.e.* qui ne dépend pas du temps. Si on lui applique une force extérieure (un champ électromagnétique, un cisaillement, une vibration) ou si on le place entre deux réservoirs (de température, de particules ou à des potentiels chimiques différents), il apparaît des flux (de chaleur, de particules, ...) entre le système et son environnement. Dès lors, le système se trouve dans un état stationnaire hors-équilibre. C'est sur ce type de systèmes que porte la présente thèse.

Pour les systèmes proches de l'équilibre, on peut développer une méthode perturbative basée sur la théorie de la réponse linéaire. En se basant sur les propriétés d'un système à l'équilibre, on peut prévoir son comportement lorsqu'on lui applique une faible perturbation. Grâce à cette théorie, beaucoup de résultats généraux ont été obtenus, avec en premier lieu les travaux d'Einstein sur le mouvement brownien [Einstein - 1905]. Il a montré que les fluctuations

de vitesse d'une particule brownienne à l'équilibre dans un bain thermique sont proportionnelles à sa vitesse moyenne lorsqu'elle est soumise à une faible force. Ce résultat constitue une première version du Théorème de Fluctuation–Dissipation (TFD), qui relie de façon plus générale la réponse d'un système à une perturbation à ses fluctuations libres. Par la suite, de nombreux résultats généraux ont été développés : les relations de réciprocity d'Onsager [Onsager - 1931a, Onsager - 1931b], la formulation générale du TFD [Callen et Greene - 1952] et la formule de Green–Kubo [Green - 1954, Kubo *et al.* - 1957] qui relie les coefficients de transport linéaire à l'auto-corrélation des flux.

1.2 Les systèmes dissipatifs stationnaires

Les systèmes dissipatifs présentent des comportements dynamiques très différents et souvent étonnants, en particulier lorsqu'ils sont soumis à un forçage extérieur. Dans ce type de systèmes, la dissipation est une propriété intrinsèque et il est nécessaire d'injecter de l'énergie pour le maintenir en mouvement. Ainsi, l'énergie E du système satisfait :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{w}(t) - \dot{d}(t), \quad (1.1)$$

où \dot{w} et \dot{d} désignent respectivement les puissances injectée et dissipée. Le système est alors maintenu dans un état stationnaire lorsque la puissance injectée compense en moyenne l'énergie dissipée : $\langle \dot{w} \rangle = \langle \dot{d} \rangle$, comme illustré sur la figure 1.1.

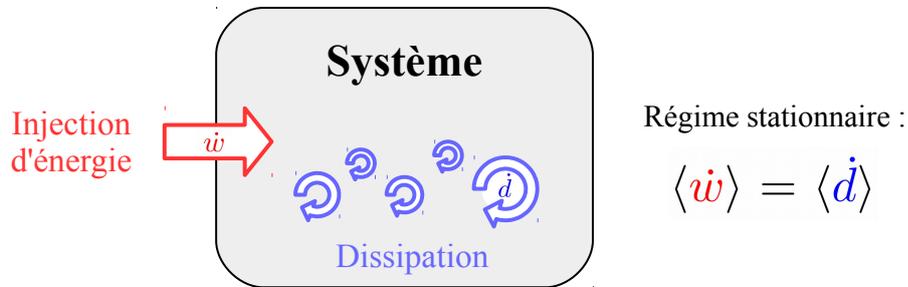


Figure 1.1 – Schéma de principe d'un système dissipatif maintenu dans un régime stationnaire hors-équilibre. Les flèches désignent des flux d'énergie.

Un exemple bien connu de système dissipatif maintenu dans un état hors-équilibre stationnaire est la turbulence hydrodynamique pleinement développée [Kolmogorov - 1941, Monin et Yaglom - 1971]. Le système reçoit de l'énergie aux grandes échelles avant qu'elle ne soit dissipée aux plus petites échelles à cause de la viscosité du fluide. On peut également citer le cas de circuits électroniques [Garnier et Ciliberto - 2005, Falcón et Falcon - 2009, Bonaldi *et al.* - 2009], de convection thermique turbulente [Ahlers *et al.* - 2009], de turbulence à deux dimensions [Bandi et Connaughton - 2008], de turbulence d'ondes sur des plaques élastiques [Cadot *et al.* - 2010], de turbulence d'ondes de surfaces [Falcon *et al.* - 2008], ou encore de machines moléculaires [Seifert - 2012, Prost *et al.* - 2009, Marchetti *et al.* - 2013, Fodor *et al.* - 2014]. Une autre grande classe

de systèmes dissipatifs stationnaires est constituée des gaz granulaires, très largement étudiés par le passé [Mehta - 2007, Aranson et Olafsen - 2002, Aumaitre *et al.* - 2001, Aumaitre *et al.* - 2004, Visco *et al.* - 2005]. C'est sur ce type de systèmes que porte cette thèse, comme développé dans la partie suivante. Notre objectif n'est pas ici de reproduire une étude similaires à celles qui ont déjà été menées sur ces systèmes, mais bien d'adopter une approche sensiblement différente pour tenter d'étendre notre compréhension de la physique des systèmes dissipatifs en général.

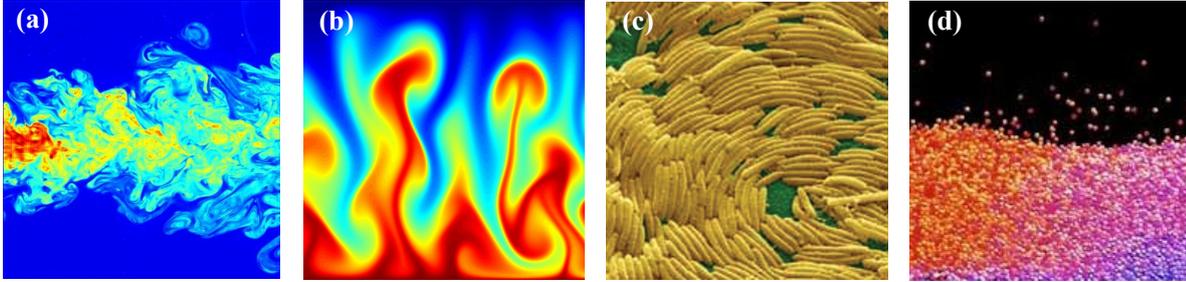


Figure 1.2 – Exemples de systèmes stationnaires hors équilibre. (a) Turbulence hydrodynamique [Westerweel *et al.* - 2009] (b) Convection thermique [Bartlett et Bullock - 2014] (c) Myxobactéries [Marchetti *et al.* - 2013] (d) Milieu granulaire vibré [Van der Weele - 2008].

Il est à noter que la puissance injectée (ou d'autres quantités globales, *i.e.* quantités qui sont le résultat d'une moyenne spatiale ou temporelle, sur une partie ou l'ensemble d'un système) joue un rôle crucial dans les systèmes stationnaires hors-équilibre : c'est une quantité fluctuante dont la statistique et la dynamique dépendent du mécanisme d'injection et de la réponse du système au forçage. Alors, les fluctuations temporelles ne peuvent pas être négligées au profit de coefficients effectifs constants, qui seraient censés décrire le comportement moyen du système. Par exemple, les fluctuations ne sont pas nécessairement gaussiennes, peuvent prendre des valeurs négatives (même si la valeur moyenne est nécessairement positive) et présentent souvent de grandes déviations, comme illustré sur la figure 1.3 [Ciliberto *et al.* - 1991, Labbe *et al.* - 1996, Falcon *et al.* - 2008]. On peut alors se demander qu'elle est la quantité qui caractérise le mieux la source d'énergie. Peut-on par exemple en définir la température ? Par ailleurs, dans les systèmes dissipatifs, il n'existe pas non plus de définition propre de la température. Se pose alors la question de la définition d'une température effective, qui caractérise l'énergie interne du système ou son degré d'agitation. Plusieurs définitions de la température effective ont été proposées selon les systèmes étudiés : en turbulence faiblement développée [Robert et Sommeria - 1991, Castaing - 1996, Grenard *et al.* - 2008], pour les milieux granulaires [Edwards - 1994, Kumaran - 1998, Makse et Kurchan - 2002, Baldassarri *et al.* - 2005, Gnoli *et al.* - 2014], ou encore les systèmes vitreux [Cugliandolo - 2011].

1.3 Les gaz granulaires

Parmi les systèmes dissipatifs hors-équilibre, les gaz granulaires font figure de système modèle. C'est ce type de systèmes que nous nous proposons d'étudier expérimentalement et/ou numériquement dans cette thèse. On parle généralement de milieu granulaire pour des systèmes

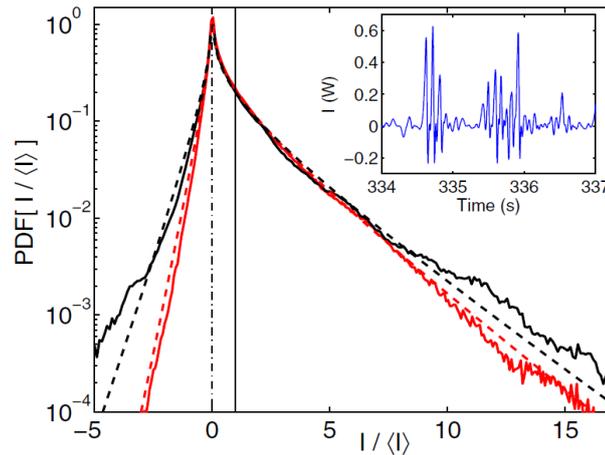


Figure 1.3 – Exemples de distribution de probabilité de la puissance injectée $P(I)$ dans un système présentant de la turbulence d’onde à la surface d’un liquide. Les fluctuations ne sont pas du tout gaussiennes et prennent des valeurs négatives alors que la valeur moyenne est positive. Insert : exemple de signal temporel. Issu de [Falcon *et al.* - 2008].

constitués d’un grand nombre de particules macroscopiques (de taille supérieure à la dizaine de micromètres) de sorte que l’énergie mécanique typique de chaque grain est beaucoup plus grande que l’échelle d’énergie thermique. D’autre part, les grains interagissent entre eux avec des forces de contact dissipatives (inélastiques). Parmi les milieux granulaires, on distingue plusieurs phases [Jaeger *et al.* - 1996] :

- une phase dense, caractérisée par des temps de relaxation très grands et des effets de vieillissement,
- une phase liquide, qui peut être décrite par des équations continues comme en hydrodynamique non-newtonienne,
- une phase gazeuse, dont la densité est relativement faible.

C’est ce dernier état qui est l’objet de cette thèse, et qui sera considéré en tant que système dissipatif hors-équilibre.

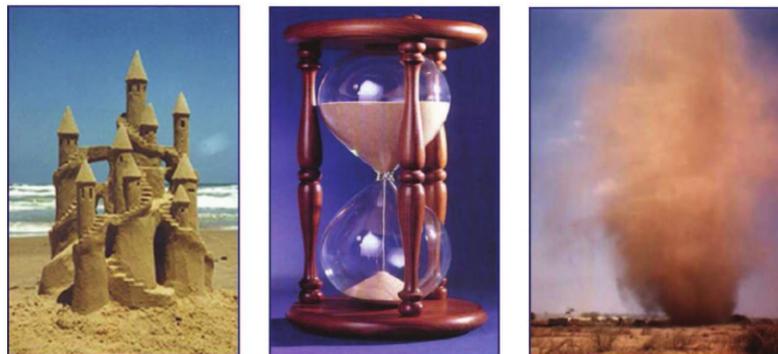


Figure 1.4 – Exemples typiques de systèmes représentant les trois états possibles de la matière granulaire : dense, liquide et gaz. Issu de [Van der Weele - 2008].

Afin que le lecteur puisse se représenter ce qu’est un gaz granulaire, nous pouvons évoquer l’image d’une boîte vibrée contenant des petits grains. La façon la plus simple de caractériser un

tel système est de considérer N sphères dures identiques, qui perdent une partie de leur énergie cinétique à chaque collision (avec une autre sphère ou un bord de la boîte) [Barrat *et al.* - 2005]. Sans mécanisme d'injection d'énergie, l'énergie totale du système décroît au cours du temps, jusqu'à atteindre un état où toutes particules sont au repos. Si on lui fournit continûment de l'énergie, le système peut atteindre un état stationnaire hors-équilibre. On peut injecter cette énergie par les bords du système, ce qui est l'option utilisée le plus souvent expérimentalement, avec l'inconvénient que le système est inhomogène [Grossman *et al.* - 1997, McNamara et Barrat - 1997, McNamara et Luding - 1998, Kumaran - 1998, Brey *et al.* - 2000, Barrat *et al.* - 2002]. Notons qu'il est possible pour des systèmes expérimentaux bidimensionnels d'injecter de l'énergie de façon homogène [Olafsen et Urbach - 1998]. Dans les études numériques, il est également possible d'utiliser une force isotrope agissant sur chacune des particules du système, ce qui conduit à un gaz homogène [Williams et MacKintosh - 1996, Puglisi *et al.* - 1998, Van Noije et Ernst - 1998, Peng et Ohta - 1998, Van Noije *et al.* - 1999, Henrique *et al.* - 2000, Moon *et al.* - 2001, Pagonabarraga *et al.* - 2002]. Ces différentes méthodes sont illustrées sur la figure 1.5.

Il peut être intéressant, d'un point de vue théorique, de comparer notre système dissipatif entretenu en régime stationnaire (et donc intrinsèquement hors-équilibre) à un système classique décrit par la mécanique statistique et la thermodynamique des systèmes conservatifs à l'équilibre. En particulier, l'étude spécifique des effets de la nature dissipative des contacts entre les particules a conduit à la réalisation expérimentale de gaz granulaires en trois dimensions, en vibrant la boîte qui les contient [Falcon *et al.* - 1999, Falcon *et al.* - 2006, Naert - 2012] et en deux dimensions, avec une mono-couche partielle de grains placés sur une surface horizontale animée d'un mouvement vertical [Olafsen et Urbach - 1998, Rouyer et Menon - 2000]. Certaines études ont mis en évidence des écarts aux distributions de probabilités des vitesses à l'équilibre [Losert *et al.* - 1999, Brey *et al.* - 1999, Brey et Ruiz-Montero - 2003, Barrat et Trizac - 2003, Brey et Ruiz-Montero - 2008], ou encore des lois échelles anormales concernant la pression dans le gaz [McNamara et Falcon - 2005]. La dynamique de ces systèmes a été aussi beaucoup étudiée, en particulier les corrélations temporelles, aussi bien expérimentalement [Géminard et Laroche - 2004, Falcon *et al.* - 2006], numériquement [Grossman *et al.* - 1997, Cafiero *et al.* - 2000, Ben-Naim *et al.* - 2005, Serero *et al.* - 2006] ou théoriquement [Aumaitre *et al.* - 2006, Javier Brey et Khalil - 2010].

En comparant un gaz granulaire à un système à l'équilibre thermodynamique se pose naturellement la question de la thermalisation du système. En effet, en particulier pour les gaz bidimensionnels, on peut se demander si les déviations à la statistique d'équilibre sont dues à la nature dissipative des contacts entre particules ou au type de thermostat avec lequel les billes sont en contact. Par exemple, dans le cas d'un gaz dissipatif en contact avec un thermostat, on s'attend à une diminution de la température cinétique lorsqu'on augmente la densité du système du fait de l'augmentation du taux de collisions [Huntley - 1998]. Pourtant, on observe expérimentalement une augmentation de la température avec la densité, au moins pour un système bidimensionnel [Losert *et al.* - 1999, Géminard et Laroche - 2004]. Il convient donc de se poser la question de savoir si un plateau vibrant constitue un bon thermostat dans le cas de gaz bidimensionnels.

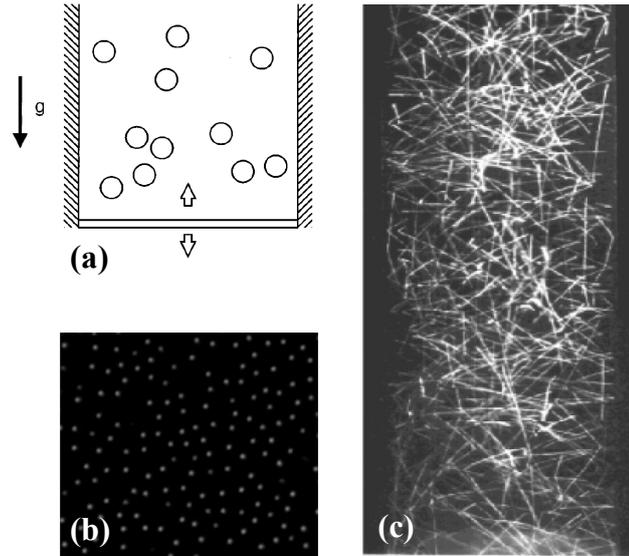


Figure 1.5 – Exemples typiques de gaz granulaires. (a) simulation numérique d'un gaz bidimensionnel [McNamara et Luding - 1998] (b) réalisation expérimentale d'un gaz bidimensionnel [Olafsen et Urbach - 1998] (c) réalisation expérimentale d'un gaz tridimensionnel [Falcon *et al.* - 2001].

1.4 Résultats généraux en Physique Statistique proche ou loin de l'équilibre

Nous décrivons ici deux résultats généraux utilisés dans cette thèse. Le Théorème de Fluctuation-Dissipation (TFD) suppose d'être proche de l'équilibre, alors que la Relation de Fluctuation est, elle, valable loin de l'équilibre.

1.4.1 Le Théorème de Fluctuation-Dissipation

Comme évoqué précédemment, le théorème de Fluctuation-Dissipation (TFD) a été introduit initialement dans le cadre de l'étude du mouvement brownien [Einstein - 1905]. Plus généralement, le TFD établit que les fluctuations propres du système sont proportionnelles à sa réponse à une perturbation [Chandler - 1987]. Nous proposons de développer un exemple pour illustrer le théorème. Pour cela, nous considérons une paire de variable conjuguées (par exemple, la position r d'une 'particule' et la force f) d'un système en contact avec un réservoir d'énergie. Position et force sont conjuguées dans le sens que leur produit correspond au travail exercé par la force sur la 'particule'. Le théorème repose sur l'idée que les fluctuations spontanées de la position $r(t)$ ont les mêmes propriétés statistiques que la relaxation de $r(t)$ après avoir appliqué un faible forçage extérieur. La démonstration de ce théorème repose sur la théorie de la réponse linéaire et l'équilibre thermique entre le système étudié et le thermostat avec lequel il est en contact. Alors, la fonction réponse \mathcal{H} est telle que $r(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{H}(t-t') f(t') dt'$. De façon équivalente, cela peut s'écrire dans l'espace de Fourier, $\text{TF}[r](\omega) = \text{TF}[\mathcal{H}](\omega) \text{TF}[f](\omega)$, où ω désigne la pulsation du mode considéré. Les fluctuations de r sont alors liées à la réponse

dissipative du système à une perturbation de la variable conjuguée f :

$$|\text{TF}[r]|^2 = \frac{4 k_B T}{\omega} \text{Im} \left[\frac{\text{TF}[r]}{\text{TF}[f]} \right], \quad (1.2)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température du système à l'équilibre avec le thermostat.

Au cours des dernières années, plusieurs études ont proposé d'utiliser le TFD de manière heuristique pour définir une température effective d'un système hors-équilibre stationnaire. C'est une démarche qui a été proposée dans le contexte des verres de spin [Cugliandolo et Kurchan - 1993] puis utilisée ultérieurement dans les granulaires vibrés [D'anna *et al.* - 2003, Gnoli *et al.* - 2014] (cf Fig. 1.6), dans un gel et un verre de polymère [Buisson *et al.* - 2003] ou pour une corde de Melde placée dans un écoulement turbulent [Grenard *et al.* - 2008]. Lorsqu'un système n'est pas à l'équilibre, il n'y a *a priori* aucune raison pour que le théorème soit vérifié. Cependant, si l'excitation appliquée au système n'est qu'une perturbation par rapport à l'état stationnaire dans lequel il se trouve, il est possible que la réponse soit proportionnelle aux fluctuations libres. Si c'est le cas, cela permet de mesurer une énergie caractéristique qui peut s'apparenter à la température effective du système stationnaire.

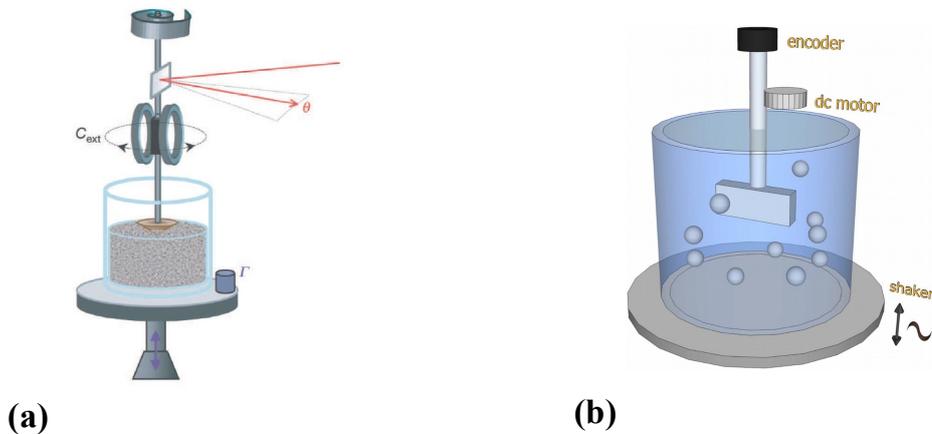


Figure 1.6 – Exemples de dispositifs expérimentaux permettant de mesurer la température effective d'un milieu granulaire vibré. (a) Oscillateur de torsion [D'anna *et al.* - 2003] (b) Pale couplée à un moteur [Gnoli *et al.* - 2014].

1.4.2 La Relation de Fluctuation

Les résultats généraux en physique statistique loin de l'équilibre sont assez rares. La Relation de Fluctuation (RF) en est un exemple aujourd'hui très connu, qui est valable pour les systèmes stationnaires. Elle a été découverte de manière heuristique dans le cadre d'une étude numérique d'un fluide sous un cisaillement externe [Evans *et al.* - 1993]. Pour les systèmes proches de l'équilibre ou macroscopiques, la RF donne une généralisation de la seconde loi de la thermodynamique. Par analogie avec la thermodynamique des processus irréversibles, on peut

écrire les variations temporelles de l'entropie S de la façon suivante :

$$\frac{dS}{dt} = \sigma_c - \sigma_e. \quad (1.3)$$

Le terme σ_c représente la production irréversible d'entropie du système : $\sigma_c \geq 0$ ($\sigma_c = 0$ à l'équilibre). σ_e correspond à la moyenne de l'entropie échangée entre le système et son environnement. Nous le nommerons "flux d'entropie" puisque son expression est très souvent proportionnelle aux flux d'énergie (ou de particules) qui traversent le système. σ_e étant bien définie pour les systèmes microscopiques, il peut être mesuré (numériquement ou expérimentalement). Cependant, il n'existe pas de définition rigoureuse de l'entropie pour les systèmes hors de l'équilibre. On peut proposer de mesurer le flux moyen

$$S_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sigma_e dt. \quad (1.4)$$

Lorsque le temps d'intégration τ tend vers l'infini, on obtient alors le flux d'entropie moyen du système. Notons cependant qu'il est impossible de réaliser une moyenne sur un temps infini en raison de la taille finie des échantillons dans le cadre d'une étude expérimentale ou numérique. Alors, la quantité S_τ est en réalité, elle aussi, une quantité fluctuante et on peut s'intéresser à sa dynamique et à sa distribution de probabilité. La Relation de Fluctuation établit que, lorsque $\tau \rightarrow \infty$, on a :

$$\frac{P(S_\tau)}{P(-S_\tau)} = \exp(\tau S_\tau), \quad (1.5)$$

où $P(S_\tau)$ désigne la probabilité d'observer un événement S_τ .

La RF a ensuite été démontrée pour les systèmes chaotiques et réversibles [Gallavotti et Cohen - 1995, Evans et Searles - 2002]. Dans ce cadre, la quantité fluctuante considérée est le taux de contraction de l'espace des phases, lié au flux d'entropie. Notons que la RF permet de démontrer les relations de Green-Kubo pour les coefficients de transport linéaire lorsqu'elle est combinée avec le Théorème central limite [Searles et Evans - 2000]. D'autre part, elle peut être appliquée à des transitions hors-équilibre entre les deux états différents à l'équilibre, conduisant à l'égalité de Jarzynski [Reid *et al.* - 2005]. Sa démonstration nécessite la réversibilité temporelle de la dynamique du système, son ergodicité et au moins une certaine forme de chaotité. Il est important de noter que la démonstration de la RF ne nécessite pas et n'implique pas que la distribution de la quantité fluctuante moyenne temporelle soit gaussienne. Le théorème dit de Gallavotti-Cohen a également été généralisé pour les systèmes stochastiques. Pour cela, l'entropie phénoménologique, *i.e.* la puissance injectée divisée par la température a été utilisée. Ainsi, il a été montré que la puissance injectée moyennée sur des grands temps vérifie cette relation dans des systèmes décrits par une équation de Langevin [Kurchan - 1998]. Par la suite, ce résultat a été généralisé aux systèmes ayant une dynamique markovienne [Lebowitz et Spohn - 1999]. De nombreuses études ont essayé de tester analytiquement ou expérimentalement cette relation sur des systèmes microscopiques. L'hypothèse de réversibilité temporelle est dans ce cas relativement facile à vérifier, mais celle de chaotité l'est beaucoup moins [Gallavotti - 1997, Bonetto *et al.* - 1997, Ciliberto et Laroche - 1998, Wang *et al.* - 2002, Ciliberto *et al.* - 2004, Garnier et Ciliberto - 2005].

Une question importante est alors de savoir si une telle relation pourrait éventuellement être vérifiée également pour des systèmes dissipatifs irréversibles (on entend ici l'irréversibilité microscopique, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'invariance par renversement du temps). Il n'existe pas de définition rigoureuse du flux d'entropie pour de tels systèmes. En conséquence, l'approche la plus intuitive serait d'étudier l'entropie phénoménologique, qui est ici la puissance injectée par le thermostat divisée par la température effective du système :

$$S_\tau = \frac{\dot{w}_\tau}{T_{\text{eff}}}. \quad (1.6)$$

En effet, la puissance injectée mesurée expérimentalement permet de relier les deux quantités mal définies dans ce contexte : la température et le taux de création d'entropie. Notons également qu'ici nous ne faisons pas de distinction entre chaleur et travail, car il nous est impossible de le faire à l'échelle macroscopique à laquelle nous travaillons. Tout cela suggère donc l'utilisation de la puissance injectée moyennée sur un intervalle de temps τ , $\dot{w}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{w} dt$ pour tester la validité de la RF. Cela permettrait alors de faire un lien entre la quantité étudiée et le flux d'entropie, et d'établir un lien entre les fluctuations de flux d'énergie et l'énergie interne du système. En effet, la RF établit dans ce cas que dans la limite $\tau \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{1}{\tau} \ln \left[\frac{P(\dot{w}_\tau)}{P(-\dot{w}_\tau)} \right] = \beta \dot{w}_\tau, \quad (1.7)$$

avec β une constante dont la dimension est l'inverse d'une énergie, qui peut éventuellement être identifiée à l'énergie interne du système. Notons que les hypothèses attestant de la réversibilité du système sont très rarement vérifiées dans la nature. En hydrodynamique, pour les systèmes faisant intervenir du frottement solide ou des contacts inélastiques, la puissance dissipée est toujours positive et irréversible. Notons également qu'il est nécessaire pour tester la RF que la puissance injectée puisse prendre dans certains cas des valeurs négatives, ce qui n'est pas évident *a priori*. En effet, introduisons la fonction d'asymétrie $\delta(\dot{w}_\tau) \equiv \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{P(\dot{w}_\tau)}{P(-\dot{w}_\tau)} \right)$. La RF établit la linéarité de la fonction d'asymétrie : $\delta(\dot{w}_\tau) = \beta \dot{w}_\tau$, dans la limite des grands τ . Pour la tester, il est donc nécessaire d'obtenir une statistique suffisante pour les événements négatifs $\dot{w}_\tau < 0$. Or, la probabilité d'observer des événements négatifs diminue quand le temps τ augmente. Pourtant, la vérification de la RF suppose de moyennner sur des temps très longs (en pratique, longs devant le temps typique de corrélation du système). Il est ainsi nécessaire de trouver le bon compromis entre les deux conditions. Une autre difficulté expérimentale est de faire la part entre ce qui est dû à la RF, et ce qui provient des propriétés du signal mesuré. En effet, dans les résultats numériques et expérimentaux, la probabilité d'observer des événements négatifs est souvent faible, *i.e.* la zone où la statistique des événements négatifs est significative est proche de $\dot{w}_\tau = 0$. Dans ce cas, un développement de Taylor à l'ordre 1 en \dot{w}_τ suffit pour décrire le comportement du système : $\delta(\dot{w}_\tau) \simeq \frac{2}{\tau} \frac{dP(0)}{d\dot{w}_\tau} \dot{w}_\tau$, et la linéarité est alors triviale. Toutefois, l'expression 1.7 n'est pas le premier ordre d'un développement : il s'agit d'une relation linéaire exacte. Il est à noter que l'on ne peut jamais, avec des statistiques finies, prouver qu'un terme d'ordre 3 est nul. On peut dire au mieux qu'il est négligeable et que nos observations sont compatibles avec la RF. Alors, la mesure de la pente β asymptotique peut être utilisée comme définition de la température effective du système étudié [Zamponi - 2007].

Des tests expérimentaux de la Relation de Fluctuation ont été réalisés dans divers systèmes : dans les écoulements turbulents en convection thermique [Ciliberto et Laroche - 1998, Shang *et al.* - 2005], dans des gaz granulaires [Naert - 2012, Feitosa et Menon - 2004], dans des flux tourbillonnants [Ciliberto *et al.* - 2004], dans les cristaux liquides [Goldburg *et al.* - 2001], avec un dipôle électrique [Garnier et Ciliberto - 2005] ou un oscillateur mécanique [Douarache *et al.* - 2006], dans un système à deux niveaux atomique [Schuler *et al.* - 2005], et au moyen d'une particule colloïdale [Wang *et al.* - 2002, Blicke *et al.* - 2006] ou une molécule d'ARN [Collin *et al.* - 2005] dans un piège optique. Dans toutes ces expériences, la Relation de Fluctuation se trouve être vérifiée avec une bonne précision bien que certains de ces systèmes ne satisfassent pas l'hypothèse de réversibilité microscopique (Fig. 1.7). Un bon accord a été également signalé dans les simulations numériques de la turbulence [Aumaitre *et al.* - 2001, Gilbert - 2004], et de gaz granulaires [Aumaitre *et al.* - 2001, Aumaitre - 1999, Aumaitre *et al.* - 2004]. Plus récemment, de larges gammes de fluctuations ont été atteintes dans des expériences de turbulence d'ondes et dans dans un circuit électrique [Falcon *et al.* - 2008, Falcón et Falcon - 2009]. Dans les deux cas, les auteurs ont montré que la RF n'était pas vérifiée à cause des très fortes corrélations temporelles qui existent dans le système.

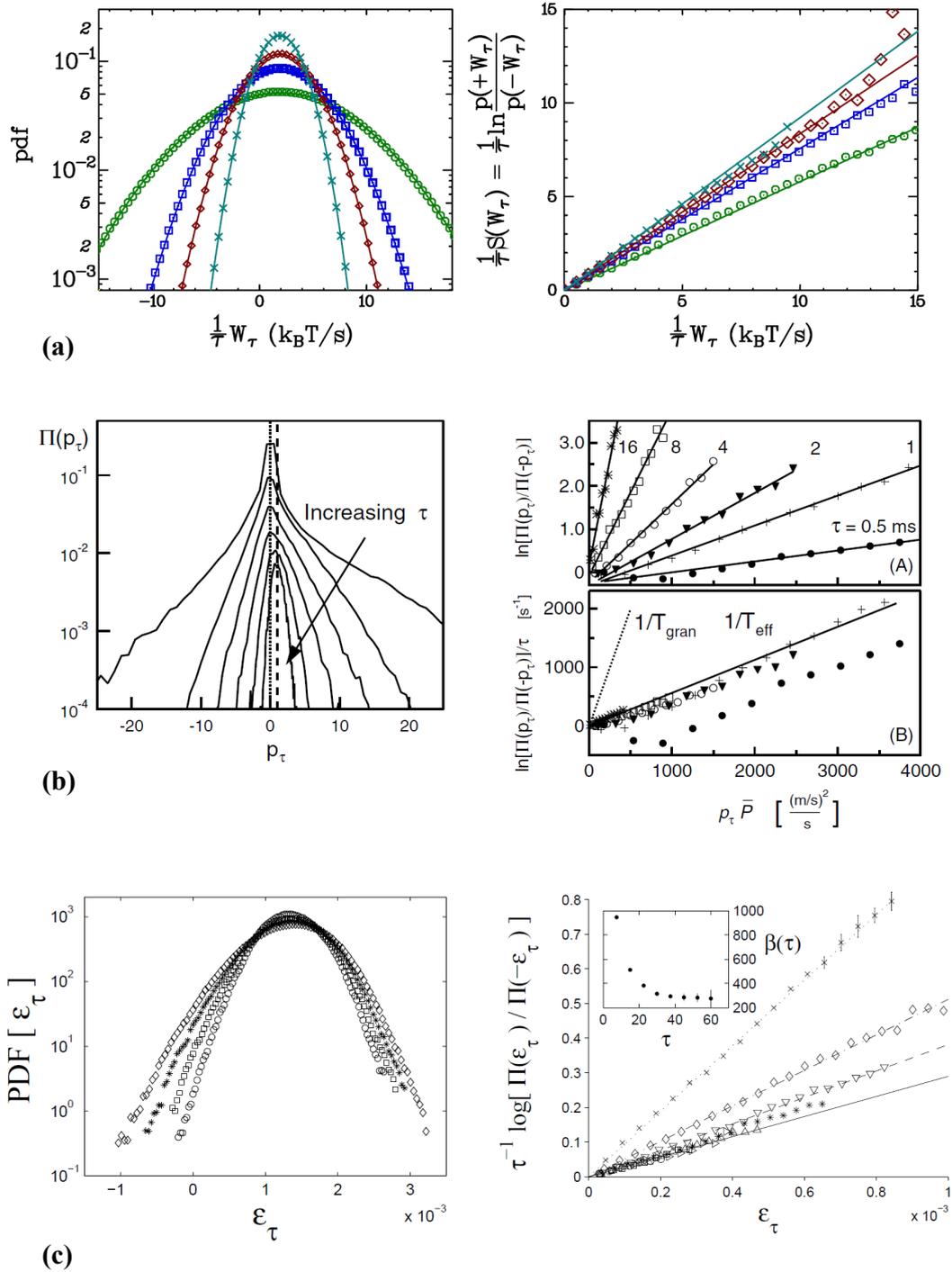


Figure 1.7 – Exemples de tests de la RF avec les distributions de puissance injectée moyennée (gauche) et les fonctions d’asymétrie associées (droite), pour différents systèmes : (a) oscillateur mécanique [Douarche *et al.* - 2006] (b) dans un gaz granulaire [Feitosa et Menon - 2004] (c) dans un modèle de turbulence [Aumaitre *et al.* - 2001].

1.5 Plan et objectifs

Lorsqu'on évoque un gaz granulaire, on se représente naturellement une collection de grains en mouvement. Pourtant, le gaz granulaire le plus simple qui soit est une balle inélastique rebondissant sur une surface vibrée aléatoirement. On s'attend bien entendu à ce qu'il existe de fortes corrélations dans la dynamique de la balle, puisque la notion de chaos moléculaire ne peut pas exister avec une unique balle. Nous nous proposons d'étudier expérimentalement et numériquement ce système dans le chapitre 2 de cette thèse. On s'intéresse en particulier au flux d'énergie échangée entre la balle et la surface en mouvement, en distinguant notamment injection et dissipation afin de mener une étude des fluctuations de la puissance injectée à la balle.

Que se passe-t-il si on considère quelques billes, et non plus une seule? Dans le chapitre 3, nous étudions expérimentalement un gaz granulaire peu dense, constitué d'un nombre de billes allant de la dizaine jusqu'à plusieurs centaines. À l'aide d'un dispositif innovant, nous sondons de manière passive ou active les propriétés statistiques et dynamiques du gaz en fonction de plusieurs paramètres de contrôle. Nous étudions notamment le système en tant que réservoir d'énergie, afin de voir s'il est possible de définir une température effective. Nous étudions également la dynamique temporelle d'un objet plongé dans le gaz granulaire, ainsi que les flux d'énergie entre deux gaz granulaires couplés.

Enfin, nous présentons en annexe d'autres études réalisées au cours de cette thèse. Dans l'annexe A, nous présentons une étude dérivée du système étudié au chapitre 2. Dans l'annexe B, nous présentons des travaux complémentaires encore en cours, effectués en lien avec le dispositif expérimental servant à étudier le gaz granulaire. Enfin, nous présentons en annexe C le début d'une étude réalisée sur un autre système dissipatif stationnaire : une chaîne de patins frictionnels.

CHAPITRE 2

Mécanique statistique des rebonds d'une bille sur une surface vibrée

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Description du problème	28
2.2.1	Principe de l'expérience	28
2.2.2	Dispositif expérimental	29
2.2.3	Mouvement du plateau	34
2.2.4	Simulation numérique du problème	35
2.3	Caractérisation du régime chaotique, entretenu et stationnaire	37
2.3.1	Étude des corrélations entre les mouvements de la bille et du plateau	37
2.3.2	Énergie cinétique moyenne de la bille	41
2.3.3	Corrélation temporelle - Perte de mémoire	43
2.3.4	Statistiques de différentes quantités d'intérêt	45
2.4	Étude des échanges énergétiques entre la bille et le plateau	50
2.4.1	Étude du paysage énergétique	50
2.4.2	Distinction entre injection et dissipation	54
2.5	Mesures de l'écart à l'équilibre	57
2.5.1	Nouvelle définition de l'injection et de la dissipation	57
2.5.2	Taux de création d'entropie	58
2.5.3	Test du bilan détaillé par les taux de transitions	60
2.5.4	Relation de Fluctuation - Théorème de Gallavotti-Cohen	62
2.6	Conclusion et perspectives	67

2.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier un problème en apparence très simple : une bille tombant verticalement sur un sol horizontal. Notre intuition physique nous permet de dire que la bille va rebondir un nombre fini de fois sur le sol pour finalement d'arrêter à cause du caractère dissipatif des collisions. Une façon de prendre en compte la dissipation est de considérer que la perte d'énergie est proportionnelle à l'énergie initiale de la bille. Pourtant, avec cette modélisation, on arrive à un résultat bien moins intuitif : la bille va rebondir un nombre infini de fois dans un temps fini [Luck et Mehta - 1993, Majumdar et Kearney - 2007]. Alors comment maintenir la bille en mouvement permanent ? En mettant le sol en mouvement périodique, comme on le ferait avec une balle de ping-pong, en déplaçant la raquette de haut en bas avec une fréquence et une amplitude adaptées. Ceci a été très largement étudié dans années 1980-90, notamment pour étudier les transitions des trajectoires périodiques vers le chaos [Holmes - 1982, Pieranski - 1983, Everson - 1986, Kowalik *et al.* - 1988]. Les études essentiellement numériques [Barroso *et al.* - 2009] ont permis de mettre en évidence des comportements non linéaires, les bifurcations des mouvements périodiques vers les mouvements chaotiques, ou encore les mécanismes de vibration.

Il n'existe cependant que peu d'études des rebonds d'une bille qui prennent en considération les propriétés énergétiques ou statistiques de ses trajectoires, et très peu d'approches expérimentales [Warr *et al.* - 1996, Géminard et Laroche - 2003]. Dans ces deux études, pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'établir clairement les corrélations existant entre les mouvements de la bille et du plateau, par exemple. Nous avons donc décidé d'étudier les trajectoires d'une bille vibrée avec pour objectif de fournir des données sur l'ensemble de la trajectoire (positions et vitesses de la bille et du plateau, instants des collisions). Notre dispositif expérimental nous permet d'imposer un mouvement arbitraire au plateau (sous réserve qu'il soit continu) et donc d'étudier en détail l'influence du mouvement du plateau sur celui de la bille. Pour cela, nous avons conçu un signal apériodique, mais dont la vitesse maximale est définie de façon unique. Ceci constitue une alternative aux vibrations aléatoires utilisées récemment dans d'autres expériences [Garcia-Cid *et al.* - 2015].

Plutôt que les régimes périodiques, nous nous intéressons au régime chaotique de la bille : en imposant un mouvement suffisamment important au plateau, la bille est contrainte à rebondir de façon aléatoire sur un plateau parfois en phase de montée, parfois en phase de descente. Elle se trouve alors dans une régime chaotique et stationnaire, le mouvement plateau compensant les pertes dues à l'inélasticité des collisions. On peut alors chercher à caractériser la dynamique de la bille dans ce régime.

Il peut également être intéressant, d'un point de vue théorique, de comparer notre système dissipatif, entretenu en régime stationnaire, et donc intrinsèquement hors-équilibre, à un système classique décrit par la mécanique statistique et la thermodynamique des systèmes conservatifs à l'équilibre. Une unique bille en contact avec un plateau vibrant constitue la réalisation la plus simple possible de ce type de systèmes. Lorsque sa trajectoire est chaotique, on peut chercher à caractériser le régime dans lequel se trouve la bille, du point statistique, en étudiant son énergie moyenne ou ses fluctuations. Afin de pouvoir aller le plus loin possible dans notre étude, et en

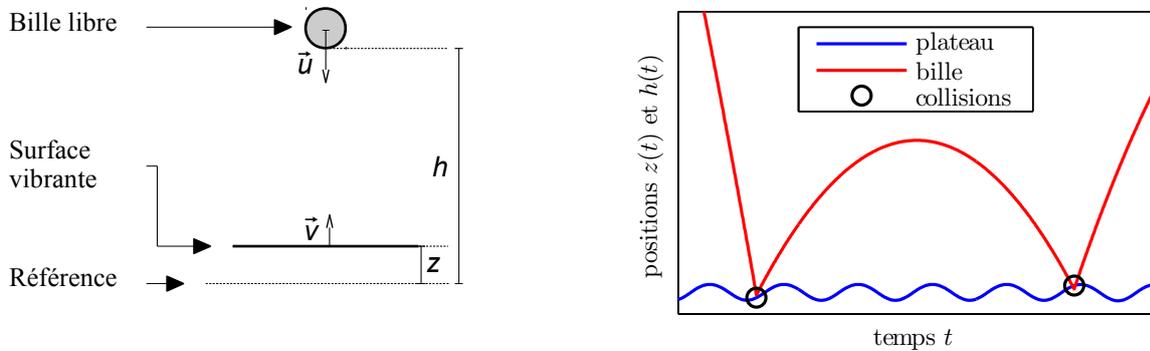
complément de notre dispositif expérimental, nous avons développé un code afin de déterminer numériquement les trajectoires et ainsi augmenter significativement la taille des jeux de données étudiés.

Dans ce chapitre, nous commençons donc par décrire le problème, le dispositif expérimental mis en place (et son équivalent numérique) et décrivons en détail la conception du mouvement apériodique du plateau utilisé. Nous développons ensuite plusieurs outils qui permettent de caractériser le régime stationnaire dans lequel se trouve la bille : son énergie cinétique moyenne, les corrélations temporelles. Nous montrons que les statistiques de la hauteur, de la vitesse et de l'énergie de la bille sont semblables à des distributions d'équilibre [Warr *et al.* - 1996]. Afin d'étudier en détail la qualité du thermostat, nous analysons ensuite le problème du point de vue énergétique en caractérisant les échanges entre la bille et le plateau. Nous montrons qu'il est possible de modéliser ces échanges énergétiques en la somme d'un processus de dissipation et d'un mécanisme d'injection d'un réservoir d'énergie. Cette séparation nous permet d'étudier en détail les transitions énergétiques du système d'un état vers un autre, et en particulier leur réversibilité. Grâce à des outils de la physique statistique hors-équilibre, nous mesurons de plusieurs façon la température effective de notre système.

2.2 Description du problème

2.2.1 Principe de l'expérience

Le principe de l'expérience est très simple : une bille rebondit sur un plateau horizontal qui vibre verticalement (Fig. 2.1) [Pieranski - 1983, Tuffillaro et Albano - 1986]. La position du plateau est donnée au temps t par $z(t)$ sa vitesse par $v(t) \equiv dz/dt$. De la même façon, la position et la vitesse de la bille sont données par $h(t)$ et $u(t) \equiv dh/dt$. Au cours de son mouvement, la bille tombe en chute libre, entre en collision avec le plateau vibrant et rebondit. La trajectoire de la bille est donc constituée d'une série de collisions aux temps t_n (n est l'indice de la collision), séparées par des paraboles de chute libre pendant les temps $\Delta t_n \equiv t_{n+1} - t_n$.



(a) Schéma de principe de l'expérience.

(b) Exemple de trajectoire de la bille au-dessus du plateau oscillant.

Figure 2.1 – Schémas du principe de l'expérience et trajectoire typique de la bille.

Loi de choc

Il convient d'abord de décrire la dynamique de la bille au moment du choc. Notre objectif est ici d'étudier la collision entre la bille et le plateau, afin de décrire correctement, mais le plus simplement possible, la perte d'énergie due à la collision.

En faisant l'hypothèse que les collisions sont instantanées, il est possible d'écrire une relation entre la vitesse de la bille avant (u_n^-) et après (u_n^+) la collision [Bernstein - 1977] :

$$u_n^+ - v_n = -e(u_n^- - v_n), \quad (2.1)$$

où v_n est la vitesse du plateau au temps d'impact t_n et e le coefficient de restitution. Ce coefficient permet de prendre en compte la perte d'énergie due à l'impact entre la bille et le plateau. Ce coefficient dépend *a priori* des matériaux qui constituent la bille et le plateau, de la taille de la bille, ainsi que de la vitesse d'impact relative de la bille sur le plateau $u_n^- - v_n$. Dans la pratique, et dans la plupart des cas, il est possible de faire l'approximation que e est constant [Tillett - 1954, Reed - 1985, Sondergaard *et al.* - 1990], pour une bille et un plateau donnés. Le coefficient de restitution e peut prendre sa valeur dans l'intervalle $[0; 1]$. La limite $e = 0$ correspond à une

collision complètement inélastique, et $e = 1$ à une collision purement élastique, sans pertes.

Vol libre

Entre deux collisions successives, la bille est uniquement soumise à la pesanteur. On peut donc donner facilement la position de la bille à tout instant entre les temps t_n et t_{n+1} :

$$h(t) = h_n + u_n^+(t - t_n) - \frac{g}{2}(t - t_n)^2, \quad (2.2)$$

avec $h_n \equiv h(t_n)$ et g l'accélération de pesanteur. Grâce à cette équation, on peut déterminer le temps de la prochaine collision t_{n+1} en écrivant que $h_{n+1} = z_{n+1} \equiv z(t_{n+1})$, et que la vitesse de la bille après la collision vaut

$$u_{n+1}^- = u_n^+ - g(t_{n+1} - t_n). \quad (2.3)$$

La dynamique générale de la bille est donc gouvernée par deux équations, Eqs. (2.1) et (2.3), ainsi que par la contrainte qu'au choc $n+1$, on a $h_{n+1} = z_{n+1}$. Dès lors, il est intéressant de noter que la connaissance des temps d'impacts t_n permet de reconstruire la totalité de la trajectoire de la bille $h(t)$ pour n'importe quelle trajectoire de plateau $z(t)$ donnée. En effet, connaissant les temps t_n et t_{n+1} et les positions z_n et z_{n+1} , on obtient u_n^+ en utilisant l'équation (2.2) et l'égalité des positions au moment du choc, $h_n = z_n$. Le principe de l'expérience repose donc sur cette idée : on impose un mouvement $z(t)$ au plateau, on détermine les temps de chocs t_n , et on reconstruit la trajectoire complète de la bille pour ensuite l'analyser.

2.2.2 Dispositif expérimental

Il existe plusieurs réalisations expérimentales du dispositif décrit précédemment [Pieranski - 1983, Tuffillaro et Albano - 1986]. Dans la plupart des cas, le plateau vibrant est en réalité une lentille concave fixée à un haut-parleur, lui même fixé sur un support horizontal, de sorte que le mouvement de la lentille soit vertical. L'utilisation d'une lentille de grand rayon de courbure est justifiée par une observation expérimentale assez courante : si on utilise un support plan, la bille va sortir du système assez rapidement, soit parce qu'elle n'a pas été lancée parfaitement verticalement, soit à cause d'un défaut d'horizontalité du support. Une surface concave permet *a priori* de ramener la bille vers le centre dès qu'elle s'en éloigne. Pour autant, nous avons observé que la réalité n'est pas si simple. Si la lentille permet de ne pas perdre la bille, on observe que les rebonds verticaux ne constituent pas une trajectoire stable. La bille a tendance à s'éloigner spontanément de l'axe. La croissance de l'instabilité la conduit à décrire des cercles dans le plan horizontal. Nous avons étudié ce phénomène inattendu et expliqué le mécanisme d'instabilité. Cependant, situés hors du discours général de ce travail de thèse, ces travaux sont présentés dans l'annexe A.

Afin d'éviter ce phénomène qui n'est pas l'objet de notre étude, nous avons utilisé un dispositif expérimental un peu différent [Géminard et Laroche - 2003]. Nous utilisons un pot vibrant magnétique (Brüel&Kjaer, Type 4803) pour imposer à une lamelle de verre (typiquement utilisée pour les observations au microscope) un mouvement vertical (Fig. 2.2). Nous utilisons

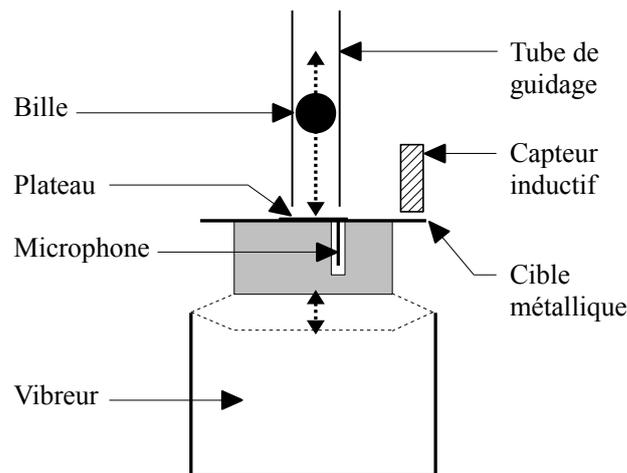


Figure 2.2 – Schéma du dispositif expérimental.

une bille en acier de diamètre 8 mm qui se déplace à l'intérieur d'un tube vertical, ceci pour la contraindre à un mouvement uniquement vertical. Le petit espace laissé entre l'intérieur du tube et la bille assure un mouvement latéral négligeable, tout en limitant au maximum de la friction. L'utilisation d'un pot vibrant de forte puissance nous permet d'augmenter l'inertie du plateau en ajoutant un bloc de masse 800 g afin de réduire le recul du plateau lors des collisions avec la bille. L'ajout de ce bloc permet également d'augmenter la distance entre la plaque de verre et le pot vibrant magnétique, afin d'éviter toute altération de la dynamique de la bille par le champ magnétique du pot vibrant. Le signal issu d'une sortie analogique d'une carte d'acquisition National Instruments (modèle 6251) passe par un amplificateur de puissance (Kepco, BOP50-4M) avant d'arriver au vibreur. De la sorte, nous ne sommes pas limités à un simple signal sinusoïdal : il est possible d'imposer tout type de trajectoire au plateau, sous réserve qu'elle soit physiquement réalisable (pas de discontinuités par exemple). La position du plateau $z(t)$ est mesurée par un capteur inductif (Electrocorp, EMD1053, gamme de mesure 0–3 mm, résolution 1 μm), dont le signal est mesuré par une entrée analogique de la carte d'acquisition. Le capteur reste immobile et délivre une tension proportionnelle à la distance entre son extrémité et une cible métallique fixée au plateau. Nous utiliserons des fréquences de vibrations comprises entre 20 et 80 Hz, et des accélérations pouvant atteindre 3 g . L'amplitude du mouvement vertical du plateau varie typiquement entre 0.1 et 2 mm. Plusieurs études expérimentales proposent de détecter les collisions entre la bille et le plateau en mesurant le son émis lors des impacts [Bernstein - 1977, Smith *et al.* - 1981, Stensgaard et Laegsgaard - 2001, Géminard et Laroche - 2003]. En suivant cette idée, nous utilisons un microphone de type "pinducer" (capteur d'ondes acoustiques de hautes fréquences) fixé au bloc situé sous la plaque de verre (Fig. 2.2). Sa tête est mise en contact avec la plaque de verre, de sorte qu'il mesure les ondes acoustiques émises lors de l'impact de la bille sur la plaque qui se propagent dans cette dernière. Le signal est amplifié et mesuré en même temps que la position du plateau via une seconde entrée analogique de la carte d'acquisition. Nous utilisons une fréquence d'acquisition de $f_a = 5 \text{ kHz}$, ce qui nous permettra d'avoir une résolution temporelle suffisante tout en limitant la taille des fichiers de données à traiter.

Analyse des données

Les données acquises via la carte d'acquisition sont analysées ultérieurement afin d'obtenir les temps des chocs, $\{t_n\}$, les positions, $\{z_n\}$, et vitesses du plateau, $\{v_n\}$, associées.

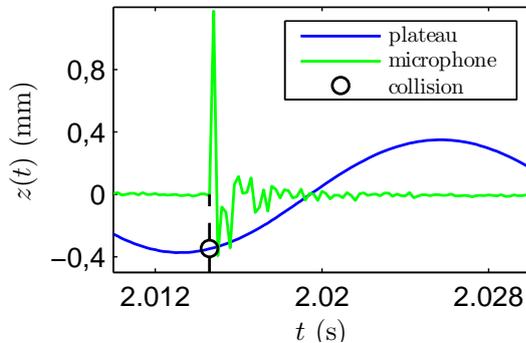


Figure 2.3 – Procédure de détection d'une collision. Le signal du microphone est présenté en unités arbitraires.

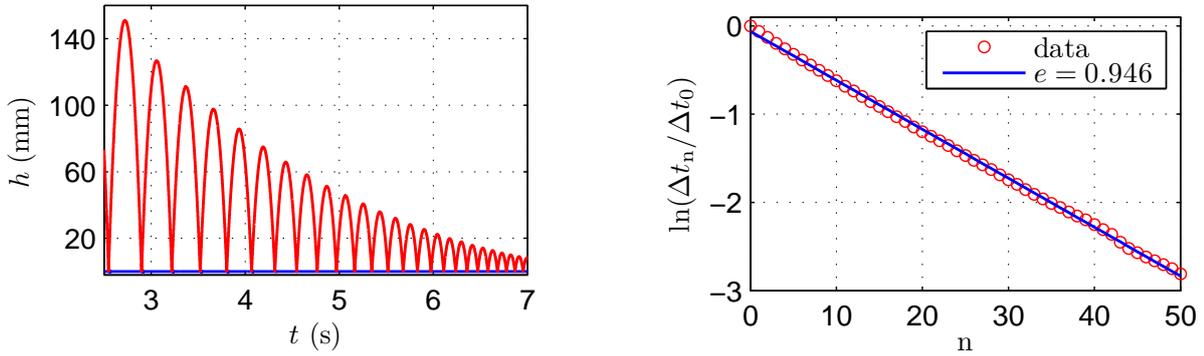
La procédure de traitement est la suivante. Pour chaque collision, le signal du microphone présente un pic de grande amplitude, suivi d'oscillations correspondant aux ondes acoustiques qui se propagent dans la plaque de verre (Fig. 2.3). Étant donné que la fréquence de fonctionnement du microphone est supérieure à la fréquence d'acquisition que nous avons choisie, $f_a = 5$ kHz, nous prenons comme mesure du temps auquel la collision a lieu à $t_n = t_p - 1/(2f_a)$, où t_p est l'instant où l'on détecte le pic. À partir de ce temps, on déduit la position du plateau z_n (et donc celle de la bille h_n) en utilisant le signal issu du capteur de position. On ajuste ensuite localement le signal $z(t)$ autour du temps t_n par une parabole afin de faire une mesure de la pente, et donc de la vitesse v_n , qui ne soit pas affectée par un éventuel bruit dans la mesure de la position verticale. La résolution temporelle des mesures correspond à l'inverse de la fréquence d'acquisition, $1/f_a = 0.2$ ms, soit 0.4% à 1.6% de la période de vibration du plateau. La précision sur la position du plateau est limitée par la résolution du capteur inductif, typiquement 1 μ m, soit 0.5% à 1% de l'amplitude typique du mouvement vertical imposé.

Mesures indépendantes du coefficient de restitution e

Considérons d'abord la situation où le plateau est au repos. La hauteur des rebonds décroît d'un rebond à l'autre jusqu'à ce que la bille soit finalement au repos, au contact avec le plateau [Falcon *et al.* - 1998, Bernstein - 1977] (Fig. 2.4a). En prenant l'équation (2.1) avec $v_n = 0$ et le fait que $u_n^- = -u_{n-1}^+$, on obtient que u_n^+ décroît exponentiellement avec n . De la même façon, les temps de vols décroissent selon

$$\Delta t_n = \Delta t_0 e^n = \Delta t_0 \exp(-n/n_c), \quad (2.4)$$

où $n_c \equiv -1/\ln(e)$ (pour rappel, $e < 1$, donc $n_c > 0$). On vérifie expérimentalement cette décroissance exponentielle (Fig. 2.4b), et on en déduit une première mesure du coefficient de restitution $e = 0.946 \pm 0.005$.



(a) Succession de rebonds lorsque le plateau est au repos.

(b) Décroissance exponentielle des temps de vol Δt_n .

Figure 2.4 – Étude des rebonds de la bille sur un plateau au repos.

Considérons maintenant le cas où le plateau vibre de façon sinusoïdale, *i.e.* $z(t) = A \sin(\omega t)$, où A est l'amplitude de vibration et ω la pulsation (la fréquence vaut $f = \omega/2\pi$). Selon les valeurs de A , ω , et des conditions initiales, la bille peut avoir une trajectoire périodique dans laquelle elle frappe le plateau une fois par période (Mode 1). Dans ce cas, les trajectoires de la bille et du plateau ont la même périodicité. En particulier, on a $u_{n+1}^- = u_n^-$ et donc $u_n^+ = -u_{n+1}^-$. De plus, le temps de vol de la bille est constant et égal à une période de vibration du plateau $\Delta t = 2\pi/\omega$, de sorte que l'équation (2.3) donne $u_n^+ = g\pi/\omega$. Enfin, la loi de choc [Eq. (2.1)] impose la valeur de la vitesse du plateau v_n à la collision :

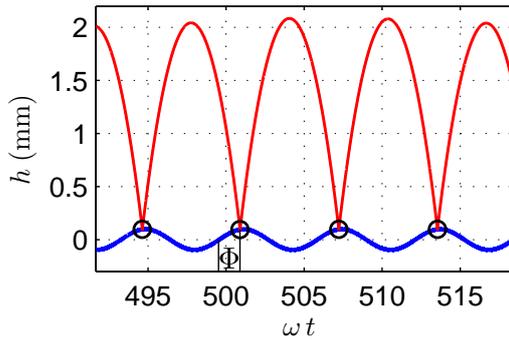
$$v = \left(\frac{1-e}{1+e} \right) \frac{g\pi}{\omega}, \quad (2.5)$$

où l'indice n de l'impact n'est plus nécessaire puisque tous les impacts sont identiques. Une autre façon d'écrire cette égalité est d'introduire la phase de choc Φ , définie par $v = A\omega \cos(\Phi)$ (Fig. 2.5a), ce qui conduit à

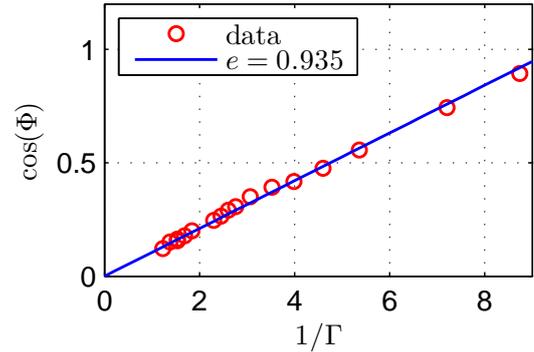
$$\cos(\Phi) = \left(\frac{1-e}{1+e} \right) \frac{\pi}{\Gamma}, \quad (2.6)$$

où $\Gamma \equiv A\omega^2/g$ est l'accélération réduite du plateau. Afin d'observer ce type de trajectoire expérimentalement, il est nécessaire de choisir des valeurs d'amplitude et de fréquence de vibration pertinentes [Tuffiaro et Albano - 1986]. D'une part, Γ doit être assez grand pour que $\cos(\Phi) \leq 1$, et donc que $\Gamma \geq (1-e)\pi/(1+e)$ ($\Gamma \gtrsim 0.1$ avec $e = 0.95$). D'autre part, Γ ne doit pas être trop élevée afin d'éviter une transition vers les trajectoires de période plus élevée [Pieranski - 1983]. En l'occurrence, nous modifions la valeur de Γ en changeant A à $f = 25$ Hz fixée, et nous mesurons la phase Φ associée. On voit que $\cos(\Phi)$ augmente bien linéairement avec $1/\Gamma$ (Fig. 2.5b), et nous déduisons $e = 0.935 \pm 0.010$.

La mesure la plus directe que l'on puisse faire du coefficient de restitution est de vérifier la loi de choc donnée Eq. (2.1) à chaque collision. En traçant la vitesse relative de sortie ($u_n^+ - v_n$) en fonction de celle d'entrée ($u_n^- - v_n$), nous devrions observer des points alignés sur une droite dont la pente vaut e . Afin d'explorer une large gamme de vitesses relatives d'entrée, nous choisissons une grande accélération ($\Gamma = 2.35$), de sorte que la bille soit en régime chaotique (Fig. 2.6a)



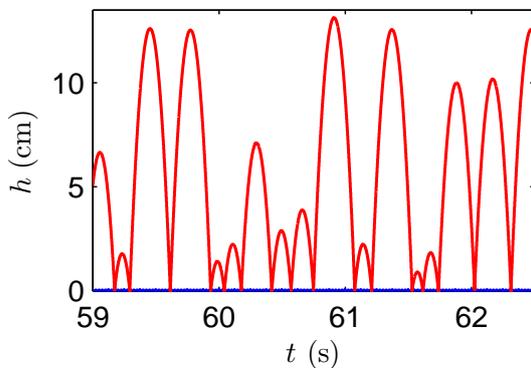
(a) Exemple de trajectoire de la bille dans le cas périodique (mode 1). La bille frappe le plateau avec la même phase Φ à chaque période.



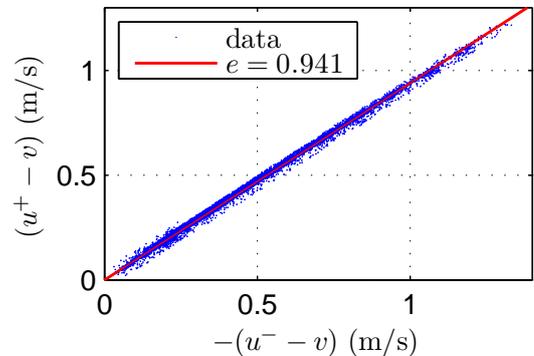
(b) Evolution linéaire de $\cos(\Phi)$ avec $1/\Gamma$. On déduit de la pente $e = 0.935 \pm 0.010$.

Figure 2.5 – Étude des rebonds de la bille lorsqu'elle est synchronisée dans le mode 1 ($\Gamma = 0.25$, $f = 25$ Hz).

[Tufillaro et Albano - 1986, Vogel et Linz - 2011, Holmes - 1982, Luck et Mehta - 1993, deOliveira et Goncalves - 1997, Pieranski *et al.* - 1985, Pieranski - 1983]. Nous détectons une série d'impacts successifs aux temps $\{t_n\}$ desquels nous déduisons les $\{h_n\}$, $\{v_n\}$, $\{u_n^-\}$, et $\{u_n^+\}$. Avec ces valeurs, nous vérifions si les données expérimentales sont bien compatibles avec l'équation (2.1) (Fig. 2.6b). Il est à noter qu'environ 5% des données mesurées sont supprimées, car elles sont clairement en dehors de la loi. Ceci est dû au fait que l'algorithme de détection des chocs ne peut pas détecter deux chocs trop proches dans le temps à cause du temps de relaxation des vibrations dans la plaque de verre. Lorsqu'une collision n'est pas détectée, les données correspondant aux collisions qui la précèdent et qui la suivent immédiatement sont nécessairement faussées. En conséquence, on peut supprimer de façon automatique ces mesures clairement non-physiques. En effectuant cette procédure, nous obtenons à partir des données expérimentales une troisième mesure de $e = 0.941 \pm 0.005$.



(a) Exemple de trajectoire chaotique de la bille observée pour une accélération du plateau élevée ($\Gamma = 2.35$).



(b) Vérification directe de la loi de choc : vitesse relative de sortie de la bille ($u^+ - v$) en fonction de celle d'entrée $-(u^- - v)$.

Figure 2.6 – Étude des rebonds de la bille en régime chaotique ($\Gamma = 2.35$, $f = 25$ Hz, $\sim 10^3$ collisions).

Il est intéressant de noter que les trois techniques de mesure du coefficient de restitution sont obtenues pour des conditions différentes imposées à la vitesse d'impact entre la bille et le plateau. Elle décroît dans la première, est constante dans la deuxième et est aléatoire (chaotique) dans la troisième. Nous n'avons observé aucune dépendance notable du coefficient de restitution avec la vitesse d'impact dans la gamme que nous utilisons dans notre expérience [Bernstein - 1977, Falcon *et al.* - 1998]. Enfin, nos trois mesures expérimentales de e sont compatibles entre elles et donc fiables. Cette première étape, si elle paraît assez anodine, nous permet de tester la robustesse de notre dispositif et de notre modélisation, et constitue un point de départ à notre étude.

2.2.3 Mouvement du plateau

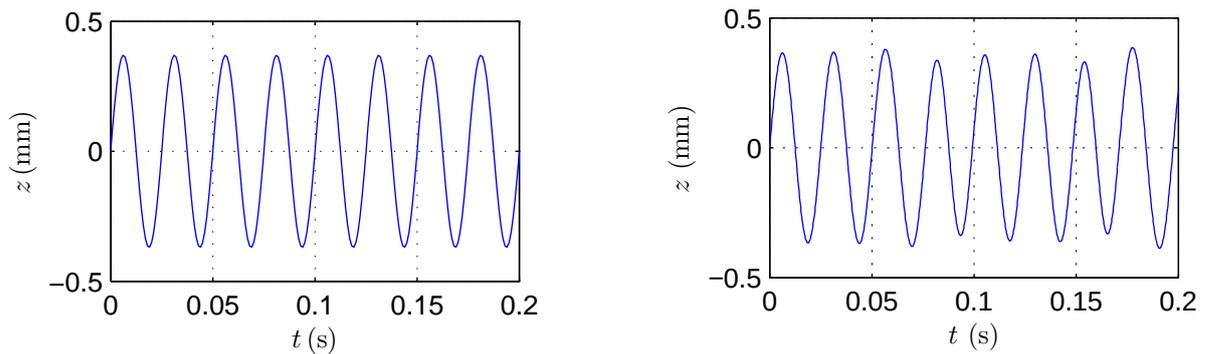
Dans les sections suivantes, nous étudions l'influence du mouvement du plateau sur celui de la bille. En plus du signal sinusoïdal classique, nous avons choisi d'imposer un signal modulé en fréquence au plateau. Nous expliquons ici comment ceci est réalisé et les précautions qu'il est nécessaire de prendre.

Notre dispositif expérimental a été pensé de telle sorte que le signal fourni au vibreur (via l'amplificateur) est issu de la sortie analogique de la carte d'acquisition. En principe, on peut imposer tout type de signal. Cependant, à cause de la réponse mécanique du vibreur, il est nécessaire de bien choisir la forme de ce signal, et en particulier d'éviter toute discontinuité. Le vibreur peut être modélisé comme un système masse-ressort dissipatif en régime forcé, le forçage étant le signal $s(t)$. L'équation du mouvement pour le plateau peut donc s'écrire

$$M\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + kz(t) = \alpha s(t),$$

où M est la masse, k la constante de raideur, α un coefficient de proportionnalité, et γ un coefficient de friction effectif, qui permet de prendre en compte les pertes.

Le mouvement du plateau est gouverné par une équation différentielle d'ordre deux. En conséquence, si on utilise un signal $s(t)$ deux fois continu-dérivable, le vibreur suivra le signal de forçage correctement. Dans le cas où le signal $s(t)$ est sinusoïdal, cette condition est assurée naturellement (Fig. 2.7a). Il est également possible de construire un signal $s(t)$ composé d'une série de périodes de sinus $s_i(t) = a_i \sin(\omega_i t)$, tout en assurant la continuité de $z(t)$, $\dot{z}(t)$, et $\ddot{z}(t)$. Pour cela, la fréquence $f_i = \omega_i/2\pi$ est choisie aléatoirement autour de la fréquence moyenne $\bar{f} = 40$ Hz : entre 35 et 45 Hz. Le cycle numéro i commence avec $s = 0$ pendant une durée $1/f_i$, de telle sorte que s est de nouveau nul à la fin du cycle. Avec ce choix, nous imposons aussi automatiquement que $\ddot{s} = 0$ en début et en fin de cycle. Nous imposons en plus que $\dot{s} = 0$ au début et à la fin du cycle. Du fait de la réponse mécanique du vibreur, l'amplitude de vibration A_i dépend de a_i et ω_i . Pour un jeu de pulsations donné $\{\omega_i\}$, nous déterminons en amont les amplitudes associées $\{a_i\}$ du signal de forçage, de telle sorte que $A_i\omega_i = A\omega$ pour tout i . On obtient grâce à cette méthode un mouvement du plateau aperiodique, mais dont la vitesse maximale $A\omega$ dans chaque période est constante (Fig. 2.7b).



(a) Trajectoire du plateau dans le cas d'une excitation sinusoïdale. ($A = 0.37$ mm, $f = 40$ Hz, $A\omega = 9.3$ mm s $^{-1}$).

(b) Trajectoire du plateau dans le cas d'une excitation modulée en fréquence. ($\bar{f} = 40$ Hz, $A\omega = 9.3$ mm s $^{-1}$).

Figure 2.7 – Exemples de trajectoires du plateau dans le cas d'une excitation sinusoïdale (S) ou modulée en fréquence (MF). Dans les deux cas, $A\omega = 9.3$ mm s $^{-1}$.

2.2.4 Simulation numérique du problème

Nous avons précédemment expliqué (Sec. 2.2.2) comment nous avons mis en œuvre la réalisation expérimentale du problème étudié. Nous avons démontré qu'avec notre dispositif, il est possible d'obtenir les temps, positions et vitesses aux moments des collisions, et ce avec une bonne précision. Cependant, il existe plusieurs limitations à l'étude complète et systématique de la dynamique de la bille via ce dispositif expérimental. Tout d'abord, il est nécessaire de faire l'acquisition de deux signaux analogiques à une fréquence élevée $f_a = 5$ kHz, ce qui représente une taille non négligeable des fichiers de données. D'autre part, la durée d'acquisition est très conséquente pour obtenir une statistique correcte : nous mesurons typiquement 10^3 collisions pour une dizaine d'heures d'acquisition, ce qui est un nombre relativement limité d'événements. Par ailleurs, comme expliqué précédemment, il est nécessaire de guider la bille afin d'éviter qu'elle ne s'échappe du système. Même si nous avons cherché à les minimiser, il existe des frottements entre la bille et le tube, qui vont faire perdre de l'énergie à la bille durant son vol. Nous avons également complètement négligé de probables frottements fluides dus à l'air. En conséquence, les données recueillies seront nécessairement, même faiblement, biaisées. Enfin, le système expérimental vieillit au cours du temps. En particulier, la lame de verre est soumise à des impacts énergétiques fréquents. Même si elle ne rompt pas, ses propriétés physiques, tout comme celles de la bille peuvent changer au fur et à mesure que les chocs se succèdent, et l'hypothèse d'un coefficient de restitution unique et constant peut ne plus être valable.

Afin de nous affranchir de tous ces inconvénients, nous avons choisi de simuler le processus numériquement en parallèle de l'étude expérimentale. Ceci nous permet d'augmenter significativement les statistiques ($5 \cdot 10^5$ collisions), puisque nous ne stockons que les temps, positions et vitesses de la bille et du plateau aux collisions. Nous nous affranchissons également de tous les inconvénients expérimentaux (vieillessement, frottements indésirables, temps d'acquisition). Enfin, la simulation numérique nous permet de travailler à des accélérations relatives qui ne sont pas accessibles avec le dispositif expérimental. Ceci nous permettra d'observer le comportement

du système sur une très large de gamme de vitesses $A\omega$. Notons tout de même que la réalisation expérimentale est utile pour plusieurs raisons : elle nous permet de vérifier la cohérence des résultats numériques ainsi que de les comparer quantitativement aux résultats expérimentaux.

Nous décrivons ici rapidement la façon dont le code a été conçu. Au temps t_n^+ , juste après la n -ième collision, nous connaissons la position et la vitesse de la bille. Nous faisons une estimation basse de la date du prochain choc en calculant l'intersection entre la trajectoire parabolique de la bille et la ligne horizontale $z = A$. À partir de ce temps, les trajectoires de la bille et du plateau sont calculées avec un pas de temps Δt . La trajectoire du plateau est obtenue (comme décrit Sec. 2.2.3) soit en prenant un sinus, soit en mettant bout à bout des périodes de sinus. Nous calculons l'instant où les deux positions se croisent, ce qui détermine l'instant de choc avec une précision Δt . Nous stockons alors la valeur du temps t_{n+1} auquel se produit le $(n + 1)$ -ième choc, la hauteur h_{n+1} à laquelle il a eu lieu, ainsi que les vitesses de la bille u_{n+1}^- et du plateau v_{n+1} associées. De la loi de choc (Eq. 2.1), on déduit u_{n+1}^+ et donc la nouvelle parabole que va suivre la bille. On reproduit alors la même procédure pour tous les chocs suivants.

Dans la suite, nous présenterons donc en parallèle des résultats obtenus expérimentalement et numériquement. Les résultats nous permettront de vérifier le bon fonctionnement et la cohérence des deux méthodes, et de voir l'effet de l'augmentation du nombre d'échantillons sur les quantités statistiques.

2.3 Caractérisation du régime chaotique, entretenu et stationnaire

Dans la suite de l'étude, nous n'étudierons que le cas dans lequel l'accélération relative du plateau est suffisamment importante pour que la trajectoire de la bille soit chaotique.

2.3.1 Étude des corrélations entre les mouvements de la bille et du plateau

L'objectif est d'étudier les propriétés statistiques de la dynamique de la bille lorsqu'elle est en régime chaotique, en utilisant notre dispositif expérimental. Nous choisissons des accélérations relatives suffisamment importantes pour que la bille explore une large gamme de vitesses, afin d'étudier les corrélations entre la vitesse de la bille et celle du plateau au moment d'un choc.

Pour révéler ces corrélations, nous traçons Fig. 2.8 la vitesse moyenne du plateau en fonction de la vitesse d'arrivée de la bille. À partir du jeu de données expérimentales $\{v_n\}$ et $\{u_n^-\}$ (10^3 collisions), nous moyennons les valeurs de v_n correspondant à la même valeur ν de vitesse d'arrivée de la bille, $\nu_n \equiv -u_n^-$. En l'absence de corrélation, on devrait avoir $\bar{v} = 0$ pour tout ν . Or nous observons des oscillations de grande amplitude pour $\nu > 2\pi g/\omega$. Pour des valeurs de ν assez proches, la bille peut voir en moyenne un plateau montant ($\bar{v} > 0$) ou descendant ($\bar{v} < 0$). La période des oscillations correspond exactement à la vitesse de la bille dans le Mode 1, $u^+ = -u^- = \pi \frac{g}{\omega}$. Nous observons également une remontée notable de \bar{v} aux faibles ν . La raison physique de cette remontée sera discutée un peu plus loin. Nous nous concentrons pour l'instant sur les oscillations.

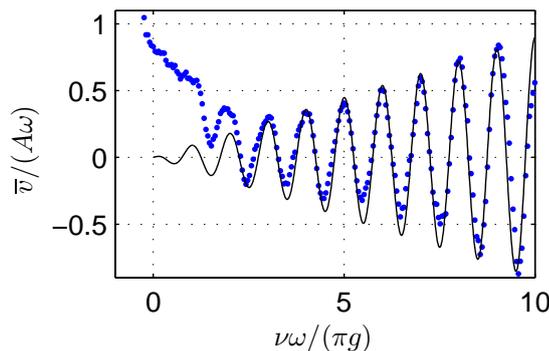


Figure 2.8 – Vitesse moyenne du plateau \bar{v} en fonction de la vitesse d'arrivée de la bille ν , dans le cas d'un mouvement sinusoïdal du plateau (expérimental, $f = 40$ Hz, $\Gamma = 2.35$). Les points bleus correspondent aux données expérimentales et la courbe noire à l'équation Eq. (2.13) à un préfacteur près.

Afin de donner les raisons physiques de ces oscillations, nous reprenons les équations qui gouvernent la dynamique de la bille dans la limite des grandes accélérations Γ . Dans ce cas, l'énergie potentielle de la bille est négligeable devant son énergie cinétique au moment de la collision, de sorte que $u_n^+ \simeq -u_{n+1}^- \equiv \nu_{n+1}$. En prenant les équations (2.1) et (2.3) ainsi que la

notation $v_n = A\omega \cos(\Phi_n)$, on peut écrire

$$\nu_{n+1} = e\nu_n + (1 + e)A\omega \cos(\Phi_n) \quad (2.7)$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \frac{2\omega}{g}\nu_{n+1}. \quad (2.8)$$

Les équations (2.7) et (2.8) forment un système qui gouverne la dynamique de la bille, ν_{n+1} et Φ_{n+1} étant obtenues à partir de ν_n et Φ_n par récurrence. Pour autant, il s'agit d'équations non-linéaires qui ne peuvent pas être résolues analytiquement.

Afin d'aller plus loin analytiquement et de comprendre l'origine des oscillations, nous avons besoin de simplifier le système d'équations. Dans la limite des collisions parfaitement élastiques, *i.e.* $e \rightarrow 0$, le système d'équations devient :

$$\nu_{n+1} = A\omega \cos(\Phi_n) \quad (2.9)$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\Gamma \cos(\Phi_n). \quad (2.10)$$

Fixons maintenant une valeur ν de la vitesse d'arrivée ν_n au choc n . À partir de l'équation (2.9), nous obtenons deux valeurs possibles de Φ_{n-1} , *i.e.* $\Phi_{n-1} = \pm \arccos[\nu/(A\omega)]$. En utilisant l'équation (2.10), ces deux valeurs de Φ_{n-1} conduisent à deux valeurs, $\Phi^{(1)}$ et $\Phi^{(2)}$, de Φ_n :

$$\Phi^{(1)} = \arccos\left(\frac{\nu}{A\omega}\right) + \frac{2\Gamma}{A\omega}\nu \quad (2.11)$$

$$\Phi^{(2)} = -\arccos\left(\frac{\nu}{A\omega}\right) + \frac{2\Gamma}{A\omega}\nu. \quad (2.12)$$

En supposant que dans le régime stationnaire, les deux phases sont équiprobables, on peut estimer la valeur moyenne du plateau sur toutes les collisions correspondant à la même vitesse d'arrivée de la bille ν , $\bar{v}(\nu) = \frac{1}{2}A\omega [\cos(\Phi^{(1)}) + \cos(\Phi^{(2)})]$. On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$\bar{v}(\nu) = \nu \cos\left(2\pi \frac{\nu\omega}{\pi g}\right). \quad (2.13)$$

Dans la limite $e \rightarrow 0$, on obtient donc une vitesse moyenne $\bar{v}(\nu)$ qui oscille avec une période $\pi g/\omega$ et dont l'amplitude croît linéairement avec ν .

L'expression obtenue analytiquement [Eq. (2.13)] prédit donc bien les oscillations observées expérimentalement (Fig. 2.8), et avec la bonne période $\pi g/\omega$. Ceci confirme qu'elles ont très probablement pour origine la synchronisation des mouvements du plateau et de la bille. D'autre part, l'équation (2.13) prédit bien la croissance linéaire de l'amplitude des oscillations. Cependant, nous n'obtenons la valeur de $\bar{v}(\nu)$ qu'à un préfacteur près, puisque nous avons travaillé dans la limite $e \rightarrow 0$. En effet, nous avons largement surestimé la dissipation en prenant $e \rightarrow 0$, et la vitesse moyenne de la bille obtenue est donc nécessairement sous-estimée.

Nous cherchons maintenant à voir s'il est possible de supprimer (au moins en partie) les corrélations observées dans le cas d'une vibration sinusoïdale (S) en imposant au plateau le mouvement aperiodique, modulé en fréquence (MF), dont nous avons décrit la conception pré-

cédemment (Sec. 2.2.3). En traçant $\bar{v}(\nu)$ avec ce nouveau signal (Fig. 2.9), nous observons plusieurs changements majeurs. Tout d'abord, les oscillations présentes dans le cas sinusoïdal (Fig. 2.8) disparaissent. De plus, on voit que \bar{v} tend vers 0 pour $\nu \rightarrow \infty$, ce qui traduit bien une disparition des corrélations. Ceci peut s'expliquer de la façon suivante : pour des valeurs de $A\omega$ suffisamment grandes (régime chaotique), la durée typique d'un vol de la bille est nettement plus grande que la période de vibration du plateau. Dans ce cas, la fréquence de vibration du plateau change plusieurs fois aléatoirement pendant la durée du vol, de sorte que la bille frappe le plateau à une phase Φ totalement aléatoire. Il est important de noter que les corrélations n'ont pas totalement disparu, dans la mesure où \bar{v} reste strictement positive et décroît avec ν (Fig. 2.9). Nous nous proposons d'expliquer ce comportement.

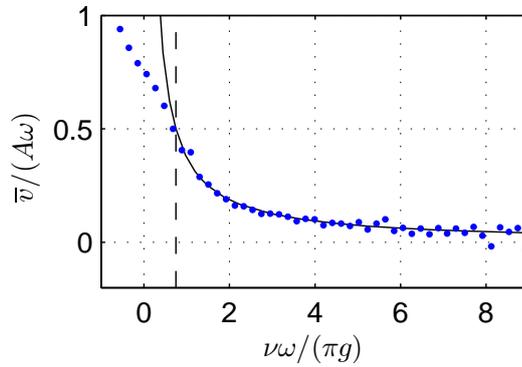


Figure 2.9 – Vitesse moyenne du plateau \bar{v} en fonction de la vitesse d'arrivée de la bille ν , dans le cas d'un mouvement modulé en fréquence du plateau (expérimental, $\bar{f} = 40$ Hz, $\Gamma = 2.35$). Les points bleus correspondent aux données expérimentales et la courbe noire à l'équation (2.16). La prédiction n'est valable que pour $\nu > A\omega$, cette limite étant indiquée ici par une ligne pointillée verticale.

Considérons que la bille arrive au dessus du plateau de telle sorte que son altitude à t_0 soit $h(t_0) = A_i$, où A_i est l'amplitude de vibration du plateau dans le cycle considéré. La distance entre la bille et le plateau vaut au temps t , $D(t) = h(t) - z(t)$ et l'instant de la collision t_c est défini par $D(t_c) = 0$. L'altitude de la bille vaut $h(t) = A_i - \nu(t - t_0) - (g/2)(t - t_0)^2$ et celle du plateau $z(t) = A_i \sin(\omega_i t)$. Il est possible de déterminer comment l'instant de choc t_c dépend du temps de référence t_0 en différenciant la condition $D(t_c) = 0$ par rapport à t_0 et t_c . Pour une valeur suffisamment grande de $A_i \omega_i$, on peut considérer que la vitesse de la bille est constante dans la région proche du plateau *i.e.* supposer que $g(t_c - t_0) \ll \nu$, ce qui est vrai pour $\nu \gg g/\omega_i$ (pour les données de la Fig. 2.9, on a $\nu \sim 10 g/\omega_i$). Dans ce cas, on obtient $dt_0 = (1 + v(t_c)/\nu) dt_c$, où l'on a introduit la vitesse du plateau à l'instant du choc $v(t_c) = A_i \omega_i \cos(\omega_i t_c)$.

Si la bille arrive proche du plateau de façon aléatoire, les mouvements de la bille et du plateau ne sont pas du tout synchronisés. Soit $\Phi_0 \equiv \omega_i t_0$ la phase avec laquelle la bille arrive dans la zone du plateau ($h \leq A_i$). Si tous les Φ_0 ont la même probabilité (Fig. 2.10a) (la densité de probabilité vaut alors $1/2\pi$), la probabilité que la bille avec une vitesse d'arrivée ν frappe le plateau avec la phase $\Phi \equiv \omega_i t_c$ vaut $P_\nu(\Phi) = (1 + v(t_c)/\nu)/2\pi$.

Considérons maintenant la moyenne sur plusieurs collisions. $P_\nu(\Phi)$ dépend des caractéristiques du cycle i étudié ici, uniquement à travers la vitesse $A_i \omega_i$, qui est par construction

constante et égale à $A\omega$. On obtient alors

$$P_\nu(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu + A\omega \cos(\Phi)}{\nu}. \quad (2.14)$$

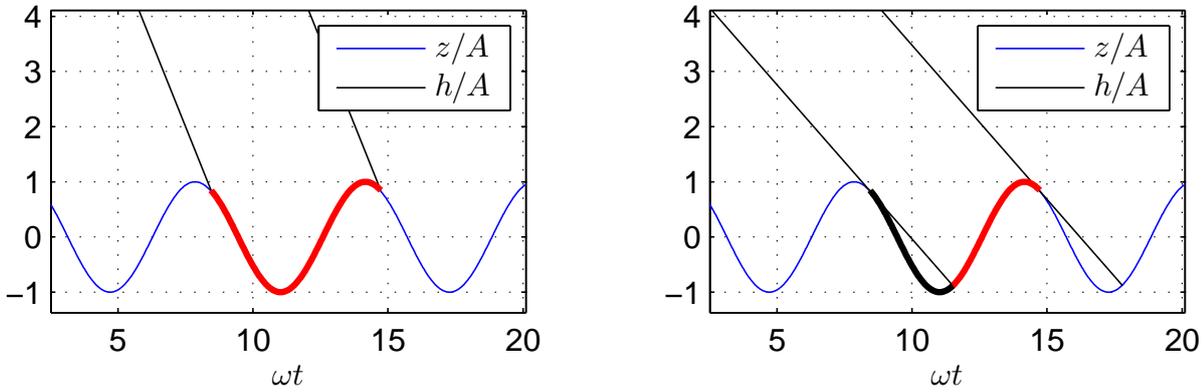
Avec ce résultat, on peut calculer, à ν donnée, la moyenne sur toutes les phases (\bar{x}) de toute quantité voulue (x) par

$$\bar{x} \equiv \int_0^{2\pi} x P_\nu(\Phi) d\Phi. \quad (2.15)$$

Pour la vitesse du plateau $v = A\omega \cos(\Phi)$, l'équation. (2.15) donne

$$\bar{v} = \int_0^{2\pi} A\omega \cos(\Phi) P_\nu(\Phi) d\Phi = \frac{(A\omega)^2}{2\nu}, \quad (2.16)$$

ce qui est en parfait accord avec les données expérimentales pour $\nu > A\omega$ (Fig. 2.9).



(a) Schéma simplifié des trajectoires de la bille et du plateau dans le cas $\nu > A\omega$.

(b) Schéma simplifié des trajectoires de la bille et du plateau dans le cas $\nu < A\omega$.

Figure 2.10 – Schémas simplifiés des trajectoires de la bille et du plateau. Selon sa vitesse d'arrivée, la bille ne peut pas toujours frapper le plateau à n'importe quelle phase Φ (en rouge, la zone accessible, en noir, la zone inaccessible).

(a) La vitesse d'arrivée de la bille est suffisamment grande pour qu'elle puisse entrer en collision avec le plateau pour toute phase Φ entre 0 et 2π . Cependant, la probabilité de rencontrer un plateau montant est plus grande que celle de rencontrer un plateau descendant.

(b) La vitesse d'arrivée est petite, telle qu'une partie de la trajectoire du plateau n'est pas accessible.

L'évolution de $\bar{v}(\nu)$ pour $-A\omega \leq \nu \leq A\omega$ est plus difficile à prédire analytiquement. Dans ce cas, la vitesse maximale du plateau $A\omega$ est plus grande que celle de la bille (la bille pouvant aller vers le bas, mais aussi vers le haut). Il existe dans ce cas une gamme de vitesses du plateau (ou de façon équivalente de phases) dans laquelle la bille ne peut pas frapper le plateau (Fig. 2.10b). Lorsqu'il existe comme cela un "effet d'ombre", la décroissance de \bar{v} avec ν a la même origine physique, mais la prédire analytiquement est plus difficile. Quoi qu'il en soit, ce régime ne joue pas un rôle très important dans la physique du problème, puisqu'en régime chaotique, *i.e.* à grande accélération relative Γ , la bille frappe le plateau avec une vitesse d'arrivée ν élevée dans la grande majorité des cas. Les événements peu énergétiques sont très rares et on peut négliger leur contribution.

La seule corrélation qui subsiste lorsqu'on impose un mouvement apériodique au plateau (MF) est donc due à un effet d'ombre. En moyenne, il est plus probable que la bille frappe un plateau montant plutôt que descendant, et l'effet est d'autant plus marqué que la bille arrive lentement. En conséquence, la vitesse moyenne du plateau \bar{v} vue par la bille augmente lorsque sa vitesse d'arrivée ν décroît. Dans l'autre limite, $\bar{v} \rightarrow 0$ pour $\nu \rightarrow \infty$. En conclusion, une bille arrivant à grande vitesse frappe en moyenne un plateau à l'arrêt (perte d'énergie) alors qu'une bille arrivant à faible vitesse sera frappée par le plateau ascendant (gain d'énergie). Le système atteint donc un régime stationnaire lorsque les pertes sont compensées par l'apport dû au mouvement ascendant.

Notons par ailleurs que tous ces résultats sont également observés et vérifiés avec les données obtenues numériquement.

2.3.2 Énergie cinétique moyenne de la bille

L'énergie cinétique de la bille est une propriété importante, qui nous permet de caractériser le régime chaotique et stationnaire dans lequel se trouve la bille. Au moment d'une collision, elle vaut $(1/2) m\nu^2$. Mesurer et prédire sa valeur moyenne en fonction des paramètres de vibration du plateau (A, ω) n'est pas trivial. Ceci a été le sujet de plusieurs études [Warr et Huntley - 1995, Géminard et Laroche - 2003], et nous nous proposons d'utiliser la description en terme de probabilité de phase de choc introduite précédemment pour tenter de prédire la valeur de l'énergie cinétique moyenne. Nous comparons ensuite cette prédiction aux résultats expérimentaux. Nous cherchons donc à calculer la moyenne statistique, sur N impacts, d'une quantité d'intérêt x , $\langle x \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$. Pour une variable continue, on peut écrire $\langle x \rangle = \iint x P(\Phi, \nu) d\Phi d\nu$, où $P(\Phi, \nu)$ est la probabilité d'avoir une bille arrivant à vitesse ν qui frappe le plateau à la phase Φ . La probabilité $P(\Phi, \nu)$ peut s'écrire comme le produit de la probabilité conditionnelle $P_\nu(\Phi)$ d'avoir une phase pour une valeur de ν donnée, avec la probabilité $Q(\nu)$ d'avoir une vitesse ν : $P(\Phi, \nu) = P_\nu(\Phi)Q(\nu)$. En utilisant la notation introduite Eq. (2.15), on obtient

$$\langle x \rangle = \int \bar{x} Q(\nu) d\nu. \quad (2.17)$$

Nous allons utiliser cette définition pour calculer l'énergie cinétique moyenne de la bille ou de façon équivalente $\langle \nu^2 \rangle$.

Considérons l'énergie de la bille autour de la n -ième collision. En prenant la loi de choc (2.1) au carré, on obtient

$$(u_n^+)^2 = e^2(u_n^-)^2 - 2e(1+e)u_n^-v_n + (1+e)^2(v_n)^2. \quad (2.18)$$

Il est important de noter que toutes les quantités mises en jeu sont liées à la même collision, n . On peut donc considérer leurs moyennes sur la phase Φ de collision, pour une vitesse d'arrivée de la bille, ν , donnée. Avec les équations (2.14) et (2.15) (et la définition $\nu \equiv -u^-$), on obtient

$$\overline{u^-v} = -\overline{\nu v} = -\int_0^{2\pi} \nu A \omega \cos(\Phi) P_\nu(\Phi) d\Phi = -\frac{(A\omega)^2}{2} \quad (2.19)$$

et

$$\overline{v^2} = \int_0^{2\pi} (A\omega)^2 \cos^2(\Phi) P_\nu(\Phi) d\Phi = \frac{(A\omega)^2}{2}. \quad (2.20)$$

On en déduit donc que l'équation (2.18) moyennée sur la phase pour une valeur de ν donnée (la valeur moyenne ne dépend plus de l'indice de la collision n) s'écrit

$$\overline{(u^+)^2} = e^2 \overline{(u^-)^2} + (1+e)(1+3e) \frac{(A\omega)^2}{2}. \quad (2.21)$$

Puisque l'équation (2.21) ne dépend pas de façon explicite de ν , on peut utiliser la définition de la moyenne statistique donnée par l'équation (2.17) sans avoir besoin de connaître la probabilité $Q(\nu)$. On obtient

$$\langle (u^+)^2 \rangle = e^2 \langle (u^-)^2 \rangle + (1+e)(1+3e) \frac{(A\omega)^2}{2}. \quad (2.22)$$

D'autre part, la conservation de l'énergie entre t_n^+ (juste après l'impact n) et t_{n+1}^- (juste avant l'impact $n+1$) s'écrit $(u_n^+)^2 + 2gz_n = (u_{n+1}^-)^2 + 2gz_{n+1}$. Or, l'énergie potentielle reste inchangée en moyenne, *i.e.* $\langle z_{n+1} \rangle = \langle z_n \rangle$. On a donc $\langle (u^-)^2 \rangle = \langle (u^+)^2 \rangle \equiv \langle \nu^2 \rangle$. Ceci nous permet de récrire l'équation (2.22) comme suit :

$$\langle \nu^2 \rangle = \frac{1+3e}{1-e} \frac{(A\omega)^2}{2}. \quad (2.23)$$

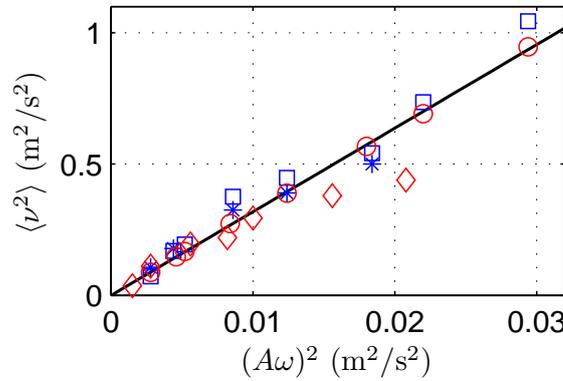


Figure 2.11 – Valeur moyenne de la vitesse d'arrivée au carré $\langle \nu^2 \rangle$ en fonction de $(A\omega)^2$. La ligne noire correspond à la prédiction théorique Eq. (2.23) avec $e = 0.94$ (MF / cercles rouges : numérique, diamants rouges : expérimental) (S / carrés bleus : numérique, étoiles bleus : expérimental) ($\Gamma \in [1.34; 4.40]$).

Le résultat obtenu [Eq. (2.23)] est globalement en accord avec les résultats expérimentaux et numériques présentés figure 2.11. Étonnamment, la prédiction fonctionne assez bien avec un mouvement sinusoïdal du plateau, alors que nous avons supposé que la bille pouvait entrer dans la zone proche du plateau avec une phase totalement aléatoire. Cela signifie que l'hypothèse de "mélange des phases" pendant la durée d'un vol de la bille n'est pas l'élément principal de la démonstration. En revanche, nous notons que les résultats obtenus numériquement sont beaucoup plus proches de la prédiction que les résultats expérimentaux, en particulier à $A\omega$ élevé. Ceci est très probablement dû à la friction indésirable entre la bille et le tube qui la guide. En effet, lorsque la bille effectue de longs vols au dessus du plateau, la probabilité qu'elle touche

les parois intérieures du tube augmente. Dans ce cas, son énergie moyenne est donc inférieure à ce qu'elle aurait été sans frottements.

Dans la suite de notre étude, nous nous limitons donc uniquement à l'étude de données obtenues numériquement, afin de ne plus avoir ce type d'effet et de travailler avec des statistiques conséquentes.

2.3.3 Corrélation temporelle - Perte de mémoire

Nous avons montré précédemment (Sec. 2.2.2) que la vitesse d'une bille rebondissant sur un plateau au repos décroissait de façon exponentielle. Le nombre de rebonds caractéristique associé à cette décroissance correspond au temps (ici au nombre de rebonds) nécessaire pour que la bille n'ait plus la mémoire de sa condition initiale. Il est directement lié à la quantité d'énergie dissipée à chaque rebond, et donc au coefficient de restitution e .

On se propose ici de mesurer cette corrélation lorsque la bille se trouve en régime chaotique en étudiant l'auto-corrélation de la vitesse de la bille. Afin de ne pas avoir à prendre en compte la vitesse moyenne de la bille, nous introduisons les écarts de vitesse à la moyenne $\delta u_n^- = u_n^- - \langle u^- \rangle$. Nous considérons alors l'auto-corrélation de cette quantité :

$$\rho(k) = \frac{\langle \delta u_{n+k}^- \delta u_n^- \rangle}{\langle \delta u_n^- \delta u_n^- \rangle} \quad (2.24)$$

La conservation de l'énergie entre les chocs n et $n+1$ s'écrit $(u_n^+)^2 + 2gz_n = (u_{n+1}^-)^2 + 2gz_{n+1}$. Nous faisons l'hypothèse que la hauteur des vols de la bille est très supérieure à l'amplitude A de vibration du plateau, afin de pouvoir négliger la différence entre z_n et z_{n+1} , et écrire $u_{n+1}^- = u_n^+$. Cette hypothèse revient à négliger, à l'instant du choc, l'énergie potentielle de la bille par rapport à son énergie cinétique. Cette hypothèse est largement vérifiée dans la gamme d'accélération relatives dans laquelle nous travaillons, comme illustré figure 2.6a. En utilisant l'égalité des vitesses en début et fin de vol, et en écrivant k fois la loi de choc [Eq. (2.1)] pour les collisions n à $n+k$, on obtient

$$\langle \delta u_{n+k}^- \delta u_n^- \rangle = e^k \langle \delta u_n^- \delta u_n^- \rangle + (1+e) \sum_{i=1}^k e^{k-i} \langle v_{n+i} \delta u_n^- \rangle. \quad (2.25)$$

Afin de poursuivre le développement analytique, il est nécessaire de faire des hypothèses pour pouvoir traiter le terme $\langle v_{n+i} \delta u_n^- \rangle$. Supposons qu'il n'existe aucune corrélation entre la vitesse du plateau à la collision $n+k$ et celle de la bille à la collision n , *i.e.* $\langle v_{n+i} \delta u_n^- \rangle = 0$ pour tout $i \in [1; k]$. Cela conduit à $\rho(k) = e^k$, exactement la même décroissance que celle observée dans le cas où le plateau est au repos.

À partir de données numériques, nous observons une loi de puissance $\rho(k) = \beta^k$ (Fig. 2.12), avec le même paramètre β dans les cas S et MF. Cependant, il existe un écart à la loi de puissance dans le cas d'une excitation sinusoïdale, signe que certaines corrélations restent présentes.

Pour $e = 0.94$ et $\Gamma = 2.35$, le meilleur ajustement par une loi de puissance est obtenu pour $\beta = 0.88$ (Fig. 2.12). Il est alors clair que β ne peut pas être égal e , et ce quelque soit les

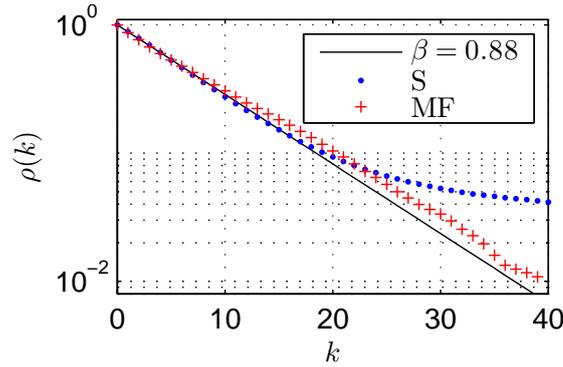
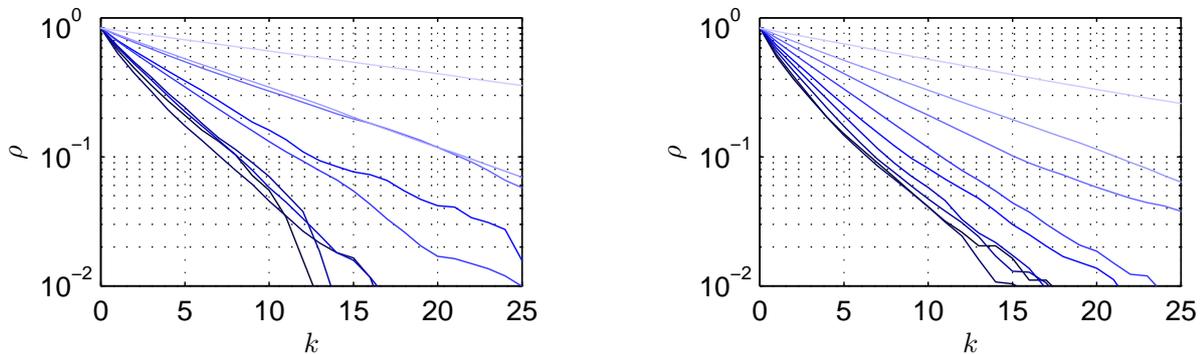


Figure 2.12 – Auto-corrélation $\rho(k)$ de la vitesse normalisée de la bille δu_n^- (S : points bleus ; MF : croix rouges). La ligne noire correspond à la loi de puissance $\rho(k) = 0.88^k$ ($e = 0.94$, $\Gamma = 2.35$).

valeurs de Γ ou e . Ceci prouve que l’hypothèse très forte qu’il n’existe aucune corrélation entre les mouvements du plateau et de la bille n’est pas valable. L’auto-corrélation $\rho(k)$ décroît plus rapidement que prévu initialement. Le terme $\langle v_{n+i} \delta u_n^- \rangle$ ne peut pas être prédit facilement, mais il est tout de même possible d’étudier le comportement de $\rho(k)$ pour plusieurs valeurs de (e , Γ), en ce concentrant sur le cas de la modulation de fréquence (MF).



(a) Auto-corrélation $\rho(k)$ pour $e = 0.775 - 0.975$ (du plus foncé au plus clair) et $\Gamma = 2.35$.

(b) Auto-corrélation $\rho(k)$ pour $e = 0.775 - 0.975$ (du plus foncé au plus clair) et $\Gamma = 6$.

Figure 2.13 – Étude de l’auto-corrélation $\rho(k)$ de la vitesse normalisée de la bille δu_n^- , pour $e = 0.775 - 0.975$ et $\Gamma = 2.35$ et 6 (MF).

Nous étudions la dépendance de β avec e afin de quantifier les corrélations temporelles qui persistent dans le système. Pour cela, nous avons calculé l’auto-corrélation $\rho(k)$ pour deux valeurs de l’accélération relative, $\Gamma = 2.35$ et 6 (Figures 2.13a et 2.13b), en faisant varier e sur une large gamme : $e \in [0.775; 0.975]$. Il apparaît tout d’abord que $\rho(k)$ ne se comporte comme une loi de puissance que pour les valeurs de e suffisamment proche de 1 ($e > 0.80$). En conséquence, nous mesurons la valeur de β en ajustant $\rho(k)$ par une loi de puissance uniquement dans la zone où elle a du sens. D’autre part, s’il existe une dépendance de β avec Γ , elle n’est pas visible sur ces figures. Nous traçons la dépendance de β avec $e \geq 0.9$ pour les deux valeurs de Γ (Fig. 2.14). Nous obtenons des points raisonnablement répartis autour de la droite $\beta = 2e - 1$, quelle que soit la valeur de Γ . La loi $\rho(k) = \beta^k$ avec $\beta = 2e - 1$ peut se récrire $\rho(k) = \exp(-k/k_c)$,

avec $k_c = -1/\ln(\beta)$. Dans la limite $e \rightarrow 1$, on peut effectuer un développement limité de cette expression à l'ordre 1 et on obtient $k_c = 0.5/(1 - e)$. Notons que ce scaling, s'il n'a pas été justifié théoriquement, va par la suite intervenir régulièrement dans l'étude du problème. Nous tenterons alors de l'expliquer au moins qualitativement.

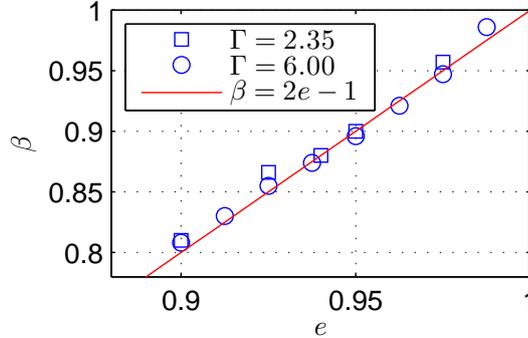


Figure 2.14 – Évolution du paramètre β (issu des ajustements $\rho(k) = \beta^k$ pour $e > 0.9$) avec e pour $\Gamma = 2.35$ et 6. Il suit raisonnablement la loi $\beta = 2e - 1$.

2.3.4 Statistiques de différentes quantités d'intérêt

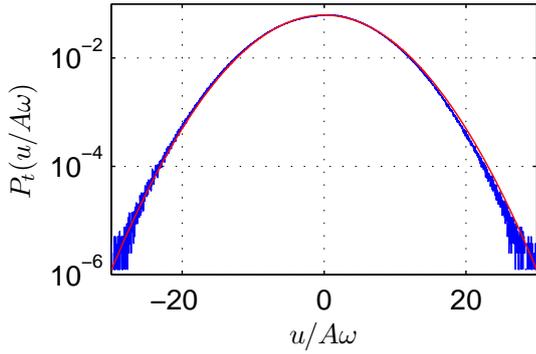
Précédemment (Sec. 2.3.2), nous avons étudié l'effet des corrélations entre les mouvements du plateau et de la bille sur la valeur moyenne de l'énergie de la bille. Nous cherchons ici à caractériser non plus seulement les valeurs moyennes, mais les distributions de probabilité de quantités comme la vitesse u et la hauteur h de la bille. Nous considérons ici les distributions de probabilités $P_t(u)$ et $P_t(h)$, obtenues en moyennant sur toute la durée de la trajectoire de la bille, par opposition à une moyenne sur les collisions uniquement ($P_c(u)$ et $P_c(h)$). Cette distinction sera discutée par la suite.

Les résultats concernant $5 \cdot 10^6$ collisions obtenues pour $e = 0.975$ et $\Gamma = 5$ sont présentés sur la figure 2.15. Il est important de noter que nous travaillons ici avec des quantités adimensionnées h/A et $u/(A\omega)$. En introduisant la masse m de la bille pour faire apparaître des expressions connues (même si la masse ne joue aucun rôle dans la dynamique), nous observons que $P_t(u)$ et $P_t(h)$ sont correctement décrites par des distributions d'équilibre [Huang - 2005]

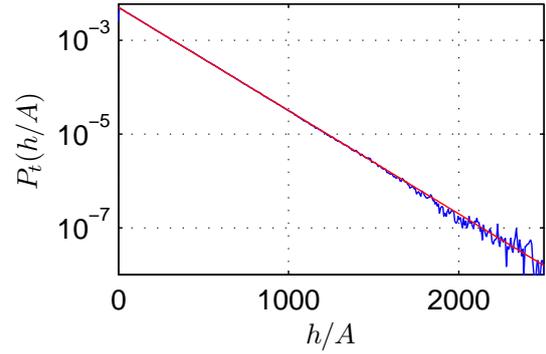
$$P_t(u) \propto \exp\left(-\frac{m u^2}{2kT}\right) \quad (2.26)$$

$$P_t(h) \propto \exp\left(-\frac{m g h}{kT}\right) \quad (2.27)$$

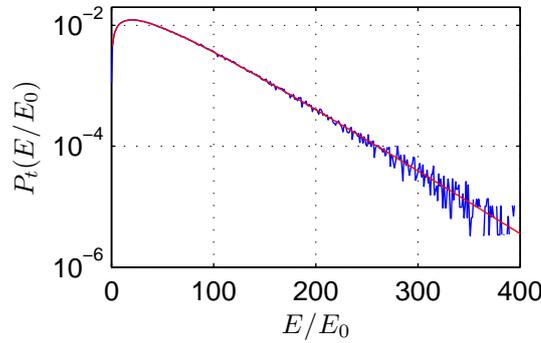
avec la même énergie caractéristique kT . Ce résultat reste valable tant que e reste proche de 1. Pour e plus petit, les distributions laissent apparaître des comportements bien plus complexes, que nous chercherons pas à étudier. Nous obtenons donc une première échelle d'énergie caractéristique à partir des distributions de vitesse et hauteurs. Dans les systèmes microscopiques à l'équilibre, cette énergie est proportionnelle à la température, T , du système, le facteur multiplicatif étant la constante de Boltzmann, k_B . Le fait d'observer le même type de loi pour notre système macroscopique est donc un premier résultat important. En effet, ceci nous permet



(a) Distribution de probabilité $P_t(u)$ de la vitesse de la bille au cours du temps.



(b) Distribution de probabilité $P_t(h)$ de la hauteur de la bille au cours du temps.



(c) Distribution de probabilité $P_t(E)$ de l'énergie de la bille au cours du temps.

Figure 2.15 – Distributions de probabilités $P_t(u)$, $P_t(h)$ et $P_t(E)$ obtenues en moyennant sur le temps. Les données obtenues numériquement (en bleu) sont ajustées (en rouge) par les expressions des équations (2.26), (2.27) et (2.28) ($e = 0.975$, $\Gamma = 5$).

de mesurer la température effective du système. Dans le cas de notre système macroscopique hors-équilibre, il n'existe pas d'équivalent à cette constante universelle. Par conséquent, nous utiliserons par abus de langage le terme de "température" pour parler de l'énergie caractéristique kT (la température effective) du système. À partir des mêmes données obtenues numériquement, nous pouvons calculer la distribution de l'énergie totale du système $E = \frac{1}{2} m u^2 + m g h$. En accord avec les précédents résultats (Eqs. (2.26) et (2.27)), la distribution $P_t(E)$ suit la loi suivante :

$$P_t(E) \propto \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (2.28)$$

l'accord avec les données étant de nouveau très bon.

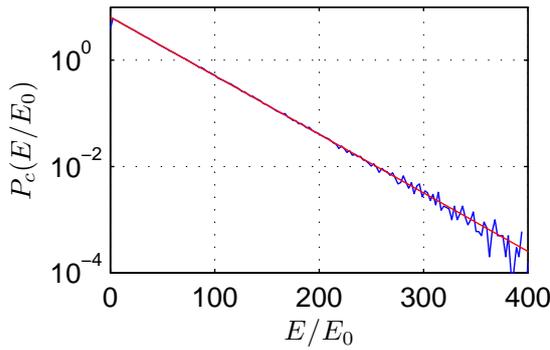
Jusqu'ici, nous avons considéré les distributions de probabilité des quantités mesurées tout au long de la trajectoire de la bille, au cours du temps. Il est également possible de considérer les distributions des quantités uniquement prises aux collisions. Nous présentons par exemple figure 2.16a la distribution de probabilité des énergies aux collisions, $P_c(E)$, quantité qui nous sera utile par la suite. Nous observons une décroissance exponentielle très claire, correctement décrite par

$$P_c(E) = \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (2.29)$$

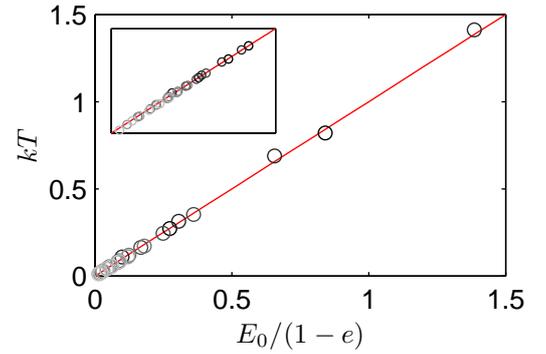
avec la même température kT que précédemment. Nous utilisons la distribution des énergies $P_c(E)$ pour étudier la dépendance de la température du système kT avec les paramètres du système : le coefficient de restitution e et les caractéristiques de la vibration du plateau. Pour plusieurs valeurs du coefficient de restitution ($e = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$ et 0.99), nous varions l'intensité des vibrations en changeant leur amplitude A , et nous étudions la distribution de probabilité des énergies obtenue. Nous tirons de chaque distribution la valeur de la température du système kT , présentée figure 2.16b. Il apparaît que la température kT est proportionnelle à la seule énergie caractéristique du système $E_0 \equiv m(A\omega)^2$, la dépendance avec e étant plus complexe :

$$kT = (1 \pm 0.01) \frac{m(A\omega)^2}{1 - e}. \quad (2.30)$$

Il est à noter que ce résultat ne reste valable que dans la limite e proche de 1, situation à laquelle nous nous limitons par la suite.



(a) Distribution $P_c(E)$ des énergies aux collisions en fonction de E/E_0 ajustée par l'équation. (2.29) ($e = 0.975$, $\Gamma = 5$).



(b) Température kT en fonction de $E_0/(1 - e)$ pour plusieurs valeurs de (e, Γ) . Insert : représentation avec une échelle log-log

Figure 2.16 – Exemple de distribution $P_c(E)$ ($e = 0.975$, $\Gamma = 5$), et valeurs de kT obtenues pour $e \in [0.80; 0.99]$ (du plus clair au plus foncé) et $\Gamma \in [1.34; 5]$.

La dépendance de kT avec e peut être prédite analytiquement dans la limite $e \rightarrow 1$. Nous reprenons ici le développement fait par Warr [Warr *et al.* - 1996], afin d'obtenir l'expression de la densité de probabilité des énergies aux collisions $P_c(E)$ [Eq. (2.29)]. On a montré précédemment (Sec. 2.3.3) qu'en négligeant l'énergie potentielle de la bille au choc, on avait $\nu_n = u_n^+ = -u_{n+1}^-$. Dans ce cas, l'équation (2.1) peut se récrire

$$\nu_{n+1} - \nu_n = (e - 1)\nu_n + (1 + e)v_n.$$

En assimilant le terme $\nu_{n+1} - \nu_n$ à la dérivée discrète $\frac{d\nu_n}{dn}$, et en réécrivant le terme $(1 + e)v_n$ comme la somme de sa valeur moyenne [Eq. 2.13] et de fluctuations, ξ , autour de cette valeur moyenne, on obtient

$$\frac{d\nu_n}{dn} = (e - 1)\nu_n + (1 + e)\frac{(A\omega)^2}{2\nu_n} + \xi.$$

On a donc une équation de Langevin généralisée, qu'on peut écrire de la façon suivante :

$$\frac{d\nu_n}{dn} = \frac{d}{d\nu_n} \left[\frac{(e-1)}{2} \nu_n^2 + (1+e) \frac{(A\omega)^2}{2} \ln \nu_n \right] + \xi.$$

La distribution de probabilité des ν_n solutions de cette équation [Risken - 1996] est donnée par

$$P(\nu_n) = \exp\left(\frac{(e-1)\nu_n^2/2 + (1+e)(A\omega)^2 \ln(\nu_n)/2}{\langle \xi^2 \rangle / 2}\right)$$

Or, il est possible de calculer $\langle \xi^2 \rangle$ sachant que la probabilité d'avoir la vitesse plateau v est connue, $P(v) = 1/(\pi\sqrt{(A\omega)^2 - v^2})$ (on considère pour cela que toutes les phases de choc sont équiprobables) :

$$\langle \xi^2 \rangle = \int (1+e)^2 v^2 P(v) dv = (1+e)^2 \frac{(A\omega)^2}{2}$$

On obtient donc que la distribution de probabilité aux collisions de la vitesse ν s'écrit

$$P_c(\nu) \propto \nu^{\frac{2}{1+e}} \exp\left(-\frac{2(1-e)}{(1+e)^2} \left(\frac{\nu}{A\omega}\right)^2\right),$$

ou encore

$$P_c(\nu) \propto \sqrt{\nu} \exp\left(-\frac{(1-e)}{2} \left(\frac{\nu}{A\omega}\right)^2\right) \quad \text{pour } e \rightarrow 1 \quad (2.31)$$

En écrivant que $P_c(E) dE = P_c(\nu) d\nu$ et que $dE = 2m\nu d\nu$, on en déduit l'expression de $P_c(E)$ annoncée Eq. (2.29), avec l'expression de $kT = \frac{m(A\omega)^2}{1-e}$, compatible avec la mesure effectuée présentée à l'équation (2.30). La différence entre les deux expressions de $P_c(E)$ et $P_t(E)$ vient de la pondération différente dans le cas d'une moyenne temporelle. En effet, alors qu'une énergie E_n donnée a un poids unitaire pour la moyenne collisionnelle, elle est pondérée par sa durée de vie dans la moyenne temporelle. Dans notre cas, sous réserve que la hauteur typique des vols soit très grande devant l'amplitude A des vibrations du plateau, la durée d'un vol est proportionnelle à la vitesse de décollage u_n^+ et donc à $\sqrt{E_n}$. En prenant en compte cette propriété, on déduit facilement l'équation (2.28) à partir de l'équation (2.29). Il est à noter que l'équation (2.30) diffère légèrement de la prédiction de Warr *et. al.* dans la mesure où ils n'ont pas travaillé dans la limite $e \rightarrow 1$.

En conclusion, notre système d'étude présente de fortes similitudes avec les systèmes à l'équilibre, puisque les distributions de probabilités sont celles d'un système à l'équilibre, alors même qu'il est dissipatif, maintenu dans un état stationnaire. Nous avons pu extraire des distributions de probabilités une unique température kT , qui n'est pour autant pas uniquement une propriété du thermostat dans la mesure où elle dépend de la masse, m , de la bille [Eq. (2.30)]. D'autre part, nous avons montré que nous pouvions obtenir une distribution d'équilibre en considérant l'énergie uniquement aux collisions (Fig. 2.16). De la sorte, nous écartons le fait que la durée d'un vol dépende de l'énergie associée, et nous supprimons le préfacteur \sqrt{E} de la dis-

2.3. CARACTÉRISATION DU RÉGIME CHAOTIQUE, ENTRETENU ET STATIONNAIRE

tribution exponentielle des énergies. D'un point de vue formel, il est intéressant de considérer la statistique des états d'énergie de la bille en contact avec un thermostat (le plateau). Dans la suite, nous étudions donc les propriétés statistiques de différentes quantités fluctuantes aux collisions, comme les incréments d'énergie par exemple, afin de discuter de la thermalisation de notre système.

2.4 Étude des échanges énergétiques entre la bille et le plateau

2.4.1 Étude du paysage énergétique

En étudiant les distributions de vitesse u , de hauteur h et d'énergie E , nous avons montré que notre système ressemblait à un système à l'équilibre dont la température serait kT . Une question qui vient alors naturellement à l'esprit est de savoir si le plateau, qui injecte et dissipe de l'énergie, joue effectivement le rôle d'un thermostat à la température kT . Dans cette partie, nous caractérisons la dynamique des échanges d'énergie et nous montrons qu'ils peuvent être séparés en deux contributions (injection et dissipation). Nous montrons alors que le plateau ne constitue pas à strictement parler un thermostat, et nous exhibons plusieurs échelles d'énergies différentes les unes des autres.

Dans toute la suite, nous n'étudions plus que des probabilités associées aux chocs et non au cours du temps. Afin de ne pas surcharger les notations, nous omettons l'indice ".c" pour toutes les quantités calculées : par exemple, la densité de probabilité de l'énergie E , $P_c(E)$, sera désignée par $P(E)$.

Statistiques des échanges d'énergie

À chaque collision, l'énergie totale de la bille évolue d'une énergie E , avant la collision vers E' après. Comme justifié plusieurs fois précédemment, l'énergie potentielle de la bille aux collisions est négligeable devant son énergie cinétique. En conséquence, la variation d'énergie vaut $E' - E \equiv \Delta E = \frac{m}{2} [(u^+)^2 - (u^-)^2]$.

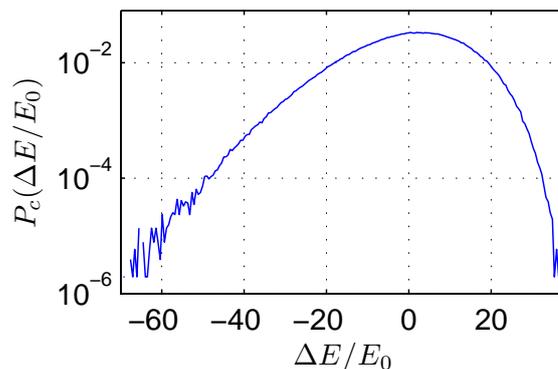


Figure 2.17 – Distribution de probabilité $P_c(\Delta E)$ des incréments d'énergie ΔE calculés à chaque collision ($e = 0.975$, $\Gamma = 5$).

Nous choisissons tout d'abord d'étudier les échanges d'énergie en observant la distribution de probabilité des incréments d'énergie ΔE à chaque collision. La figure 2.17 présente cette distribution, clairement asymétrique. Ceci est déjà une preuve que le système n'est pas en contact avec un thermostat classique. En effet, la valeur la plus probable est positive mais la valeur moyenne est nulle puisqu'en moyenne la bille perd autant d'énergie qu'elle en gagne ($\langle \Delta E \rangle = 0$). L'aile gauche de la distribution, correspondant à l'injection d'énergie est quasi-exponentielle, alors que l'aile droite décroît plus rapidement qu'une exponentielle. Ce type de distribution

est assez proche des distributions de type BHP, notamment observées dans des flux fermés turbulents [Bramwell *et al.* - 1998, Bramwell *et al.* - 2001].

Réversibilité de la dynamique

Pour analyser plus finement la dynamique des échanges d'énergie, nous proposons de caractériser en détail les probabilités de transitions entre les différentes énergies. En effet, l'énergie de la bille à un instant donné définit totalement l'état dans lequel elle se trouve. Notre but est ici de vérifier si les échanges d'énergie ont la propriété d'être réversibles, propriété requise pour les réservoirs de température microscopiques classiques [W. Ebeling - 2005]. Il n'y a ici *a priori* aucune raison pour que notre système macroscopique dissipatif satisfasse cette propriété. Pour autant, nous aimerions savoir jusqu'où notre simple système macroscopique peut être analysé et modélisé en utilisant les concepts de la physique statistique des systèmes microscopiques à l'équilibre et de la thermodynamique. Dans la suite nous utiliserons deux notions différentes de réversibilité. Nous nommons "réversibilité forte" la propriété que le passage d'un état à un autre et le passage en sens inverse aient la même probabilité d'être observés. La propriété que le passage en sens inverse ait une probabilité non nulle être observée est nommée "réversibilité faible". Il est important de noter qu'il n'est pas nécessaire que la dynamique soit markovienne pour tester les propriétés de réversibilité du système.

Nous définissons tout d'abord $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$, la probabilité que la bille passe d'une énergie E à une énergie E' au cours d'une collision. Cette quantité peut être mesurée directement dans les simulations numériques, et jouera par la suite un rôle déterminant dans notre étude. De façon plus précise, $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ est une densité de probabilité, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(E \rightarrow E')dEdE'$ est la probabilité d'observer le passage d'un intervalle énergétique $[E, E + dE]$ vers $[E', E' + dE']$. À partir de la probabilité de transition d'une énergie E vers une énergie E' , il est possible de définir le flux, défini par

$$\mathcal{J}(E \rightarrow E') \equiv \mathcal{P}(E \rightarrow E') - \mathcal{P}(E' \rightarrow E). \quad (2.32)$$

La réversibilité forte correspond au fait que la probabilité d'observer un passage est égale à celle d'observer le passage inverse, *i.e.* $\mathcal{P}(E \rightarrow E') = \mathcal{P}(E' \rightarrow E)$, ou de façon équivalente $\mathcal{J}(E \rightarrow E') = 0$. Il est également utile de définir le taux de transition $\mathcal{T}(E \rightarrow E')$. Il s'agit de la probabilité de transition de E vers E' normalisée par la probabilité que le système ait initialement l'énergie E , soit

$$\mathcal{P}(E \rightarrow E') \equiv P(E) \mathcal{T}(E \rightarrow E'), \quad (2.33)$$

où $P(E)$ est la probabilité d'observer E (pour rappel, cette quantité était notée $P_c(E)$ dans les sections précédentes).

Nous présentons donc sur les Figures 2.18a et 2.18b, les cartes des probabilités $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ dans le plan (E, E') . La valeur de $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ est convertie en niveaux de gris avec une échelle logarithmique : plus la probabilité est grande, plus la couleur est claire. La réversibilité forte se manifesterait ici par une symétrie de la carte $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ par rapport à sa diagonale (tracée

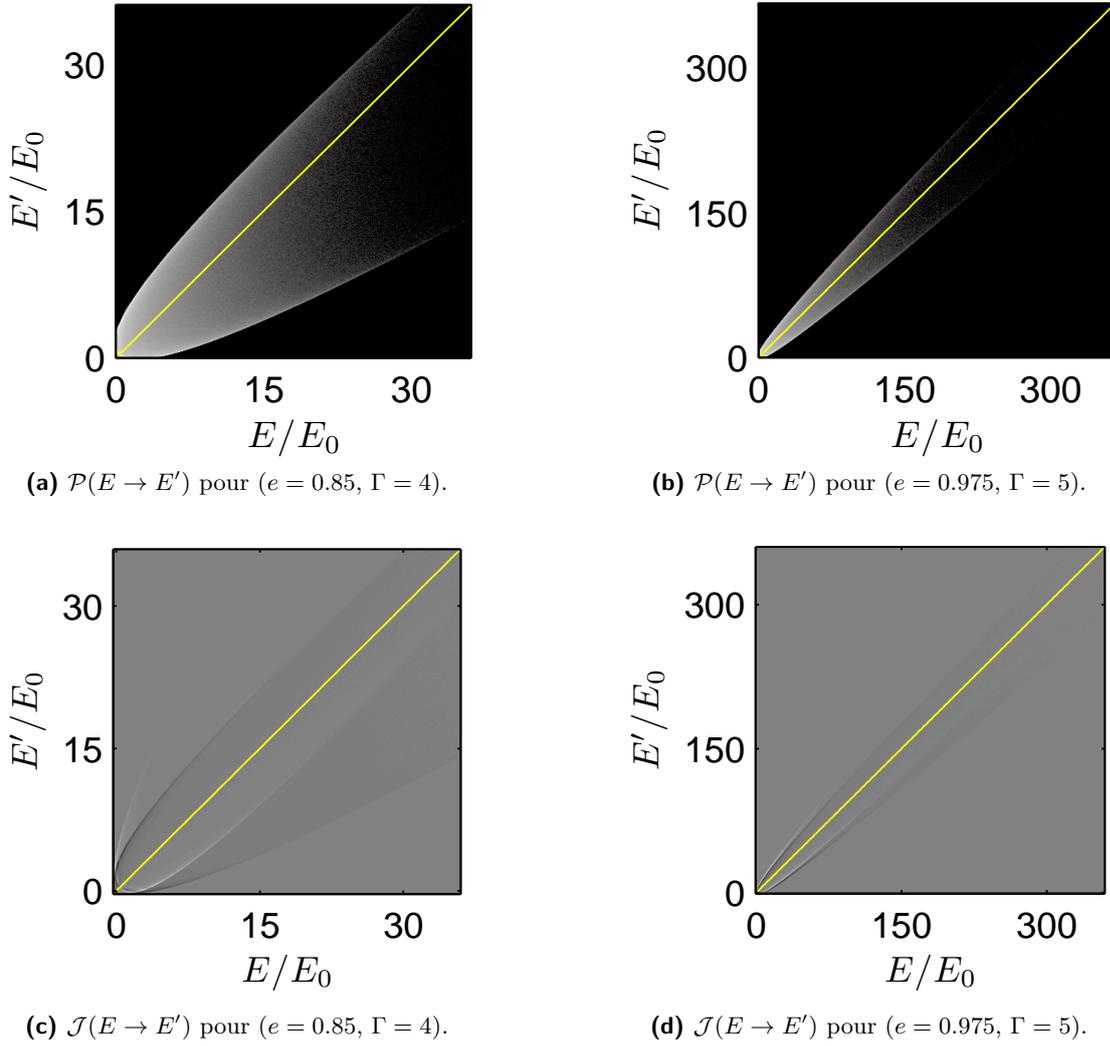


Figure 2.18 – Cartes des probabilités \mathcal{P} que l'énergie du système passe de E à E' lors d'une collision avec le plateau (niveaux de gris en échelle logarithmique), et des flux $\mathcal{J}(E \rightarrow E')$ (niveaux de gris en échelle linéaire). La ligne jaune correspond à la diagonale.

ici en jaune). La réversibilité faible correspondrait en revanche à une symétrie de la zone dans laquelle les probabilités sont non nulles, ce qui n'est pas le cas non plus. On voit aussi sur les cartes des flux $\mathcal{J}(E \rightarrow E')$ (Figures 2.18c et 2.18d) que la réversibilité totale n'est pas vérifiée, tout simplement parce que certaines transitions n'ont lieu que dans un sens.

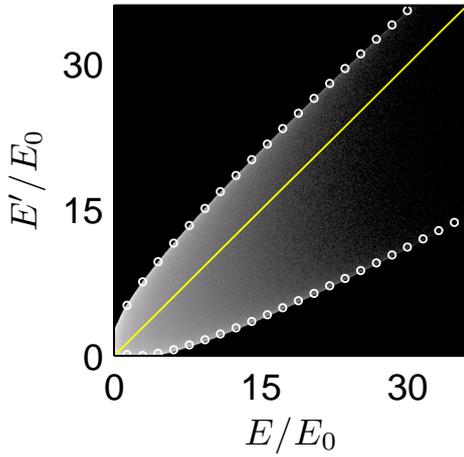
Il apparaît très clairement sur la carte des probabilités $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ qu'il existe une zone bien délimitée dans laquelle les transitions sont possibles. Les limites de cette région de la carte correspondent de façon intéressante aux courbes où le flux $\mathcal{J}(E \rightarrow E')$ est non nul. Les deux courbes qui délimitent la région en question, E'_{\max} et E'_{\min} , peuvent être calculées analytiquement en considérant simplement le fait que la vitesse maximale accessible (respectivement minimale) par la bille est obtenue pour une vitesse plateau maximale, $v = A\omega$ (respectivement minimale,

$v = -A\omega$). On obtient facilement par le calcul que

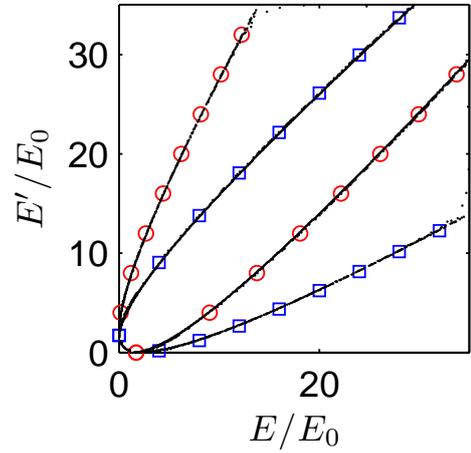
$$E'_{\max} = e^2 E + e(1+e)\sqrt{2EE_0} + \frac{1}{2}(1+e)^2 E_0 \quad (2.34)$$

$$E'_{\min} = e^2 E - e(1+e)\sqrt{2EE_0} + \frac{1}{2}(1+e)^2 E_0 \quad (2.35)$$

Lorsqu'on trace les Équations (2.34) et (2.35) sur la carte des probabilités de transition (Fig. 2.19a), on voit clairement que toutes les transitions ont effectivement lieu à l'intérieur de la zone délimitée par ces deux courbes. D'autre part, on voit que les maxima de \mathcal{P} à E fixée correspondent à $E'_{\min}(E)$ et $E'_{\max}(E)$. En effet, les transitions de E vers $E'_{\min}(E)$ et $E'_{\max}(E)$ sont les plus fréquentes car elle correspondent à des collisions où la vitesse du plateau est minimale ou maximale. Or, étant donné son mouvement quasi-sinusoidal, le plateau passe plus de temps dans les régions de vitesses extrémales puisque son accélération y est minimale.



(a) $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ pour ($e = 0.85$, $\Gamma = 4$) et $E'_{\max/\min}(E)$ (ronds blancs).



(b) Maxima locaux de \mathcal{P} (points noirs), $E'_{\max/\min}(E)$ (carrés bleus), et leurs symétriques (points noirs et ronds rouges).

Figure 2.19 – Carte de probabilité $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ (échelle log) et de ses maxima comparés à $E'_{\max/\min}(E)$ (Eqs. (2.35) et (2.34)).

Caractère markovien du processus

Afin d'étudier plus en détail la dynamique de notre système il convient de savoir si elle est markovienne ou non. Le caractère markovien du processus correspond au fait que, dans une séquence $(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3)$ d'énergie successive de la bille, le taux de transition $\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_3)$ est indépendant de la configuration E_1 précédemment occupée. Il convient donc en principe de calculer $\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_3)$ pour différentes valeurs fixées de E_1 , et de vérifier que le résultat est indépendant de E_1 . Étant donné qu'il est difficile de tracer plusieurs cartes $\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_3)$ pour plusieurs valeurs de E_1 afin de vérifier qu'elles sont identiques, nous proposons de suivre le protocole suivant. Soit $\mathcal{P}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3)$, la probabilité d'observer des trajectoires $(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3)$ avec (E_2, E_3) fixées et telles que $E_1 > E_2$. De façon analogue, $\mathcal{P}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3)$ est la probabilité d'observer des trajectoires $(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3)$ avec (E_2, E_3) fixées et telles que

$E_1 < E_2$. Alors, si la dynamique est markovienne, les taux de transition, \mathcal{T} , associés doivent être égaux, *i.e.*

$$\mathcal{T}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3) = \mathcal{T}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3) \quad (2.36)$$

Nous présentons sur la figure 2.20, les cartes des taux de transitions $\mathcal{T}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3)$ et $\mathcal{T}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3)$. Les deux cartes semblent assez proches, à l'exception de la zone correspondant aux grandes énergies, où nous avons clairement moins de statistiques.

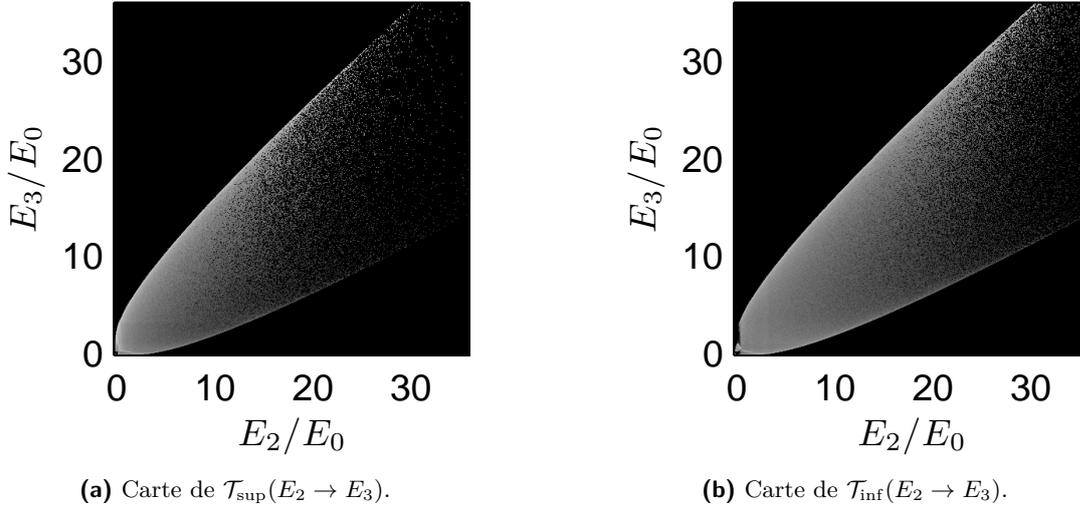


Figure 2.20 – Cartes des taux de transitions $\mathcal{T}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3)$ d'une énergie E_2 vers E_3 (respectivement $\mathcal{T}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3)$), sachant que le système avait précédemment une énergie E_1 telle que $E_1 > E_2$ (respectivement $E_1 < E_2$). Les valeurs sont affichées en niveaux de gris avec une échelle logarithmique ($e = 0.85$, $\Gamma = 4$).

Dans la mesure où il est assez difficile de juger si les deux cartes sont identiques (ou au moins très proches), nous présentons figure 2.21 des coupes des cartes $\mathcal{T}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3)$ et $\mathcal{T}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3)$. Nous traçons l'évolution de \mathcal{T}_{sup} et \mathcal{T}_{inf} en fonction de E_3 pour trois valeurs différentes de E_2 . Nous nous concentrons sur la zone où les statistiques sont suffisantes ($E_{2/3} < 15 E_0$). On voit alors apparaître que \mathcal{T}_{sup} et \mathcal{T}_{inf} ne sont pas parfaitement égaux, en particulier aux très faibles énergies. Pour autant, les coupes suivent la même tendance et sont très proches, aux fluctuations près. En conclusion, nous considérons dans la suite que la dynamique de notre système est proche d'être markovienne, et nous continuons à étudier en détail les échanges d'énergies dans ce contexte.

2.4.2 Distinction entre injection et dissipation

La présence de transitions irréversibles observées figure 2.18 suggère que la dissipation d'énergie due à l'inélasticité des collisions joue un rôle important. Ceci n'est pas surprenant et nous conduit naturellement à étudier séparément l'injection et la dissipation d'énergie. Pour cela, nous décomposons chaque incrément d'énergie mesuré lors d'une collision $\Delta E = E' - E$ en la somme d'un incrément d'énergie dissipée, E_{dis} , et injectée, E_{inj} , de telle sorte que $\Delta E = E_{\text{inj}} - E_{\text{dis}}$. Cette décomposition motivée par la physique du problème présente l'inconvénient

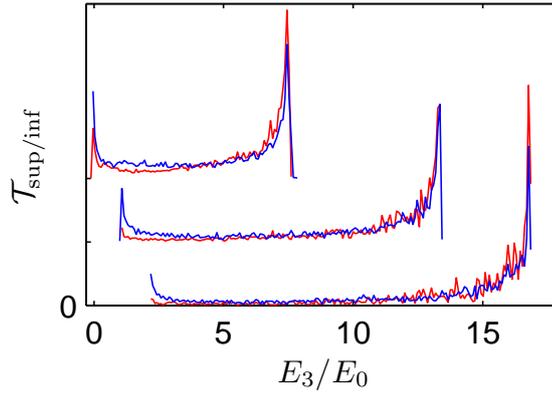
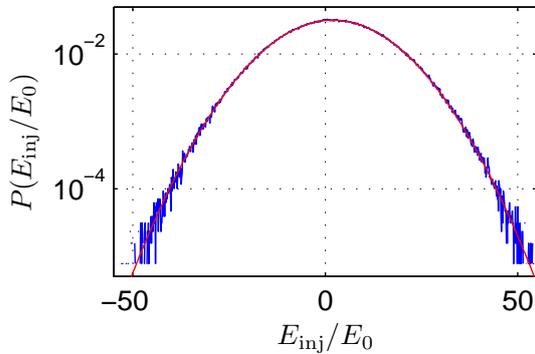


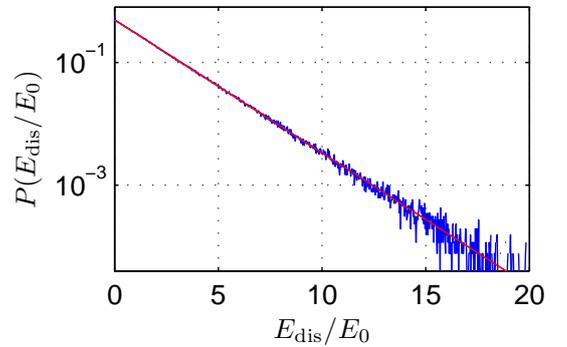
Figure 2.21 – Évolution de $\mathcal{T}_{\text{sup}}(E_2 \rightarrow E_3)$ (lignes rouges) et $\mathcal{T}_{\text{inf}}(E_2 \rightarrow E_3)$ (lignes bleues) en fonction de E_3 pour $E_2 = 3E_0$, $7E_0$ et $11E_0$ (haut, milieu et bas). Les courbes ont été décalées pour plus de clarté ($e = 0.85$, $\Gamma = 4$).

que la définition des incréments E_{inj} (et donc E_{dis}) n'est pas unique, comme expliqué ci-après. La décomposition doit respecter deux règles de base : (1) les incréments d'énergie dissipée doivent nécessairement être positifs, $E_{\text{dis}} \geq 0$; (2) ils doivent tendre vers $E_{\text{dis}} = (1 - e^2)E$ dans la limite d'une amplitude de vibration nulle.

Une définition couramment utilisée [Aumaitre *et al.* - 2001] est $E_{\text{dis}} = \frac{1}{2}(1 - e^2)(u^- - v)^2$, ce qui correspond à l'énergie dissipée dans le référentiel en mouvement du plateau. En conséquence, on a $E_{\text{inj}} = (1 + e)m v(v - u^-)$. Dans le cadre de cette définition, nous nous proposons d'étudier les distributions de probabilité des incréments d'énergie injectée et dissipée. Nous présentons figure 2.22 des exemples de ces distributions de probabilités. Il apparaît que $P(E_{\text{inj}})$ suit une loi gaussienne. La valeur moyenne de la distribution est non nulle puisque l'on injecte de l'énergie en moyenne, mais elle est très petite comparée à sa largeur. Cela permet d'avoir des événements où l'énergie injectée est négative, ce qui correspond généralement à une collision avec un plateau en phase descendante. En revanche, la distribution des incréments d'énergie dissipée $P(E_{\text{dis}})$



(a) Distribution de probabilité, $P(E_{\text{inj}})$, des incréments d'énergie injectée à chaque choc.



(b) Distribution de probabilité, $P(E_{\text{dis}})$, des incréments d'énergie dissipée à chaque choc.

Figure 2.22 – Distributions de probabilité des incréments d'énergie injectée, $P(E_{\text{inj}})$, et dissipée, $P(E_{\text{dis}})$, à chaque choc ($e = 0.975$, $\Gamma = 5$).

suit une loi exponentielle et ne comprend que des événements positifs, comme attendu. En

étudiant ces distributions pour plusieurs couples de paramètres (e, Γ) , nous avons pu obtenir la dépendance des moyennes et écart-type de ces distributions :

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{inj}} \rangle &= \langle E_{\text{dis}} \rangle \simeq 2 - 3(1 - e) E_0, \\ \langle E_{\text{inj}}^2 \rangle - \langle E_{\text{inj}} \rangle^2 &\simeq 0.35 \left(\frac{1}{1 - e} + 5 \right) E_0. \end{aligned}$$

Les deux moyennes sont nécessairement égales puisque le système se trouve dans un état stationnaire entretenu. Nous n'avons pas cherché à caractériser davantage ces distributions car elles utilisent des définitions qui posent le problème suivant : l'incrément d'énergie dissipée a été défini dans le référentiel du plateau. Or, nous observons *a priori* les incréments d'énergie dans le référentiel du laboratoire. En conséquence, nous proposons dans la section suivante de définir différemment les incréments d'énergie injectée et dissipée afin de pouvoir poursuivre notre étude.

2.5 Mesures de l'écart à l'équilibre

2.5.1 Nouvelle définition de l'injection et de la dissipation

Afin de définir un cadre dans lequel les transitions soient au moins faiblement réversibles, il convient de définir plus spécifiquement les propriétés que doivent vérifier les incréments d'énergie injectée, E_{inj} . L'objectif est ici de modéliser une injection d'énergie provenant d'un réservoir à l'équilibre, et il est nécessaire que toutes les transitions puissent au minimum avoir lieu en sens inverse. En supposant que ces transitions (associées à l'énergie injectée uniquement) sont représentées sur une carte similaire à celles présentées Fig. 2.18, la condition nécessaire de la réversibilité faible correspond à une symétrie par rapport à la diagonale de la zone où ont lieu les transitions.

Notons tout d'abord que les équations (2.34) et (2.35) ont une symétrie non-triviale que nous allons démontrer. En récrivant ces équations (avec $E_0 = 1$ pour alléger les notations),

$$E' = e^2 E \pm e(1+e)\sqrt{2E} + \frac{1}{2}(1+e)^2 \quad (2.37)$$

(E' correspond à $E'_{\text{max/min}}$), nous pouvons effectuer la transformation suivante :

$$X = \frac{E' + e^2 E}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{E' - e^2 E}{\sqrt{2}}. \quad (2.38)$$

Cette transformation peut être interprétée géométriquement comme une contraction de l'axe des E , en définissant $x = e^2 E$ et $y = E'$, suivie d'une rotation de 45° des axes (x, y) . l'équation (2.37) se récrit alors de la façon suivante avec les variables (X, Y) :

$$X = \frac{\sqrt{2}}{(1+e^2)} Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} (1+e^2). \quad (2.39)$$

On voit alors apparaître la symétrie par rapport à l'axe des X puisque la courbe est invariante par changement de signe de Y .

Il est possible de donner une interprétation physique à cette transformation géométrique. La transition $E \rightarrow E'$ peut être décomposée en une étape de dissipation $E \rightarrow E''$, suivie d'une étape d'injection $E'' \rightarrow E'$. Cela nous conduit naturellement à définir l'incrément d'énergie dissipée par $E_{\text{diss}} = (1 - e^2) E$, et donc l'incrément d'énergie injectée par $E_{\text{inj}} = E' - e^2 E$. Cette décomposition conduit à une carte des probabilités des incréments d'énergie injectée $E'' \rightarrow E'$ dont l'enveloppe est symétrique par rapport à la diagonale, comme le prévoit l'équation (2.39). Cette symétrie est effectivement observée sur les cartes des $\mathcal{P}(E'' \equiv e^2 E \rightarrow E')$ présentées figure 2.23. Les transitions sont donc faiblement réversibles, *i.e.* si une transition de E'' vers E' est observée, la transition inverse de E' vers E'' peut également être observée. En revanche, elles ne sont pas fortement réversibles *i.e.* les transitions de E'' vers E' et leur inverses n'ont pas lieu avec la même probabilité. Ceci se traduit par une absence de symétrie complète de la carte.

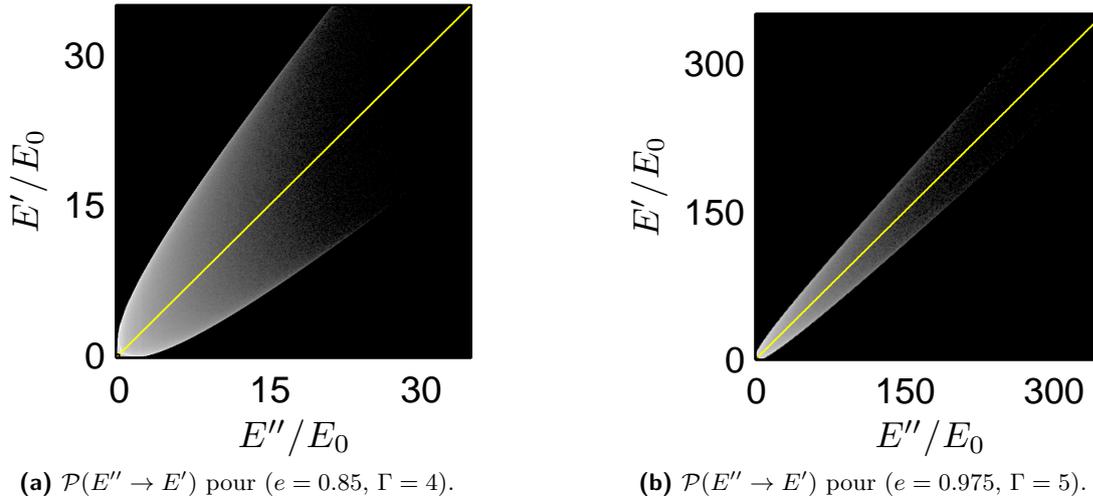


Figure 2.23 – Cartes des probabilités des incréments d'énergie injectée $\mathcal{P}(E'' \equiv e^2 E \rightarrow E')$. Les valeurs sont converties en niveaux de gris avec une échelle logarithmique. La diagonale est tracée en jaune comme guide pour l'œil.

2.5.2 Taux de création d'entropie

Une manière de caractériser l'absence de réversibilité forte est la mesure de la création d'entropie, qui est nulle lorsque la dynamique du système est fortement réversible et positive dans les autres cas. Une définition pratique de la création d'entropie a été proposée par Gaspard *et al.* [Gaspard - 2004] dans le cadre des systèmes stochastiques markoviens et utilisée dans le cadre d'une étude expérimentale [Andrieux *et al.* - 2007]. Cette définition est formulée en utilisant uniquement les probabilités de transitions, sans qu'il soit nécessaire de calculer des quantités spécifiques aux systèmes Markoviens (taux de transitions d'un état vers un autre par exemple). Nous proposons donc d'étendre, au moins au niveau heuristique, cette définition à notre système d'étude.

Nous étudions donc ici la création d'entropie associée au mécanisme d'injection d'énergie, définie par

$$\sigma = \frac{\delta E^2}{2} \sum_{E', E''} [\mathcal{P}(E'' \rightarrow E') - \mathcal{P}(E' \rightarrow E'')] \ln \left[\frac{\mathcal{P}(E'' \rightarrow E')}{\mathcal{P}(E' \rightarrow E'')} \right]. \quad (2.40)$$

où δE est l'incrément d'énergie utilisé pour discrétiser la carte des probabilité de transition. Cette création d'entropie peut être interprétée comme une mesure de l'écart au bilan détaillé observé sur la carte des énergies injectées (Fig. 2.23).

Que l'analogie thermodynamique soit valable ou non, cette création d'entropie σ peut dans tous les cas être considérée comme une mesure de l'écart à la réversibilité forte : $\sigma = 0$ par construction lorsqu'elle est vérifiée, $\sigma > 0$ sinon. Notons que σ ne serait pas définie correctement s'il existait des transitions ayant lieu dans un sens mais pas dans l'autre *i.e.* si la réversibilité faible n'était pas vérifiée. Pour cette raison, il est nécessaire d'utiliser la définition correcte des incréments d'énergie injectée et dissipée, précédemment introduite (Sec. 2.4.2). C'est également pour cette raison qu'il n'est pas possible, dans ce cadre théorique, de mesurer une création

d'entropie associée à la dissipation d'énergie.

Le calcul de σ fait intervenir l'incrément d'énergie δE utilisé pour discrétiser l'énergie afin de tracer les cartes de transitions et évaluer l'intégrale (2.40). Afin d'obtenir une valeur de σ qui corresponde à la limite continue, nous avons calculé σ pour plusieurs valeurs de δE et extrapolé la décroissance quasi-linéaire de $\sigma(\delta E)$ dans la limite $\delta E = 0$. Nous avons répété cette méthode pour plusieurs valeurs de e et Γ afin de déterminer l'influence de ces paramètres sur cette quantité. Il apparaît que la création d'entropie ne dépend pas de l'accélération relative Γ . Nous traçons figure 2.24 l'évolution de σ avec $(1 - e)$. Dans la limite $e \rightarrow 1$, on obtient

$$\sigma = (2.05 \pm 0.05)(1 - e) + (2.3 \pm 0.1)(1 - e)^2. \quad (2.41)$$

L'écart à la réversibilité forte croît, comme attendu, lorsque e s'éloigne de 1, *i.e.* lorsque la dissipation croît.

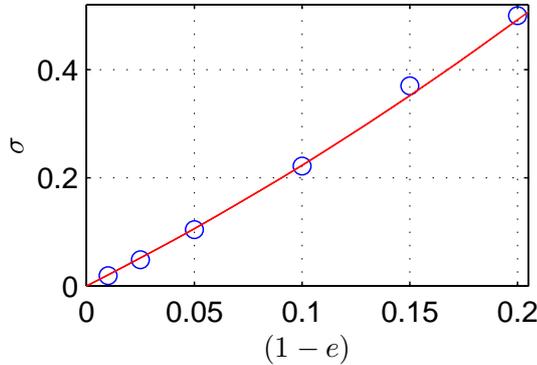


Figure 2.24 – Taux de création d'entropie σ en fonction de $(1 - e)$ pour plusieurs valeurs de (e, Γ) . La ligne rouge correspond à $\sigma = 2.05(1 - e) + 2.3(1 - e)^2$. σ dépend de e mais pas de Γ puisque chaque point correspond à plusieurs valeurs de Γ : 1.34, 1.70, 2.35, 2.86, 3.44, 4.00 et 5.00.

En poursuivant l'analogie avec la production d'entropie thermodynamique, nous pouvons utiliser σ pour mesurer une température associée, kT_σ , définie par la relation $kT_\sigma = \langle E_{inj} \rangle / \sigma$, où $\langle E_{inj} \rangle$ est l'énergie injectée moyenne. Cette définition est essentiellement dimensionnelle et phénoménologique. Une interprétation possible dans le cadre de la thermodynamique des moteurs serait que $\sigma / \langle E_{inj} \rangle = 1/kT_1 - 1/kT_2$, où kT_1 et kT_2 seraient les températures des sources froides et chaudes avec lesquelles le système interagit. Pour autant, nous n'avons aucune preuve qu'une telle interprétation soit possible et il nous est impossible d'obtenir explicitement T_1 et T_2 sans une autre mesure. À partir des données obtenues numériquement, nous avons mesuré (Section 2.4.2) $\langle E_{inj} \rangle = [2.00 - (2.77 \pm 0.05)(1 - e)] E_0$ (Fig. 2.25a). À partir des valeurs de σ et $\langle E_{inj} \rangle$, on peut donc tracer kT_σ / E_0 en fonction de $1/(1 - e)$ (Fig. 2.25b). Dans la limite $e \rightarrow 1$, on obtient

$$kT_\sigma = (1.00 \pm 0.02) \frac{E_0}{(1 - e)}, \quad (2.42)$$

soit une échelle d'énergie typique identique à celle du système définie Section 2.3.4 à partir des distributions d'énergie.

Nous proposons plusieurs tentatives d'interprétations de ce résultat. La première consiste à dire que la température kT_1 est égale à la température kT mesurée à partir des distributions d'énergie. Ceci conduirait à une température infinie kT_2 pour l'injection. Une autre possibilité est de considérer que le mécanisme d'injection se fait à température $kT_2 = kT$, alors que le système serait, du point de l'injection d'énergie, à la température $kT_1 = kT/2$. Il existe bien sûr une infinité d'autres valeurs possibles pour kT_1 et kT_2 qui seraient compatibles avec l'équation (2.42). Nous rappelons également que l'écriture $\sigma/\langle E_{\text{inj}} \rangle = 1/kT_1 - 1/kT_2$ est purement phénoménologique et non démontrée.

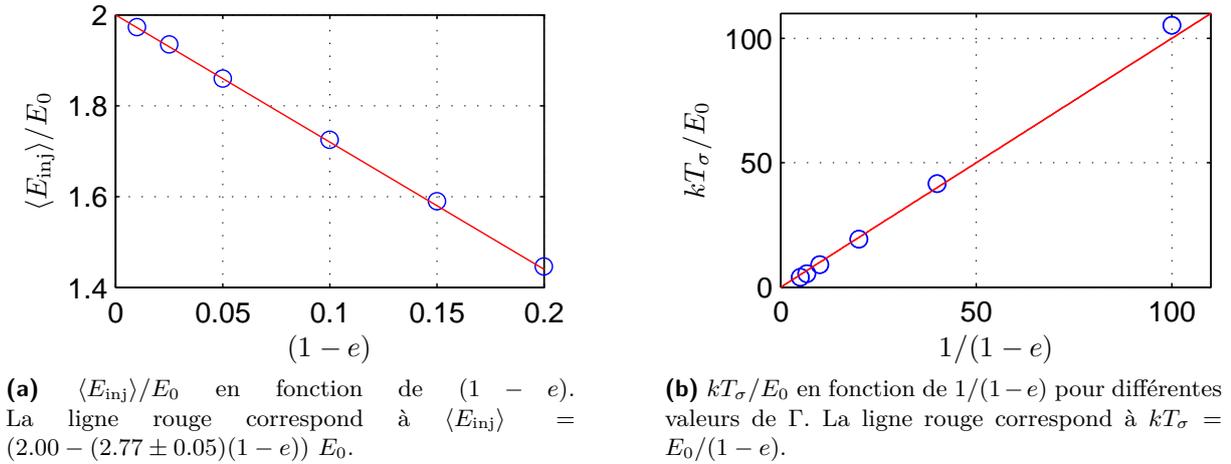


Figure 2.25 – Énergie moyenne injectée $\langle E_{\text{inj}} \rangle / E_0$ et température associée à la création d'entropie kT_σ / E_0 pour $e \in [0.80; 0.99]$ et $\Gamma \in [1.34; 5.00]$.

2.5.3 Test du bilan détaillé par les taux de transitions

Nous nous proposons ici de faire un autre test du bilan détaillé en utilisant les taux de transitions \mathcal{T} définis Sec. 2.4.1 par $\mathcal{P}(E \rightarrow E') \equiv P(E) \mathcal{T}(E \rightarrow E')$, où $P(E)$ est la distribution de probabilité des énergies de la bille après un choc avec le plateau et $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ la probabilité de passage de E vers E' . Si le bilan détaillé (*i.e.* la réversibilité forte) était vérifié, et étant donné que $P(E) \propto \exp(-E/kT)$, nous aurions

$$\mathcal{T}(E \rightarrow E') \exp(-E/kT) = \mathcal{T}(E' \rightarrow E) \exp(-E'/kT), \quad (2.43)$$

relation qui peut se récrire de la façon suivante :

$$-\ln \left[\frac{\mathcal{T}(E \rightarrow E')}{\mathcal{T}(E' \rightarrow E)} \right] = \frac{1}{kT} (E' - E). \quad (2.44)$$

Sachant que le bilan détaillé n'est pas vérifié, et en s'inspirant de l'équation. (2.44), nous définissons la fonction

$$g(E, E') = -\ln \left[\frac{\mathcal{T}(E \rightarrow E')}{\mathcal{T}(E' \rightarrow E)} \right]. \quad (2.45)$$

Si le bilan détaillé était valable, en traçant $g(E, E')$ en fonction de $E' - E$ pour tous les couples (E, E') , nous obtiendrions un nuage de points répartis sur une droite de pente $1/kT$ [Eq. (2.44)].

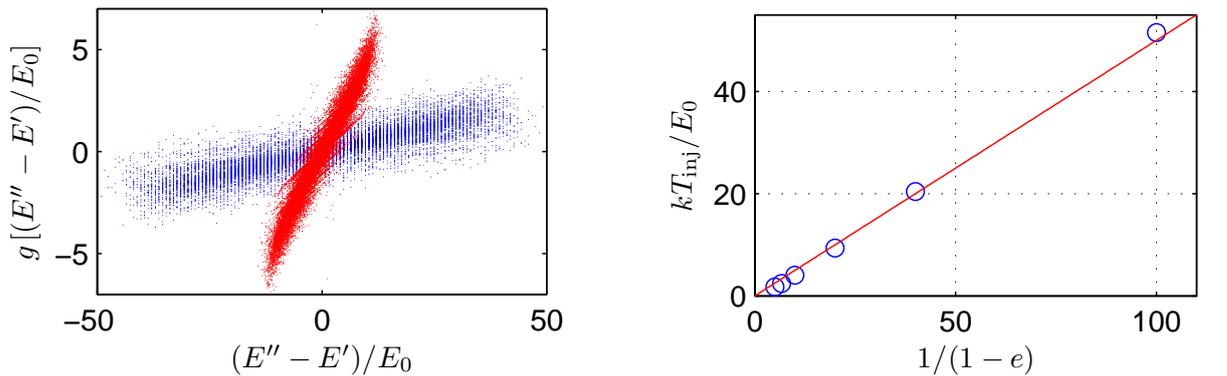
Du fait de l'existence de transitions irréversibles (Fig. 2.18, Sec. 2.4.1), $g(E, E')$ n'est pas définie pour les incréments d'énergie totale. Cependant, la carte des incréments d'énergie injectée possède, elle, la bonne symétrie. Par analogie avec l'équation (2.45), on peut donc estimer $g(E'', E')$, où $E'' = e^2 E$. Si le bilan détaillé était valable, $g(E'', E')$ vérifierait

$$g(E'', E') = \frac{1}{kT_{\text{inj}}}(E' - E''), \quad (2.46)$$

où kT_{inj} est une température caractéristique du réservoir, puisque liée à l'injection. Il est à noter que kT_{inj} peut tout à fait être différente de kT à cause de l'existence de dissipation en plus du mécanisme d'injection.

La figure 2.26a représente le nuage de points des $g(E'', E')$ en fonction $E' - E''$ pour deux couples (e, Γ) . On observe que les points s'accroissent autour d'une ligne passant par l'origine, formant un nuage de points assez dense, allongé, mais avec une largeur transverse non-nulle. Comme nous le savions déjà, le bilan détaillé n'est donc pas respecté, mais la présence d'une droite au milieu de ce nuage de points suggère l'interprétation suivante : le système vérifierait une version "bruitée" du bilan détaillé. Même si nous n'avons pas de justification théorique à son interprétation, nous proposons de mesurer la pente de la meilleure interpolation linéaire afin d'en déduire une température kT_{inj} . En mesurant kT_{inj} pour différentes valeurs de e , nous obtenons la relation empirique suivante :

$$kT_{\text{inj}} = (0.50 \pm 0.02) \frac{E_0}{(1 - e)}. \quad (2.47)$$



(a) $g(E'', E')$ en fonction de $(E'' - E')$ pour $(e = 0.85, \Gamma = 4, \text{rouge})$ et $(e = 0.975, \Gamma = 5, \text{bleu})$.

(b) kT_{inj}/E_0 en fonction de $1/(1 - e)$. Ligne rouge : $kT_{\text{inj}} = 0.5 E_0/(1 - e)$.

Figure 2.26 – (a) Fonction $g(E'', E')$ en fonction de $(E'' - E')/E_0$ [rouge : $e = 0.85, \Gamma = 4$, bleu : $e = 0.975, \Gamma = 5$]. (b) Température kT_{inj}/E_0 en fonction de $1/(1 - e)$ pour plusieurs couples (e, Γ) ($\Gamma \in [1.34; 5]$ et $e \in [0.8; 0.99]$).

De façon surprenante, nous obtenons une température kT_{inj} inférieure à kT , cette dernière caractérisant les distributions de vitesses, hauteurs et énergies de la bille (Sec. 2.3.4). Même si nous n'avons pas d'explication à ce résultat concernant la température liée à l'injection, nous

proposons quelques pistes pour expliquer pourquoi cette température mesurée à partir d'un bilan détaillé approximatif ("flou") peut être très différente de la température réelle de l'injection. Considérons un réservoir hors-équilibre tel que, s'il est mis en contact avec un système, ce dernier s'équilibre à la température T_0 . En l'absence de bilan détaillé, il existe un flux non nul entre les énergies E et E' :

$$J(E, E') = \mathcal{P}(E \rightarrow E') - \mathcal{P}(E' \rightarrow E).$$

Les probabilités $\mathcal{P}(E \rightarrow E')$ vérifient

$$\mathcal{P}(E \rightarrow E') = \mathcal{T}(E \rightarrow E') C \exp(-E/kT_0)$$

où $C \exp(-E/kT_0) = P(E)$ est la distribution de probabilité des énergies. On obtient alors facilement la relation suivante :

$$g(E, E') = -\ln \frac{\mathcal{T}(E \rightarrow E')}{\mathcal{T}(E' \rightarrow E)} = \frac{E' - E}{kT_0} - \ln \left[1 + \frac{J(E, E') \exp(E'/kT_0)}{C \mathcal{T}(E' \rightarrow E)} \right]. \quad (2.48)$$

Supposons maintenant que le nuage de points des $g(E, E')$ soit suffisamment proche d'une ligne de pente $1/kT_{\text{inj}}$. La température T_{eff} est obtenue en calculant une moyenne pondérée du nuage de points :

$$\frac{1}{kT_{\text{inj}}} = \left\langle \frac{g(E, E')}{E' - E} \right\rangle = \frac{1}{kT_0} - \left\langle \frac{1}{E' - E} \ln \left(1 + \frac{J(E, E') \exp(E'/kT_0)}{C \mathcal{T}(E' \rightarrow E)} \right) \right\rangle. \quad (2.49)$$

On voit immédiatement que la température T_{inj} est donc *a priori* différente de T_0 . Le terme correctif est relativement complexe et il est difficile de prédire son signe. D'après cette équation, il est donc tout à fait possible que le réservoir d'injection ait une température T_0 égale à celle à laquelle la bille s'équilibre, mais que la température T_{inj} , mesurée via $g(E, E')$, soit inférieure à T_0 . Il est important de noter que tout ceci est très spéculatif, et qu'il ne s'agit que d'une tentative de conciliation de nos différents résultats. Notons également que la présence de la dissipation rend la situation encore plus complexe.

2.5.4 Relation de Fluctuation - Théorème de Gallavotti-Cohen

Comme évoqué dans l'introduction générale de cette thèse (Sec. 1.4.2), le taux de création d'entropie ne peut se mesurer directement dans un système comme le notre. En revanche, on peut considérer le travail $w(t)$ injecté dans le système pour exprimer la Relation de Fluctuation. Rappelons que la RF n'est *a priori* pas valide ici car le travail injecté est perdu en chaleur, il ne peut pas y avoir micro-réversibilité. Malgré tout, on souhaite vérifier si cette relation peut décrire correctement notre système, et le cas échéant l'utiliser pour définir une température effective.

Nous introduisons donc la puissance moyenne injectée sur n collisions successives :

$$\dot{w}_n(i) = \frac{\sum_{k=i}^{i+n} E_{\text{inj}}(k)}{(t_{i+n} - t_i)}, \quad (2.50)$$

où $E_{\text{inj}}(k)$ est l'énergie injectée au k -ième choc, avec la définition donnée Section 2.5.1. La RF

utilise généralement la notion de moyenne temporelle. Ici, étant donné que nous avons privilégié l'approche collision après collision, nous considérons un nombre donné $n + 1$ de collisions successives au lieu de considérer une fenêtre temporelle de taille donnée. Le théorème de fluctuation établit plusieurs propriétés de la densité de probabilité des événements $\dot{w}_n(i)$. Pour les valeurs suffisamment grandes de n , il établit l'existence d'une fonction f telle que $P(\dot{w}_n) = \exp[-n\tau f(\dot{w}_n)]$. La relation de fluctuation est valable lorsque la fonction d'asymétrie $\delta(\dot{w}_n) \equiv f(-\dot{w}_n) - f(\dot{w}_n)$ vérifie :

$$\delta(\dot{w}_n) \equiv \frac{1}{n\tau} \ln \left[\frac{P(\dot{w}_n)}{P(-\dot{w}_n)} \right] = \beta_{\text{GC}} \dot{w}_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

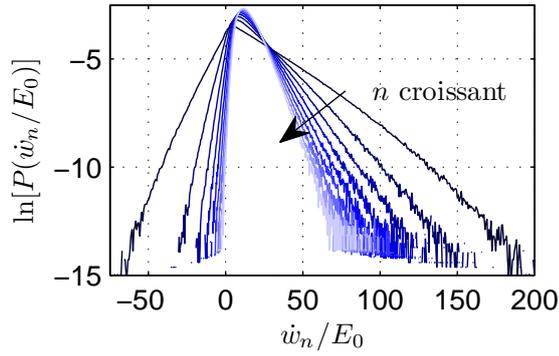
On peut alors définir une température effective associée à la RF :

$$kT_{\text{GC}} \equiv \frac{1}{\beta_{\text{GC}}}. \quad (2.52)$$

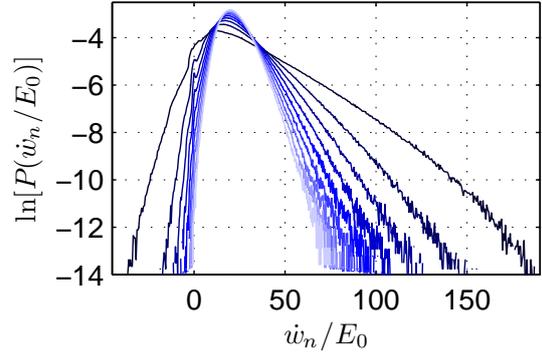
Il est à noter qu'il n'est pas possible d'atteindre réellement la limite $n \rightarrow \infty$ puisque nous avons des statistiques de taille finie. Pour chaque groupe de données associées à un couple (e, Γ) , il est nécessaire de moyennner sur au moins $5n_c$ collisions successives, où n_c est le nombre défini dans la Section 2.3.3 (nombre de collisions typique nécessaire au système pour qu'il n'y ait plus corrélation). D'autre part, il n'est pas possible de moyennner sur trop de collisions successives, puisque la largeur de la distribution $P(\dot{w}_n)$ décroît avec n . Or, il faut pouvoir mesurer la fonction d'asymétrie sur une plage suffisamment grande pour juger de sa linéarité : $\dot{w}_n \in [0; 5 \langle E_{\text{inj}} \rangle]$. Il est important de noter que plus nous aurons de statistiques, plus nous pourrons moyennner pour des valeurs de n grandes. Puisque nous disposons d'une taille mémoire et d'un temps finis, nous avons utilisé depuis le début de cette étude des groupes de données de $5 \cdot 10^6$ collisions, et nous nous y tiendrons. En suivant ces critères, nous avons été confrontés à différents problèmes. Tout d'abord, pour $e < 0.975$ et $\Gamma = 1.34$, la trajectoire de la bille est partiellement périodique. Les corrélations sont donc beaucoup trop importantes. D'autre part, pour $e = 0.975$ et 0.99 , nous avons respectivement $n_c = 20$ et 45 . Or, lorsque nous moyennons sur plus de 80 collisions successives, nous n'avons plus de statistiques pour $\dot{w}_n > 5 \langle E_{\text{inj}} \rangle$. Nous nous restreignons donc à tester le théorème pour $e \leq 0.95$ et $\Gamma \geq 1.7$.

Nous présentons sur la figure 2.27 des exemples de distributions $P(\dot{w}_n)$ et les fonctions d'asymétrie qui leurs sont associées $\delta(\dot{w}_n)$. On voit que la relation de fluctuation est globalement satisfaite [Eq. (2.51)], puisque $\delta(\dot{w}_n)$ dépend quasi-linéairement de \dot{w}_n lorsque n est suffisamment grand. On voit que pour e assez proche de 1 (ici $e = 0.90$), la fonction d'asymétrie est clairement non-linéaire pour $n < 30$. Conformément à nos objectifs, il est possible de déterminer la valeur de β_{GC} en respectant les critères que nous nous sommes fixés, sans pour autant avoir "prouvé" la linéarité de $\delta(\dot{w}_n)$.

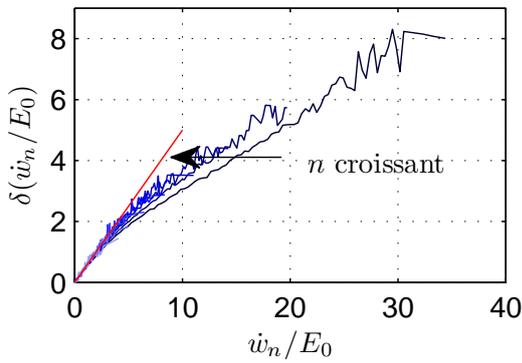
Nous présentons donc figure 2.28, les valeurs des pentes des ajustements linéaires des fonctions d'asymétrie successives pour n croissant. L'ajustement est fait sur les trois premiers quarts de la zone où la fonction d'asymétrie est définie, afin d'éviter tout effet de manque de statistique. Pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$, β_n tend vers une constante pour $n \simeq 45$, alors que pour $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$, β_n est quasi-constant pour $n \in [25; 40]$ avant de chuter violemment à cause du manque de statistique. On peut alors obtenir une valeur de la température kT_{GC} , définie comme l'inverse



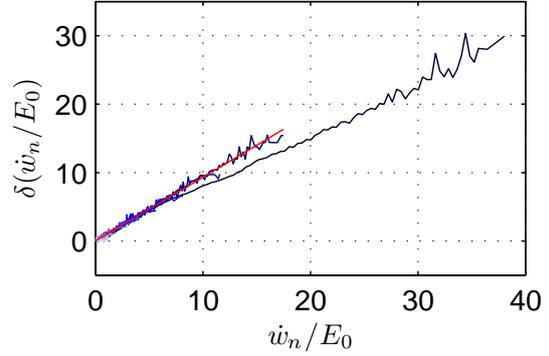
(a) $\ln(P(\dot{w}_n/E_0))$ pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$.



(b) $\ln(P(\dot{w}_n/E_0))$ pour $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$.

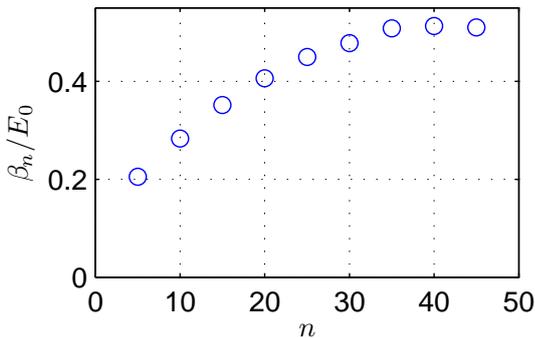


(c) Fonction d'asymétrie $\delta(\dot{w}_n/E_0)$ pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$.

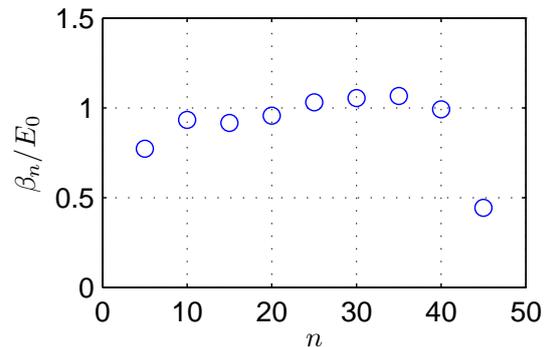


(d) Fonction d'asymétrie $\delta(\dot{w}_n/E_0)$ pour $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$.

Figure 2.27 – Distributions de probabilité $\ln[P(\dot{w}_n/E_0)]$ et fonctions d'asymétrie $\delta(\dot{w}_n/E_0)$ pour $n \in [5; 45]$ (du plus foncé au plus clair). La ligne rouge représente l'ajustement linéaire le plus approprié pour déterminer β_{GC} [Eq. 2.51]. Pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$, $\langle E_{inj} \rangle = 1.72 E_0$ et pour $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$, $\langle E_{inj} \rangle = 1.45 E_0$.



(a) β_n/E_0 en fonction de n pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$.



(b) β_n/E_0 en fonction de n pour $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$.

Figure 2.28 – Pente β_n/E_0 en fonction de n obtenue à partir des fonctions (Fig. 2.27c et Fig. 2.27d), pour $(e = 0.90, \Gamma = 4.00)$ et $(e = 0.80, \Gamma = 3.44)$.

de la pente limite [Eq. (2.52)].

En reproduisant ce protocole pour d'autres valeurs de (e, Γ) , nous obtenons la dépendance

de kT_{GC} avec $1/(1-e)$, tracée figure 2.29. On obtient, pour $e \in [0.80; 0.95]$,

$$kT_{GC} = (0.20 \pm 0.02) \frac{E_0}{(1-e)}. \quad (2.53)$$

Cette température est proportionnelle à $E_0/(1-e)$, comme les précédentes : kT , kT_σ et kT_{inj} . En revanche, elle est nettement plus faible que les précédentes malgré les barres d'erreurs. Notons que cette méthode présente l'inconvénient de beaucoup dépendre de la taille des statistiques traitées. Pour autant, il apparaît clairement que ceci n'est pas la raison pour laquelle le préfacteur obtenu ici (0.2) est si éloigné de celui obtenu équation (2.30). De façon qualitative, étant donné la tendance dans l'évolution des fonctions d'asymétrie δ avec n (Fig. 2.27), davantage de statistiques mèneraient à une pente β_{GC} plus élevée et donc à une température kT_{GC} plus faible. De façon quantitative, étant donnés les critères que nous nous sommes fixés, le préfacteur pourrait être compris dans la gamme $[0.1; 0.3]$, mais en aucun cas proche de 1. Notons également que si, sous certaines conditions, les distributions $P(\dot{w}_n/E_0)$ sont gaussiennes, il est possible de déterminer β_{GC} simplement comme étant le ratio de la variance sur la moyenne. Cependant, dans notre cas, il est impossible d'atteindre des distributions gaussiennes tout en respectant le critère que nous nous sommes fixé : $\dot{w}_n \in [0; 5 \langle E_{inj} \rangle]$.

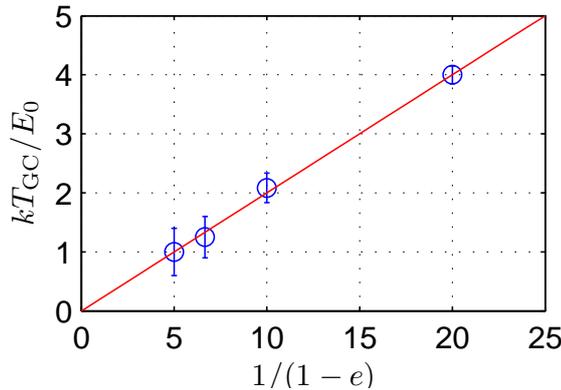


Figure 2.29 – Température kT_{GC}/E_0 en fonction de $1/(1-e)$ obtenues pour plusieurs valeurs de (e, Γ) . La ligne rouge représente l'ajustement linéaire $kT_{GC} = 0.2 E_0/(1-e)$ ($\Gamma \in [2.35; 5]$ et $e \in [0.80; 0.95]$).

En conclusion, il est important de noter que, si nous avons voulu extraire une valeur de température par la méthode du théorème de fluctuation, nous n'avons en aucun cas prouvé sa validité. Nous mesurons une température kT_{GC} dont le préfacteur 0.2, même s'il est mesuré avec une grande barre d'erreur, qui est très éloigné de celui obtenu pour kT . On peut expliquer ce résultat de plusieurs manières. Tout d'abord, rappelons que la RF a été énoncée pour le taux de création d'entropie. N'ayant pas la possibilité de mesurer cette quantité, nous l'avons assimilée à l'énergie injectée par la plateau à la bille. Nous avons également modifié la définition des incréments d'énergie injectée et dissipée, afin qu'elle satisfasse au moins la propriété de réversibilité faible. Dès lors, il semble que nous soyons relativement éloignés du cadre initial dans lequel la relation a été démontrée. Enfin, nous avons été confronté au même problème que beaucoup d'expérimentateurs qui testent la validité de cette relation : le manque de statistique

et la faible plage de valeurs d'énergie injectée sur laquelle la linéarité de la fonction d'asymétrie est testée. Ceci a déjà été évoqué dans [Falcón et Falcon - 2009] comme raison de l'apparente validité de la RF.

2.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donc étudié les caractéristiques des rebonds d'une bille sur un plateau en mouvement. Notre dispositif expérimental a été conçu afin de pouvoir imposer un mouvement apériodique au plateau et ainsi réduire au maximum les corrélations entre les mouvements de la bille et du plateau. Dans cette configuration et lorsque le mouvement de la bille est chaotique, nous avons pu caractériser le régime stationnaire hors-équilibre dans lequel elle se trouve, en mesurant par exemple son énergie moyenne ou la distribution de probabilité de sa vitesse. Nous avons montré que les distributions de probabilité de la hauteur, de la vitesse ou de l'énergie de la bille sont très proches de distributions d'équilibre, avec une énergie caractéristique kT qui ne dépend que des paramètres d'excitation du plateau et de la dissipation du contact bille-plateau.

Une étude plus poussée nous a permis de voir que, derrière cette apparence de simple équilibre, se cache en réalité une dynamique complexe hors-équilibre au niveau des échanges d'énergie. De fait, une simple description du système comme une réserve à température T n'est pas possible, puisqu'une partie des transitions observées ne sont pas réversibles. Pour autant, nous avons montré qu'une redéfinition de la contribution dissipative permet d'obtenir la réversibilité faible, *i.e.* l'existence du chemin inverse pour une transition donnée. Dès lors, il a été possible d'utiliser tous les outils et tests de la physique statistique hors-équilibre (création d'entropie, test du bilan détaillé, théorème de fluctuation) pour extraire d'autres échelles de température liées au système. Nous avons donc vu que même le plus simple des systèmes macroscopiques entretenu ne peut pas être décrit par des concepts de la physique à l'équilibre, malgré la très forte ressemblance des distributions avec celles à l'équilibre. Notons tout de même que toutes les échelles d'énergie que nous avons obtenues sont proportionnelles à $m(A\omega)^2/(1-e)$, où $m(A\omega)^2$ est la seule énergie caractéristique du système et $(1-e)$ l'écart à l'élasticité totale du contact bille-plateau. Pour autant, elles ne sont pas strictement égales, ce qui n'est pas surprenant puisqu'elles caractérisent des processus physiques différents.

En conclusion, il convient de redire que le fait que les concepts de la physique à l'équilibre ne s'appliquent pas à notre système hors-équilibre n'est pas une surprise. En revanche, il est surprenant qu'ils fonctionnent au moins partiellement, et que surtout, ils nous permettent d'obtenir une trame et des tests raisonnables pour étudier notre système. En effet, les distributions de probabilité de la hauteur, de la vitesse et de l'énergie de la bille sont celles à l'équilibre, et une version "bruitée" (ou "floue") du bilan détaillé est vérifiée lorsqu'on définit de façon adéquate les incréments d'énergie injectée et dissipée. Le fait que les températures obtenues ne soient pas toutes égales est sûrement la conséquence de l'utilisation de concepts de la physique proche de l'équilibre à notre système profondément hors équilibre.

La suite naturelle de ce travail serait de tenter d'identifier un cadre théorique adéquat qui nous permette de décrire de façon cohérente ce système en utilisant des concepts de la physique hors équilibre. En particulier, il serait intéressant de voir s'il est possible de réconcilier les différentes mesures de températures que nous avons faites en les interprétant différemment, à la lumière de modèles théoriques qui décrivent correctement les mécanismes mis en jeu dans

notre système par exemple. Suite à cette étude expérimentale et numérique, nous sollicitons donc l'aide de théoriciens, afin qu'ils puissent nous aider à comprendre la physique contenue dans les différentes quantités que nous avons mesurées et confirmer leurs statuts de "températures".

CHAPITRE 3

Étude expérimentale d'un gaz granulaire peu dense

Sommaire

3.1	Introduction	72
3.2	Description du problème	73
3.2.1	Le dispositif expérimental	73
3.2.2	Caractérisation du gaz	76
3.3	Mesure de la "température" du gaz granulaire	81
3.3.1	Introduction	81
3.3.2	Théorème de Fluctuation-Dissipation	82
3.3.3	Relation de Fluctuation	86
3.3.4	Résultats	89
3.4	Étude d'un gaz raréfié à température constante	91
3.4.1	Protocole expérimental	91
3.4.2	Mesures du temps de corrélation	91
3.4.3	Discussion et conclusion	95
3.5	Étude de deux gaz couplés électro-mécaniquement	97
3.5.1	Introduction	97
3.5.2	Protocole expérimental	97
3.5.3	Résultats	99
3.5.4	Conclusion	104
3.6	Conclusion et perspectives	106

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un autre système dissipatif entretenu : un gaz granulaire. En pratique, il s'agit d'un ensemble de petites billes (typiquement millimétriques) qui sont placées dans un récipient oscillant verticalement. Ainsi, lors des collisions avec les parois du récipient, les billes échangent une certaine quantité d'énergie, qui va ensuite être partagée au sein du système par les collisions successives entre billes. Afin d'étudier ce gaz, nous avons développé un outils basé sur le principe du mouvement brownien à une dimension d'une grosse particule plongée dans le gaz granulaire. Il s'agit ici d'une pale placée verticalement, qui peut tourner sur son axe suite aux collisions avec les billes du gaz. On effectue alors une mesure passive, en utilisant un capteur électromécanique qui délivre un signal proportionnel à la vitesse angulaire de la pale. La mesure peut également être active, en utilisant la réversibilité du capteur électromécanique : celui-ci peut imposer un couple au gaz granulaire, et ainsi tester sa réponse à une sollicitation.

Dans cette étude on ne s'intéresse pas au gaz granulaire lui-même : sa dynamique interne, son profil de densité, etc. En effet, nous étudions le système en tant que réservoir d'énergie, *i.e.* un système dont l'énergie totale varie peu si on ajoute ou retire une petite quantité d'énergie. Un des paramètres de ce système est l'énergie cinétique moyenne des billes, qui s'apparente à une température dans le cadre de la cinétique des gaz. Un autre paramètre est la dimension de l'espace des phases de ce réservoir : bien que très grand, il n'est pas comparable aux systèmes étudiés en thermodynamique statistique "classique", qui sont typiquement composés de \mathcal{N}_A particules. Notons qu'il est possible de varier la dimension de l'espace des phases accessible en variant la densité de billes dans le système. Le gaz granulaire est donc un bon système pour étudier les effets de taille finie sur les fluctuations.

Grâce à ce système expérimental original, nous sommes en mesure de tester plusieurs théorèmes de la physique des systèmes hors-équilibre : le Théorème de Fluctuation-Dissipation (TFD) en mesurant la réponse du système à une excitation, la Relation de Fluctuation (RF) en mesurant l'irréversibilité du processus d'échange de travail avec le gaz. Nous proposons également un modèle simple pour décrire la dynamique de la pale. Enfin, nous étudions l'influence de la densité du gaz sur la dynamique de la pale dans deux configurations différentes : un gaz maintenu à température constante, et un gaz couplé à un gaz de référence.

3.2 Description du problème

3.2.1 Le dispositif expérimental

Le gaz granulaire

Nous nous proposons d'étudier un gaz granulaire constitué de N billes d'acier de diamètre 3 mm et de masse 0.1 g (Fig. 3.1). Ces billes sont placées dans une cuve cylindrique en Dural de diamètre 5 cm et de hauteur 6 cm. Le gaz granulaire est obtenu en vibrant verticalement la cuve qui contient les billes, à l'aide d'un vibreur électromagnétique (Bruel & Kjaer 4809). Pour cela, on utilise un signal sinusoïdal issu d'un Générateur Basse Fréquence (GBF, Agilent 3352X), envoyé vers un amplificateur de puissance (Kepco, BOP50-4M) avant d'alimenter le vibreur. Ainsi, le mouvement de la cuve suit $z(t) = A \cos(2\pi ft)$. Nous avons fixé un accéléromètre (Dytran, 3055B1) au dispositif afin de mesurer l'accélération verticale maximale que subit la cuve, $a \equiv A(2\pi f)^2$. Dans notre étude, nous travaillons à la fréquence $f = 40$ Hz : l'influence de la valeur choisie pour f sera uniquement discutée dans la Section B.2. Pour que les billes soient maintenues en mouvement et que l'on puisse effectivement parler de "gaz", il est nécessaire d'agiter suffisamment la cuve qui les contient. L'amplitude du signal délivré par le générateur est donc choisie, de sorte que l'accélération de la cuve soit comprise entre 1 et 6 g, soit une amplitude de vibration comprise entre 0.15 et 1 mm. Il est important de noter que le fond de la cuve contenant les billes est conique (angle d'ouverture de 160°), pour éviter que les billes aient un mouvement uniquement vertical.

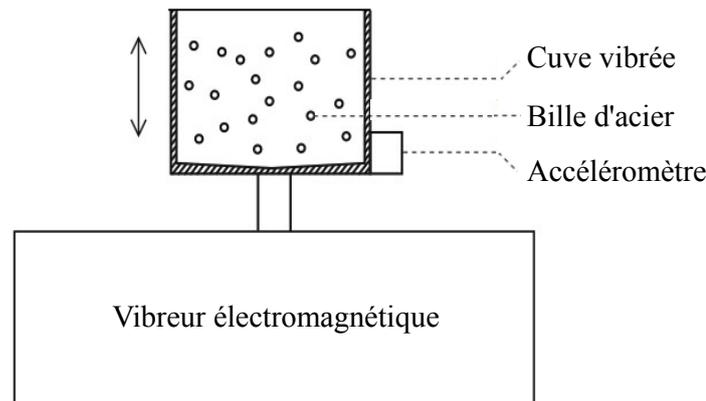


Figure 3.1 – Schéma du dispositif expérimental : le gaz granulaire.

Dans notre étude, nous avons été amenés à varier le nombre N de billes utilisées : il est compris entre 20 et 400. Du fait de la gravité, la densité du gaz n'est pas la même dans toute la hauteur de la cuve (distribution de Boltzmann [Loeb - 1961]). Notons également que selon la valeur de l'amplitude A de l'agitation, les billes n'occupent pas nécessairement la totalité du volume de la cuve. Pour les agitations les plus fortes, les billes peuvent entrer en collision avec

la partie supérieure de la cuve, alors que pour les agitations les plus faibles, elles se répartissent sur quelques centimètres de hauteur. On peut tout de même donner un ordre de grandeur de la densité du gaz, en considérant que le gaz n'occupe que les 3 premiers centimètres de la hauteur, ce qui correspond à la situation moyenne étudiée ici. La densité moyenne du gaz $\rho = N/(\pi R^2 h)$ conduit à une fraction volumique comprise entre 0.3% (20 billes) et 7% (400 billes), soit une distance entre particules moyenne comprise entre 3 mm et la taille typique de la cuve, 5 cm (le calcul pour $N = 20$ conduit à 10 cm). On parlera donc de gaz très peu dense à peu dense. Grâce à la théorie cinétique, on obtient un ordre de grandeur pour le libre parcours moyen $\lambda = 1/(\rho\pi r^2)$, où r est le rayon d'une bille. On obtient une estimation basse de $\lambda \sim 12$ mm, soit de l'ordre de la taille L de cuve. Pour estimer si un gaz est dense ou non, on peut définir le nombre de Knudsen par $Kn \equiv \lambda/L$, souvent utilisé pour les systèmes microscopiques [Savard *et al.* - 2009] ou macroscopiques [Boudet et Kellay - 2010]. On voit ici que $Kn \sim 1$ ce qui confirme le caractère raréfié du gaz. Il est important de noter qu'il ne s'agit ici que d'estimations grossières puisque les caractéristiques du gaz dépendent beaucoup de l'agitation qu'on lui impose.

Ce gaz granulaire constitue donc un système dissipatif (les collisions des billes entre elles et avec les parois de la cuve sont inélastiques), et entretenu (on injecte en continu de l'énergie au système en l'agitant pour maintenir les billes en mouvement). Il est donc maintenu dans un état stationnaire hors-équilibre.

Comment sonder ce gaz ?

Afin de sonder les propriétés du gaz, nous y plongeons une pale carrée en acier de 2 cm de côté et de 0.25 mm d'épaisseur. Cette pale est reliée par un axe vertical au rotor d'un Moteur à Courant Continu (MCC), fixé juste au dessus de la cuve contenant les billes (Fig. 3.2). Le moteur utilisé (Maxon RE 10 118386) est petit (1 cm de diamètre typiquement), de puissance nominale 0.75 W, construit avec un rotor sans fer, pour en minimiser l'inertie. Les balais sont en métaux précieux pour améliorer le contact électrique avec le collecteur et réduire les frottements solides. Il est important de noter que la pièce qui sert à empêcher les billes de s'échapper du dispositif, sur laquelle est fixée le MCC, est fixe dans le référentiel du laboratoire. Le système {moteur + pale} (en beige sur la figure 3.2) n'est donc pas vibré, contrairement à la cuve contenant les billes.

Nous utilisons un Moteur à Courant Continu afin de tirer profit de sa réversibilité électromécanique. En effet, il peut être utilisé comme moteur, mais aussi comme générateur. Lorsque les billes entrent en collision avec la pale, celle-ci va se mettre à tourner, et le MCC (générateur) délivre une tension e proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ de la pale. À l'inverse, lorsqu'on impose un courant I au MCC (moteur), le rotor subit un couple Γ proportionnel à ce courant et au champ magnétique inducteur (aimant permanent). Les quantités électriques sont donc liées aux quantités mécaniques selon :

$$e = \alpha \dot{\theta}, \quad (3.1)$$

$$\Gamma = \alpha I, \quad (3.2)$$

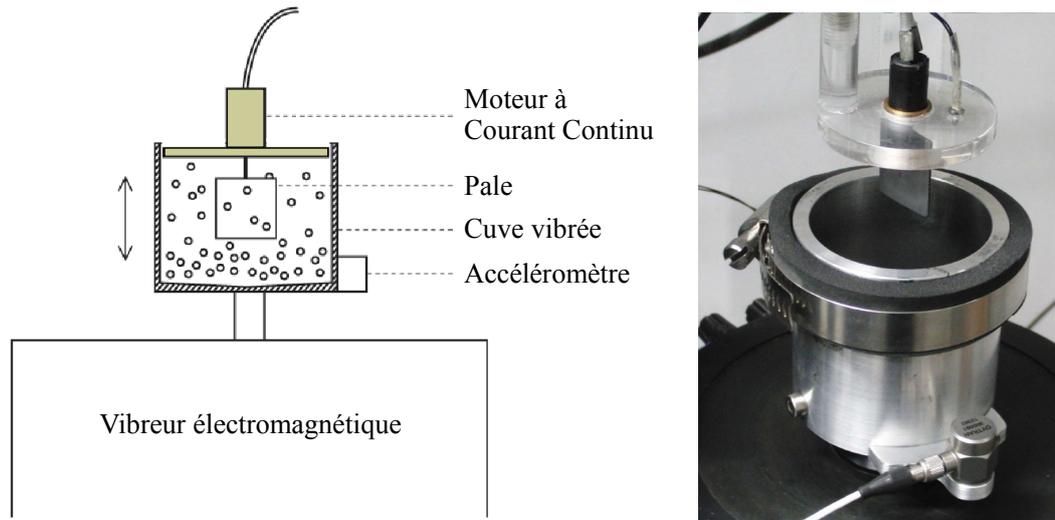


Figure 3.2 – Schéma et photo du dispositif expérimental : le gaz granulaire et la pale pour le sonder. La partie beige est fixe dans le référentiel du laboratoire.

où le coefficient $\alpha = 4.27 \cdot 10^{-3} \text{ V s rad}^{-1}$, identique dans les deux relations, dépend directement des caractéristiques physiques du moteur (nombre de paires de pôles, nombre de bobinages et nombre de spires par bobinage, champ magnétique de l'aimant permanent, caractéristiques géométriques). Dans toute la suite de l'étude, on parlera donc abusivement de tension pour caractériser la vitesse de la pale et inversement, les deux quantités étant proportionnelles (idem pour courant et couple). À cause du contact imparfait entre les balais et le collecteur, le moteur possède une résistance interne $r \simeq 22 \Omega$, qui peut varier en fonction de la température et de l'âge du moteur. Dans tous les cas, cette résistance est mesurée à l'équilibre thermique lorsque le gaz est présent, et prise en compte dans le traitement des données. Nous avons également vérifié qu'aux basses fréquences où l'on travaille, l'inductance peut être négligée.

Le MCC peut donc être modélisé électriquement par une force électro-motrice (f_{em}) e en série avec une résistance r . Afin d'imposer un courant I , nous utilisons un GBF en série avec une résistance R élevée devant la résistance interne du MCC (typiquement de l'ordre du $k\Omega$), comme illustré sur la figure 3.3. Il est intéressant de noter la simplicité du montage : étant données les tensions en jeu, l'acquisition se fait sans aucune pré-amplification du signal, directement sur une carte synchrone avec son filtre intégré. On mesure alors les tensions u_0 et u_1 , desquelles on déduit

$$I = (u_1 - u_0)/R \quad (3.3)$$

$$e = u_1 - rI = u_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right) + u_0 \frac{r}{R}. \quad (3.4)$$

En pratique, on fait l'acquisition des tensions u_0 et u_1 en utilisant le logiciel LabViewTM, couplé à une carte d'acquisition (NI PXIe-4462). L'acquisition se fait à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1024 \text{ Hz}$. Les données sont ensuite traitées et analysées sur le logiciel Matlab[©].

La pale est centrée dans la cuve cylindrique, afin qu'il n'existe aucun biais pour qu'elle tourne préférentiellement dans un sens ou dans un autre. Cela se vérifie expérimentalement par

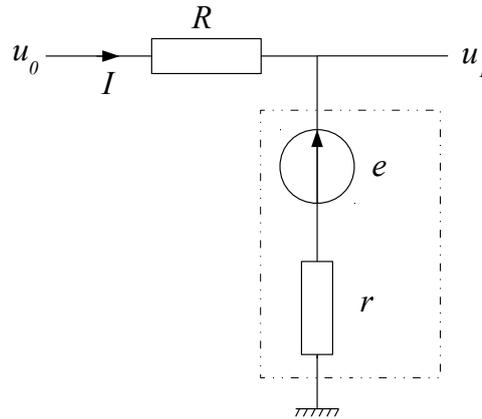


Figure 3.3 – Schéma du circuit électrique. Le rectangle pointillé représente le système {moteur + pale}.

le fait que la vitesse moyenne de la pale, $\langle \dot{\theta} \rangle$, est nulle ($\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne temporelle), ou plus précisément négligeable devant son écart type : $\langle \dot{\theta} \rangle \ll \sqrt{\langle \dot{\theta}^2 \rangle}$. D'autre part, la pale est placée à une hauteur arbitraire mais identique dans toutes les expériences rapportées ici. Le gaz étant stratifié, les billes n'ont pas la même agitation selon la hauteur à laquelle on se trouve. En conséquence, les collisions avec la pale ne sont pas toutes aussi énergétiques. Nous avons choisi de fixer une distance de 13.45 mm entre le bas de la pale et le fond de la cuve, lorsque cette dernière est au repos. Ce choix est totalement arbitraire : il nous permet d'avoir une pale en mouvement dans la gamme des vibrations accessibles avec notre dispositif, puisque le gaz occupe typiquement entre 1 et 3 cm de hauteur dans la cuve. Il permet aussi d'éviter tout contact entre la pale et le fond de la cuve : la pale étant à hauteur fixée et la cuve étant vibrée verticalement, il existe un risque potentiel de détérioration de la pale. La taille de la pale a été choisie de sorte qu'elle puisse sonder effectivement le gaz. Une pale trop petite ne subirait que très peu de collisions et il serait difficile d'avoir des statistiques suffisantes. À l'inverse, une pale trop grande empêcherait le gaz de s'homogénéiser.

Notre dispositif est relativement proche de celui utilisé dans d'autres études dans un milieu granulaire dense [D'anna *et al.* - 2003] ou plus récemment dans un gaz granulaire [Gnoli *et al.* - 2014]. Pour autant, il permet une nouvelle approche du système puisque nous avons la possibilité de travailler à couple imposé et de mesurer la vitesse de la pale en même temps via un unique système, le MCC. Grâce à cela, aucun étalonnage n'est nécessaire ce qui représente un très grand avantage.

3.2.2 Caractérisation du gaz

État d'agitation du gaz

Nous utilisons le système {moteur + pale} afin de caractériser l'agitation du gaz. En effet, plus les billes vont être agitées, plus leurs vitesses horizontales seront importantes et plus les fluctuations de vitesse de la pale seront grandes. On présente figure 3.4a un exemple typique de

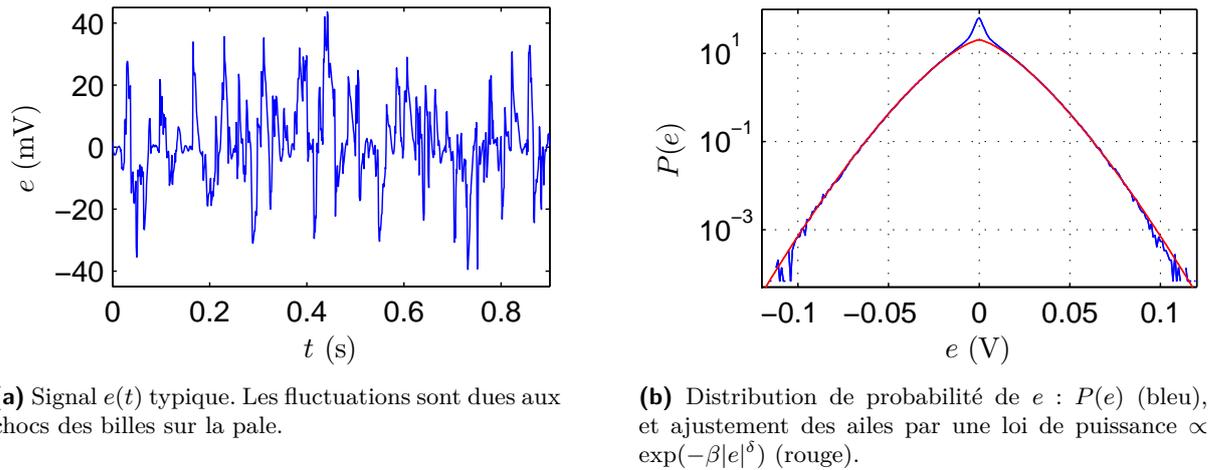


Figure 3.4 – Caractéristiques de la fem $e(t)$ pour un gaz constitué de $N = 374$ billes confiné dans une cuve soumise à une accélération $a = 2.7$ g.

tension $e(t)$ (ou de façon équivalente $\dot{\theta}$). On peut définir une "température granulaire" par simple analogie avec la théorie cinétique, comme étant la variance des fluctuations de vitesse [Goldhirsch - 2003]. De la même façon, on peut définir la "température" de la pale (son énergie cinétique moyenne), lorsqu'elle est plongée dans le réservoir d'énergie que constitue notre gaz granulaire.

La température de la pale est donc définie par :

$$E_k \equiv \frac{1}{2} J \langle \dot{\theta}^2 \rangle, \quad (3.5)$$

où J est le moment d'inertie total du système en rotation {rotor + pale} ($J = 3.33 \cdot 10^{-8}$ kg m²). Concrètement, elle est calculée en mesurant la variance de la distribution des tensions $e(t)$: $E_k \equiv \frac{1}{2\alpha^2} J \langle e^2 \rangle$. Puisque notre système a un unique degré de liberté, on peut définir une échelle d'énergie, ou une température kT définie par $E_k = \frac{1}{2} kT$. À aucun moment nous ne parlerons de température en kelvins puisque la constante de Boltzmann n'a pas de sens pour notre système macroscopique.

Pour caractériser plus précisément l'état d'agitation dans lequel se trouve le gaz granulaire, on peut s'intéresser à la statistique des vitesses de la pale. On présente donc figure 3.4b la distribution de probabilité $P(e)$. Afin que le lecteur puisse se faire une idée, nous donnons un ordre de grandeur pour l'équivalence entre e et $\dot{\theta}$: $e = 0.1$ V correspond à $\dot{\theta} = 34.5$ rad s⁻¹, soit environ 20 cm s⁻¹ en bout de pale. La valeur moyenne de la distribution est nulle, ce qui confirme qu'aucun sens de rotation n'est privilégié. Puisque la distribution est symétrique, la pale est bien dans l'axe de la cuve cylindrique. Les ailes de la distributions décroissent moins vite qu'une gaussienne : leur ajustement par une loi de puissance $\propto \exp(-\beta|e|^\mu)$, conduit aux valeurs $\nu \simeq 265$ et $\mu \simeq 1.4$. On remarque la présence d'un "pic" autour de $e = 0$: cela correspond à une forte probabilité pour la pale de tourner à très faible vitesse. Cette sur-représentation est due à la présence de frottements solides sur les paliers ou entre les balais et le collecteur du moteur, voire de frottements fluides (la pale tourne dans de l'air, dans un espace confiné). Nous discuterons beaucoup plus en détail la forme et les caractéristiques de cette distribution dans

les sections suivantes.

Dynamique du gaz

Afin d'obtenir des informations supplémentaires sur la dynamique temporelle de la pale, il est possible de calculer l'auto-corrélation de la vitesse $\dot{\theta}$ de la pale, ou de façon équivalente de e :

$$\chi_e(t) = \frac{\langle e(t'+t)e(t') \rangle_{t'}}{\langle e^2(t') \rangle_{t'}}. \quad (3.6)$$

Nous présentons figure 3.5a l'évolution de $\chi_e(t)$ pour un gaz constitué de $N = 374$ billes confiné dans une cuve soumise à une accélération $a = 2.7$ g. On voit qu'elle est quasi-exponentielle ($\chi_e(t) \simeq \exp(-t/\tau_c)$), avec ici un temps caractéristique $\tau_c = 6.8$ ms. Ce comportement sera analysé à la lumière d'un modèle simple proposé ci-après.

On peut également étudier la densité spectrale de puissance de e (ou spectre de e), définie comme la Transformée de Fourier (TF) de la fem prise au carré : $S_e(f) \equiv |\text{TF}[e^2]|$, où $\text{TF}[\cdot]$ désigne la Transformée de Fourier. En vertu du théorème de Wiener-Khinchin, $S_e(f)$ se trouve aussi être la TF de la fonction d'auto-corrélation : $S_e(f) \equiv \text{TF}[\chi_e]$. $\chi_e(t)$ étant exponentielle, sa TF est donc une lorentzienne :

$$S_e(f) = \frac{S_0}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}. \quad (3.7)$$

On propose donc d'ajuster le spectre de puissance avec cette loi, comme présenté sur la figure 3.5b. On effectue ainsi des analyses distinctes du même signal, sur des quantités distinctes mais reliées. Un ajustement des données avec cette loi donne ici $S_0 = 5.8 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2 \text{ s}$ (valeur directement liée à la température effective de la pale) et $f_c = 26$ Hz. Notons que, par définition, le lien entre auto-corrélation et spectre ($S_e(f) \equiv \text{TF}[\chi]$) impose que $1/(2\pi\tau_c) = f_c$. On a ici $1/(2\pi\tau_c) = (24 \pm 1)$ Hz et $f_c = (26 \pm 1)$ Hz, ce qui montre que la modélisation exponentielle de χ_e et lorentzienne de S_e sont correctes mais ne capturent pas complètement les éléments qui déterminent la dynamique de la pale. Il est à noter que la chute brutale à 400 Hz est due à l'utilisation d'un filtre anti-repliement avant l'acquisition numérique du signal par la carte. Nous nous sommes limités à cette gamme de fréquence, car au delà de 500 Hz apparaissent des pics de résonance qui correspondent aux modes de vibrations de la pale (Fig. 3.5c).

Afin de pouvoir interpréter nos résultats dans un cadre théorique, nous proposons une modélisation qui décrit la dynamique du mouvement de la pale sous la forme :

$$J \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \gamma(\dot{\theta}) = \eta(t), \quad (3.8)$$

où $\dot{\theta}(t)$ est la vitesse angulaire de la pale et J le moment d'inertie introduit précédemment. Nous proposons une explication qualitative des différents termes présents dans cette equation. Le terme $J \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ correspond au terme inertiel, qui ne peut ici pas être négligé, contrairement à ce qui est souvent fait dans les études sur des systèmes microscopiques. Le terme $\gamma(\dot{\theta})$ représente la friction visqueuse due à l'effet moyenné des collisions avec les billes. En effet, si on impose de l'extérieur un mouvement à la pale, elle va subir un couple de frottement/trainée de la part

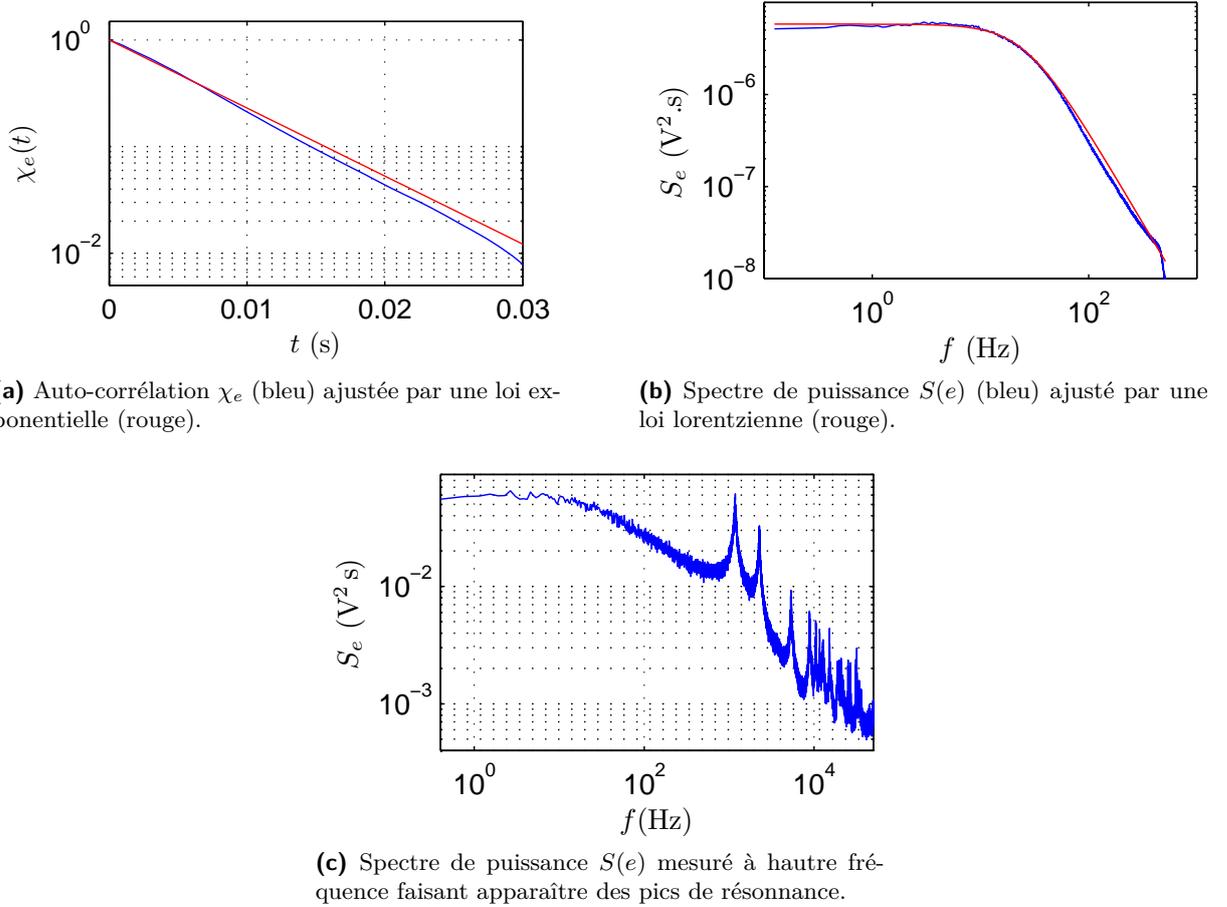


Figure 3.5 – Caractéristiques de la dynamique de la fem $e(t)$ pour un gaz constitué de $N = 374$ billes et confiné dans une cuve soumise à une accélération $a = 2.7$ g.

du gaz. Le terme $\eta(t)$ représente la force fluctuante à laquelle est soumise la pale du fait des collisions aléatoires avec les billes.

Ces résultats évoquent un cadre théorique connu : le mouvement brownien à une dimension d'un objet plongé dans un bain thermique. Dans notre situation expérimentale macroscopique, la pale constitue l'objet brownien, le gaz granulaire jouant le rôle d'un bain thermique. Afin de simplifier au maximum le problème et de nous approcher de la théorie du mouvement brownien, on peut faire plusieurs hypothèses qui rendent cette équation facile à traiter. Dans le cas idéal (développement à l'ordre un), la friction est linéaire *i.e.* le terme de trainée s'écrit $\gamma\dot{\theta}$. Le terme de forçage $\eta(t)$ couple le système {pale + MCC} au thermostat granulaire. Dans le contexte du mouvement brownien, la force aléatoire de l'équation de Langevin est un bruit blanc, qui se traduit dans le temps par : $\langle \eta(t+s)\eta(t) \rangle_t = 2D\gamma^2\delta(s)$, où $\delta(s)$ désigne une fonction de Dirac ($\delta = 0$ si $s \neq 0$, 1 sinon). D est le coefficient de diffusion de la pale. Pour la suite de l'étude, il est utile de normaliser l'amplitude de la force $\eta(t)$. On la notera donc $\eta(t) = \sqrt{2D}\gamma\xi(t)$.

Dans ces conditions, l'équation (3.8) est une équation de Langevin, $\dot{\theta}$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [Gardiner - 1985]. Ainsi, on peut extraire du spectre de $\dot{\theta}$ présenté figure 3.5b les valeurs des coefficients de trainée, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, et de diffusion, $D = 0.61 \text{ s}^{-1}$. Pour être dans le cadre théorique du mouvement brownien, il faut ajouter d'autres hypothèses sim-

plificatrices. Le bruit $\xi(t)$ est souvent considéré gaussien pour faciliter les calculs, même si cette condition n'est pas nécessaire [Hayakawa - 2005, Kanazawa *et al.* - 2015] : le théorème de la limite centrale suffit, si l'intégrale du bruit se fait sur un temps assez long devant le temps de corrélation du bruit. La particule brownienne doit être très grande et très massive comparée à celles qui constituent le bain thermique et le bain doit être à l'équilibre. Toutefois, elle ne doit pas être trop grande ou trop massive, car sinon, la force qu'elle subit qui résulte de la moyenne de tous les chocs sera nulle ou trop faible pour être visible. Le bain doit être assez dense pour que les échanges de quantité de mouvement entre la particule brownienne et les particules du bain soient stationnaires dans le temps. Cependant, il ne doit pas être trop dense pour que les collisions restent décorréélées (chaos moléculaire). La situation du mouvement brownien correspond donc à une échelle intermédiaire (mésoscopique), typiquement, des particules microniques dans l'eau. Nous essayons dans la suite de vérifier si le système macroscopique présenté ici peut réaliser le même compromis, à une échelle où les mesures sont techniquement plus faciles.

L'intégration de l'équation de Langevin conduit aux équations (3.6) et (3.7) que nous avons utilisées plus haut. Elles semblent rendre compte d'une partie des propriétés du système bien que nombre de conditions d'applicabilité ne sont pas satisfaites dans notre système expérimental. Pour autant, nous considérons l'équation de Langevin comme guide d'analyse de notre système.

3.3 Mesure de la "température" du gaz granulaire

3.3.1 Introduction

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier notre gaz granulaire, système dissipatif stationnaire, à l'aide des outils de la Physique Statistique Hors-Équilibre. Dans la section précédente, nous avons utilisé la pale plongée dans le gaz granulaire et reliée au MCC pour faire une mesure passive : la pale subit les chocs des billes et nous déduisons des fluctuations de vitesse de la pale des informations concernant le gaz granulaire. Notre objectif est ici d'utiliser le système {pale + MCC} pour sonder le gaz de manière active, *i.e.* en imposant un couple à la pale qui va transmettre de la quantité de mouvement aux billes. Il convient pour cela de n'appliquer qu'une perturbation, afin que le système reste proche de l'état stationnaire dans lequel il se trouve.

Poursuivant notre analogie avec le mouvement brownien, nous nous proposons tout d'abord d'utiliser le Théorème de Fluctuation-Dissipation (TFD) de manière heuristique pour définir une température effective du milieu. C'est une démarche qui a déjà été proposée dans le contexte des verres de spin [Cugliandolo et Kurchan - 1993]. Ce procédé a été utilisé ultérieurement dans diverses situations : dans les granulaires vibrés [D'anna *et al.* - 2003], dans un gel et un verre de polymère [Buisson *et al.* - 2003] ou pour une corde de Melde placée dans un écoulement turbulent [Grenard *et al.* - 2008]. Le TFD établit que la réponse du système à une perturbation est proportionnelle à ses fluctuations propres [Chandler - 1987]. Si tel est le cas, le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs est la température du système. Notre système n'étant pas à l'équilibre, il n'y a *a priori* aucune raison pour que le théorème soit vérifié. Cependant, si l'excitation appliquée au système n'est qu'une perturbation par rapport à l'état stationnaire dans lequel il se trouve, il est possible que la réponse soit proportionnelle aux fluctuations libres. Si c'est le cas, cela nous permettrait de mesurer une énergie caractéristique qui peut s'apparenter à la température effective du système stationnaire.

D'autre part, nous testons la Relation de Fluctuation (RF), parfois nommée Théorème ou Relation de Gallavotti-Cohen, qui s'applique aux systèmes hors-équilibre stationnaires. Comme expliqué dans l'introduction de cette thèse, cette relation suppose que le système étudié soit chaotique et réversible. Plus précisément, il est nécessaire que pour une trajectoire dans l'espace des phases donnée, le chemin inverse ait une probabilité non-nulle. Or, dans notre système, l'irréversibilité causée par la dissipation au sein du gaz viole l'hypothèse de micro-réversibilité requise par la RF. Toutefois, de même que pour le TFD, la RF peut être utilisée pour définir une température effective, et il est intéressant de voir si la symétrie de la distribution de probabilité du flux d'entropie prédite par la RF est vérifiée dans ce type de système. Dans notre cas, en l'absence d'une définition rigoureuse du flux d'entropie, l'approche la plus intuitive suggère d'étudier l'entropie phénoménologique, représentée ici par la puissance injectée par le thermostat, divisée par la température du système [Visco *et al.* - 2006].

Dans cette partie, nous étudions un gaz constitué de $N = 340$ billes, pour différentes intensités de l'agitation. Nous commençons par décrire les protocoles suivis pour tester le Théorème de Fluctuation-Dissipation et la Relation de Fluctuation pour un gaz donné, avant de présenter

la totalité des résultats.

3.3.2 Théorème de Fluctuation-Dissipation

Considérons la paire de variable conjuguées θ et Γ (la position angulaire de la pale et le couple) liée à notre système en contact avec un réservoir d'énergie. Position et couple sont conjugués dans le sens que leur produit correspond au travail exercé par le gaz granulaire sur la pale. Le théorème repose sur l'idée que les fluctuations spontanées de $\theta(t)$ ont les mêmes propriétés statistiques que la relaxation de $\theta(t)$ après avoir appliqué un faible forçage extérieur. Les hypothèses principales nécessaires à la démonstration de ce théorème sont les suivantes [Kubo - 1966]

- la réponse linéaire entre θ et Γ ,
- l'équilibre thermique entre le système étudié et le réservoir d'énergie (le thermostat),
- l'équilibre thermique du réservoir d'énergie lui-même.

Alors, la fonction réponse \mathcal{H} est telle que $\theta(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{H}(t-t') \Gamma(t') dt'$. De façon équivalente, cela peut s'écrire dans l'espace de Fourier, $\text{TF}[\theta](f) = \text{TF}[\mathcal{H}](f) \text{TF}[\Gamma](f)$. Le Théorème de Fluctuation-Dissipation (TFD) établit que les fluctuations de θ sont liées à la réponse dissipative du système à une perturbation de la variable conjuguée Γ . Le lien qui existe est en fait une simple proportionnalité, le coefficient de proportionnalité n'étant rien d'autre que la température multipliée par la constante de Boltzmann. Nous proposons donc ici d'utiliser le TFD de manière heuristique pour définir une température effective du milieu, comme proposé initialement dans [Cugliandolo et Kurchan - 1993].

Le TFD peut donc s'exprimer en termes temporels ou fréquentiels. Nous faisons le choix d'utiliser la version fréquentielle et nous montrons rapidement les principales étapes utiles à la démonstration du TFD. Pour cela, nous reprenons l'équation qui décrit la dynamique de la pale [Eq. (3.8)] en y ajoutant un terme de forçage, le couple Γ :

$$J \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \gamma \dot{\theta} = \Gamma + \sqrt{2D} \gamma \xi(t). \quad (3.9)$$

On utilise alors la réponse complexe du système au forçage dans le domaine fréquentiel, $\text{TF}[\mathcal{H}](f) \equiv \text{TF}[\theta]/\text{TF}[\Gamma]$. D'autre part, on peut quantifier les fluctuations libres du système (*i.e.* en l'absence de forçage) en calculant la densité spectrale $S_\theta = |\text{TF}[\dot{\theta}]|^2$. Alors, le TFD établit que la réponse au forçage est proportionnelle aux fluctuations libres selon

$$|\text{TF}[\theta]|^2 = \frac{2kT_{\text{TFD}}}{\pi f} \text{Im} \left[\frac{\text{TF}[\dot{\theta}]}{\text{TF}[\Gamma]} \right], \quad (3.10)$$

où kT_{TFD} désigne la température effective du système. En utilisant les quantités électriques avec $e = \alpha \dot{\theta}$ et $\Gamma = \alpha I$ ainsi que la relation $\text{TF}[\dot{\theta}] = 2\pi f i \text{TF}[\theta]$ (i désigne le nombre imaginaire), on obtient que

$$|\text{TF}[e]|^2 = 4kT_{\text{TFD}} \text{Re}[\mathcal{R}], \quad \text{avec} \quad \mathcal{R} = \frac{\text{TF}[e]}{\text{TF}[I]}. \quad (3.11)$$

Il est important de noter que cette dernière relation établit une égalité valable pour toutes les valeurs de la fréquence f , puisque la densité spectrale et la réponse \mathcal{R} sont des quantités qui

dépendent de f .

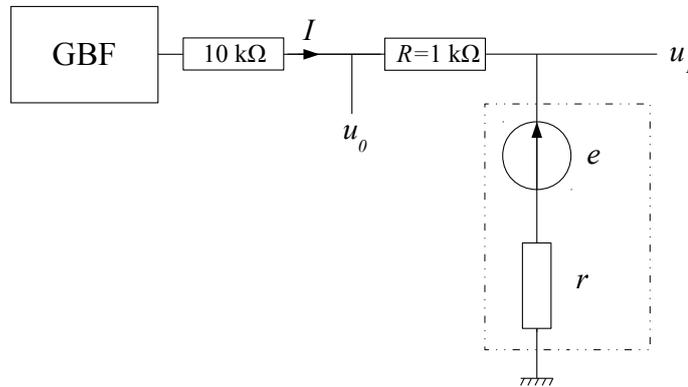


Figure 3.6 – Schéma du circuit électrique utilisé. On utilise un GBF en série avec une grande résistance pour imposer un courant I constitué d'une somme de sinusoïdes.

Afin de tester la validité du FDT, il nous faut donc appliquer un couple Γ au système. Ce forçage doit être suffisamment faible pour n'être qu'une perturbation par rapport à l'état stationnaire dans lequel se trouve le gaz granulaire. D'autre part, il nous faut pouvoir mesurer la réponse à ce forçage tout en mesurant les fluctuations libres du système. Nous pouvons le faire très simplement en imposant un courant au MCC depuis une source externe (Fig. 3.3). En supposant qu'il n'y a pas dans le gaz granulaire de mécanisme non-linéaire de transfert d'énergie entre les fréquences, on peut appliquer une excitation prenant la forme d'une somme de sinusoïdes, et calculer la réponse fréquence par fréquence. Cette technique a déjà été mise en œuvre dans les diélectriques [Pérez-Aparicio *et al.* - 2015]. Nous apportons ici un élément nouveau en mesurant le spectre sur l'ensemble des fréquences qui ne subissent pas la perturbation : c'est le spectre des fluctuations libres de la pale dans le gaz granulaire, comme s'il n'était pas perturbé. On peut mesurer simultanément les fluctuations libres d'un système plongé dans un thermostat et la réponse de ce même système dans son thermostat à une perturbation externe, avec le même ensemble de données.

Nous choisissons donc d'appliquer un couple Γ (ou de façon équivalente un courant I , cf Fig. 3.7a) de la forme

$$I(t) = \sum_k I_k \sin(2\pi f_k t + \phi_k)$$

Les fréquences $\{f_k\}$ sont choisies pour être réparties logarithmiquement sur la gamme fréquentielle étudiée : $f_k = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1, 2, 4, 7, 10, 20, 41, 70, 100, 200, 100$ et 400 Hz (nous avons choisi 41 Hz car le gaz est agité à 40 Hz). Les intensités $\{I_k\}$ sont choisies pour que les pics dans le spectre de e (qui correspondent à la réponse à l'excitation appliquée) sortent juste de la ligne de base du spectre correspondant aux fluctuations libres (Fig. 3.7b). Ainsi, nous nous assurons que l'excitation appliquée n'est qu'une petite perturbation de l'état stationnaire dans lequel se trouve le gaz granulaire. Enfin, les phases $\{\phi_k\}$ sont choisies aléatoirement de manière à éviter que des interférences intempestives ne donnent lieu à des fronts brutaux et de grande

amplitude. Pour imposer le courant I au moteur, nous utilisons un GBF (Agilent 3352X) piloté par un programme LabViewTM, relié à une grande résistance de $10\text{ k}\Omega$. Le courant débite ensuite dans une résistance $R = 1\text{ k}\Omega$ mise en série avec le moteur, comme illustré sur la figure 3.6). Pour une agitation du gaz fixée, nous attendons que le régime stationnaire soit atteint (typiquement quelques heures) avant de faire une acquisition des tensions u_0 et u_1 pendant les 20 à 40 heures suivantes, afin d'avoir des statistiques suffisantes.

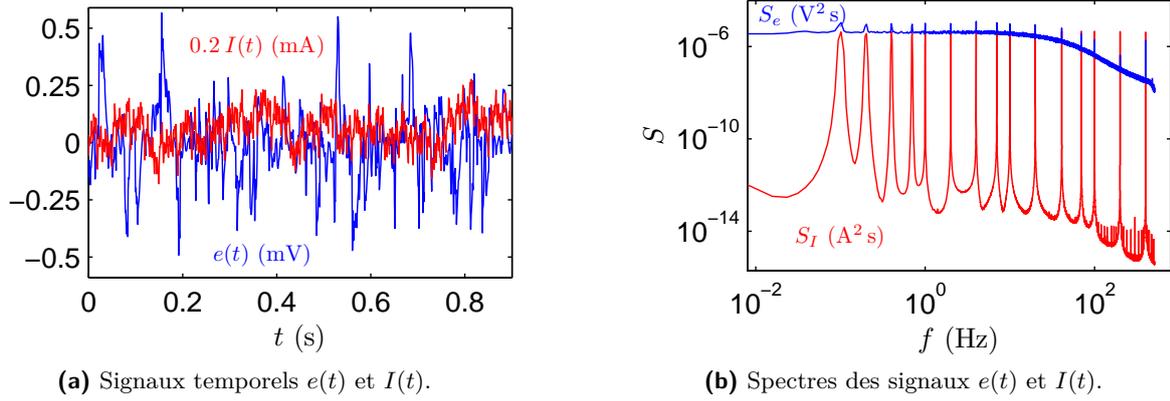


Figure 3.7 – Représentations temporelle et fréquentielle des signaux e et I . Le courant I correspond au forçage et la fem e aux fluctuations de vitesse de la pale dues chocs avec les grains.

On présente figure 3.7 les signaux typiques e et I , en représentations temporelle et fréquentielle, obtenus pour un gaz granulaire agité avec une accélération $a = 2.7\text{ g}$, soit $E_k = (9.6 \pm 0.1) 10^{-8}\text{ J}$. Si les signaux temporels ne sont pas facilement interprétables, on voit sur les signaux fréquentiels que les pics présents aux fréquences f_k sortent juste du spectre des fluctuations libres, comme on le souhaitait. À partir de ces signaux, nous pouvons calculer la réponse complexe du système à l'excitation $\mathcal{R} = \frac{\text{TF}[e]}{\text{TF}[I]}$, aux fréquences f_k . Nous présentons sur la figure 3.8 le module, la phase, les parties réelles et imaginaires de \mathcal{R} . En reprenant l'équation décrivant la dynamique de la pale en présence d'un forçage [Eq. (3.9)] qui constitue la modélisation la plus simple que l'on puisse faire de la dynamique de notre système, on peut prévoir la forme de \mathcal{R} :

$$\text{Re}[\mathcal{R}] = \frac{\alpha^2/\gamma}{1 + (f/f_c)^2} \quad \text{et} \quad \text{Im}[\mathcal{R}] = \frac{2\pi J\alpha^2/\gamma^2 f}{1 + (f/f_c)^2} \quad (3.12)$$

$$|\mathcal{R}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \quad \text{avec} \quad f_c = \frac{\gamma}{2\pi J}. \quad (3.13)$$

Les ajustements par ces lois fonctionnent relativement bien pour la partie réelle et le module, mais pas pour la partie imaginaire. Ceci peut se comprendre par le fait que le modèle utilisé est trop simple pour pouvoir décrire correctement le système. Malgré tout, les trois ajustements donnent une fréquence de coupure $f_c = \frac{\gamma}{2\pi J} = (60 \pm 10)\text{ Hz}$. D'autre part, les mesures aux fréquences les plus hautes semblent s'écarter de la tendance générale, probablement à cause de la trop grande proximité avec le pic de résonance présenté figure 3.5c.

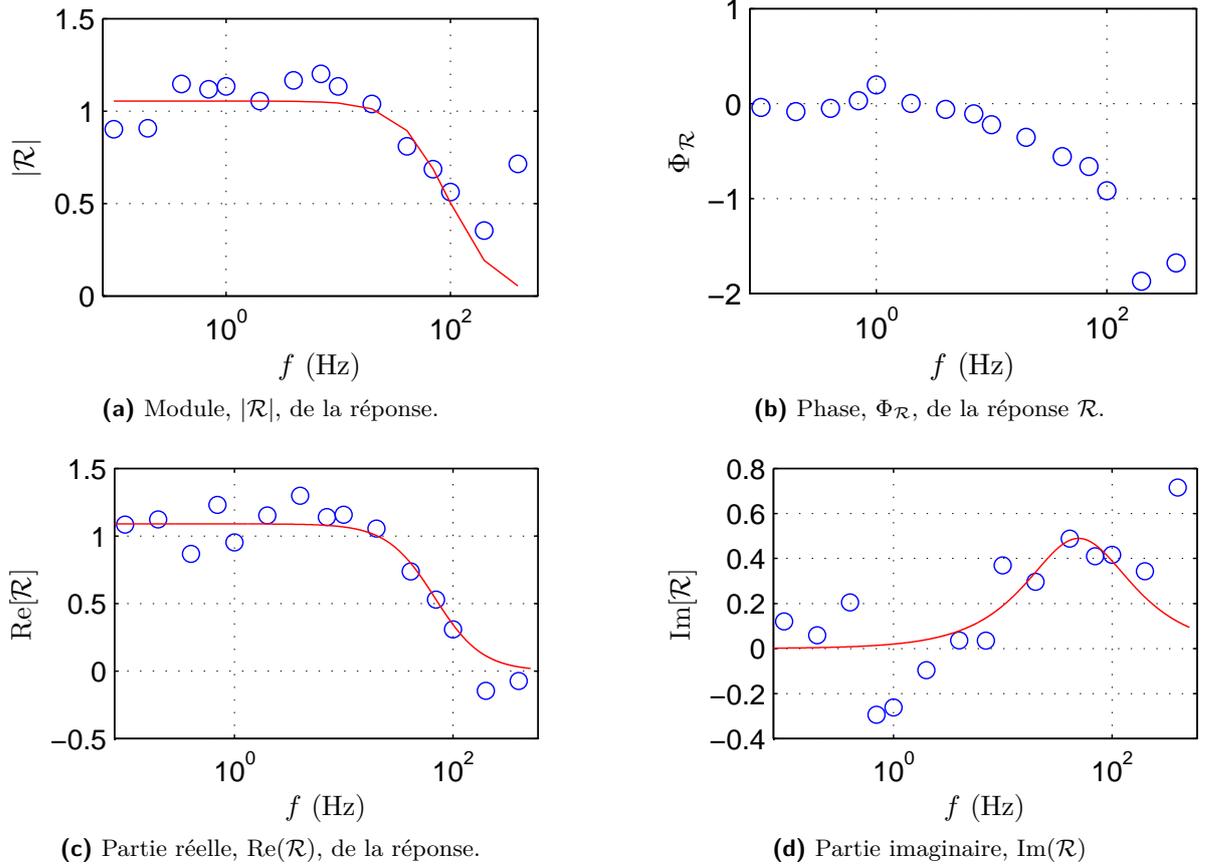
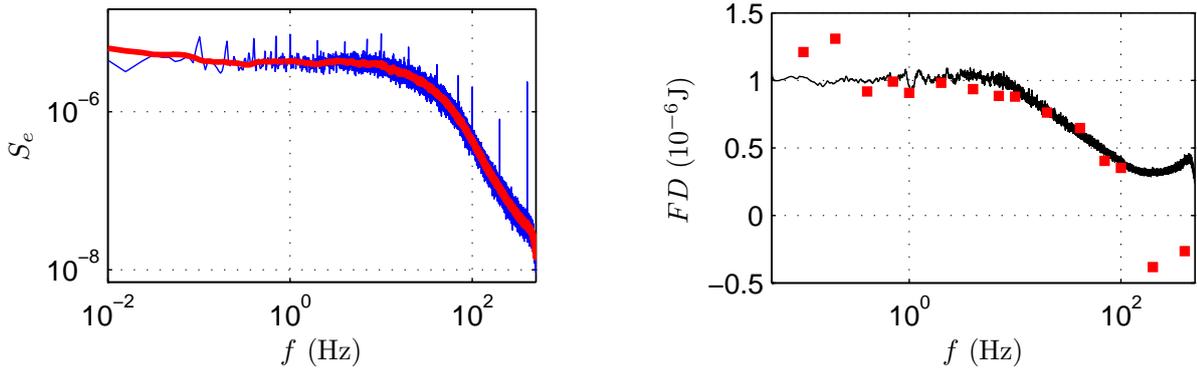


Figure 3.8 – Réponse complexe du système à l'excitation $\mathcal{R} = \frac{\text{TF}[e]}{\text{TF}[I]}$ pour un gaz agité tel que $E_k = (9.6 \pm 0.1) 10^{-8}$ J. Les prédictions issues de l'équation de Langevin sont tracées en rouge [Eq. (3.12) et (3.13)].

Nous pouvons ensuite calculer le spectre de puissance de e correspondant aux fluctuations libres (*i.e.* en l'absence de forçage), correspondant au terme de gauche de l'équation (3.11). Pour cela, nous faisons une interpolation du spectre de e obtenu en présence du forçage en supprimant uniquement les contributions aux fréquences connues f_k (Fig. 3.9a). De cette façon, la mesure de la réponse et des fluctuations se fait simultanément, ce qui nous assure que le système est exactement dans le même état d'agitation lorsqu'on mesure les deux quantités. Une fois la réponse et les fluctuations libres calculées sur une large gamme de fréquence, nous pouvons tester à proprement parler le TFD en calculant le rapport

$$FD \equiv \frac{|\text{TF}[e]|^2}{4 \text{Re}[\mathcal{R}]}, \quad (3.14)$$

dont le TFD prévoit qu'il soit égal à kT_{TFD} , à toutes les fréquences. On trace donc FD en fonction de f sur la figure 3.9b. Nous traçons d'une part FD calculé aux fréquences f_k (carrés rouges), ainsi que FD calculé pour toutes les valeurs de f en utilisant les ajustements de l'équation (3.12) (ligne noire). On voit que les mesures faites aux deux fréquences les plus basses (0.1 et 0.2 Hz) et les plus hautes (100 et 400 Hz) s'écartent clairement de la tendance générale. À basse fréquence, ceci est très probablement dû à un manque de statistique. À haute fréquence, la réponse du



(a) Spectre S_e calculé avec l'excitation (bleu) et interpolé en dehors des fréquences f_k (rouge).

(b) Rapport FD en fonction de f , calculé aux fréquences f_k (carrés rouges) et calculé pour toutes les valeurs de f en utilisant les ajustements de l'équation 3.12 (ligne noire).

Figure 3.9 – Spectre S_e et rapport FD tracés en fonction de f . La quantité FD s'identifie à la température kT_{TFD} selon le TFD.

système est vraisemblablement biaisée par la trop grande proximité avec un pic de résonance ; nous n'en tiendrons donc pas compte. D'autre part, si la quantité FD est constante pour $f \in [0.1; 80]$ Hz, elle décroît ensuite violemment. Le TFD n'est donc pas vérifié pour notre système, ce qui n'est pas surprenant. Cependant, nous pouvons tenter d'expliquer la chute aux plus hautes fréquences de la façon suivante : le rapport FD correspond à une énergie caractéristique associée au système, à une fréquence donnée. Si le Théorème de Fluctuation-Dissipation prévoit que $FD = kT_{\text{TFD}} (\forall f)$, c'est parce que le bruit ξ considéré est blanc, c'est à dire de même intensité à toutes les fréquences. Or cela ne peut pas être le cas pour notre système, puisque le gaz granulaire n'a pas de dynamique à très haute fréquence : les billes étant inertielles et le gaz peu dense, la pale ne peut pas avoir de dynamique à très haute fréquence. Nous nous concentrons donc sur la dynamique à basse fréquence, et nous décidons d'extraire une température kT_{TFD} à partir du comportement constant de FD pour $f \in [0.1; 80]$ Hz. On mesure sur l'exemple de la figure 3.9b, $kT_{\text{TFD}} = (0.95 \pm 0.15) 10^{-6}$ J. Comme attendu, cette valeur est bien au delà des valeurs classiques mesurées pour les systèmes thermiques (à température ambiante, $k_B T \sim 4 \cdot 10^{-21}$ J). Dans la suite, nous décrivons comment nous utilisons la Relation de Fluctuation pour extraire une autre mesure de la température effective du système. Nous discuterons alors plus en détail la valeur obtenue ici, et surtout, nous verrons comment elle évolue avec l'agitation du gaz.

3.3.3 Relation de Fluctuation

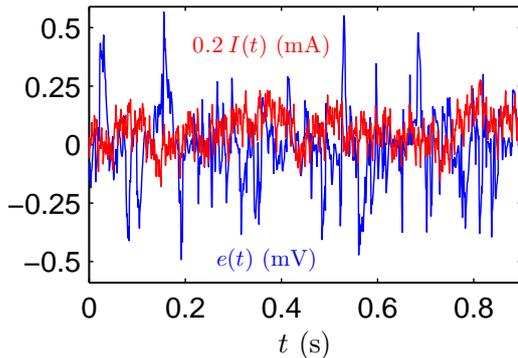
Il est important de noter que la situation est différente de celle étudiée dans le chapitre 2 (Sec. 2.5.4) et qui correspond à la majorité des études du même type sur des granulaires vibrés [Aumaitre *et al.* - 2001, Aumaitre *et al.* - 2004]. Dans ces études, la puissance sur laquelle est testée la RF est la puissance qui alimente le système dissipatif, qui compense en moyenne la dissipation : dans le cas de la bille, c'est la puissance injectée par le piston. L'expérience que nous présentons dans cette partie se démarque de ces études car nous considérons la puissance échangée entre la pale et le gaz, et non la puissance qui compense la dissipation pour maintenir

le gaz à l'état de gaz. Pour fixer les idées, la puissance typique nécessaire à l'entretien du mouvement du gaz granulaire est de l'ordre de quelques W, alors que la puissance moyenne échangée avec la pale peut être choisie aussi petite que voulue (ici entre 10^{-9} et 10^{-6} W).

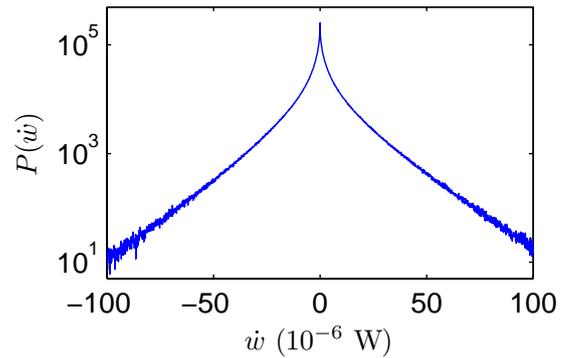
Comme évoqué dans l'introduction générale de cette thèse, le taux de création d'entropie ne peut se mesurer directement dans un système comme le notre. En revanche, on peut définir la variation d'entropie dans le gaz comme $dS = dw/T$, où dw est le travail fourni par la pale au gaz puisque la puissance fournie par l'agitation compense la dissipation en moyenne, et où T serait la température du thermostat. Ceci nous permet donc de considérer le travail $w(t)$ injecté au gaz pour exprimer la RF comme évoqué dans l'introduction. Rappelons tout de même qu'il existe quelques réserves quant à la validité de la RF :

- la RF n'est pas attendue puisque le travail injecté est perdu en chaleur, il ne peut pas y avoir micro-réversibilité.
- T n'est pas ici une vraie température, mais une température effective.

Malgré tout, on souhaite vérifier si cette relation peut décrire correctement notre système, et on l'utilise pour définir une température effective.



(a) Signaux temporels $e(t)$ et $I(t)$.



(b) Distribution de probabilité de la puissance injectée instantanée, $P(\dot{w}(t))$.

Figure 3.10 – Avec les signaux temporels $e(t)$ et $I(t)$, on peut calculer la puissance instantanée injectée par la pale dans le gaz, $\dot{w}(t) = e I$. Sa distribution de probabilité, $P(\dot{w}(t))$, est fortement non-gaussienne, avec beaucoup d'événements négatifs. On a ici $\langle \dot{w} \rangle = 2.5 \cdot 10^{-7}$ W.

Pour tester la RF, nous utilisons les mêmes données que celles utilisées pour le TFD (Sec. 3.3.2). En effet, en imposant un couple à la pale, elle transmet de l'énergie au gaz granulaire. Encore une fois, le courant I imposé au MCC (via la résistance R , cf Fig. 3.3) doit être d'amplitude assez faible pour que l'injection d'énergie ne soit qu'une perturbation (concrètement, on ne veut pas que la pale "brasse" le gaz granulaire et change totalement sa dynamique), mais il faut que la puissance moyenne injectée soit suffisamment importante pour pouvoir calculer la fonction d'asymétrie. On voit sur les tracés temporels (Fig. 3.10a) que la fém e est parfois du même signe que le forçage I (la pale injecte de l'énergie dans le gaz), mais elle peut aussi être de signe opposé (la pale reçoit de l'énergie de la part du gaz). On voit alors que la puissance instantanée injectée par la pale dans le gaz, $\dot{w}(t) = \Gamma \dot{\theta} = e I$, peut être positive comme négative. Par ailleurs, la distribution de probabilité de \dot{w} est très loin d'être gaussienne, avec des ailes très développées (Fig. 3.10b). La puissance moyenne injectée sur une durée τ vaut $\dot{w}_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_\tau \dot{w}(t') dt'$, dont on

trace figure 3.11a les distributions de probabilité pour plusieurs valeurs de τ . La valeur moyenne des distributions est positive (on injecte de l'énergie en moyenne) et vaut ici $\langle \dot{w} \rangle = 2.5 \cdot 10^{-7}$ W. On observe comme attendu que plus les valeurs de τ sont grandes (du plus foncé vers le plus clair), moins la distribution $P(\dot{w}_\tau)$ est large, et plus elle devient gaussienne.

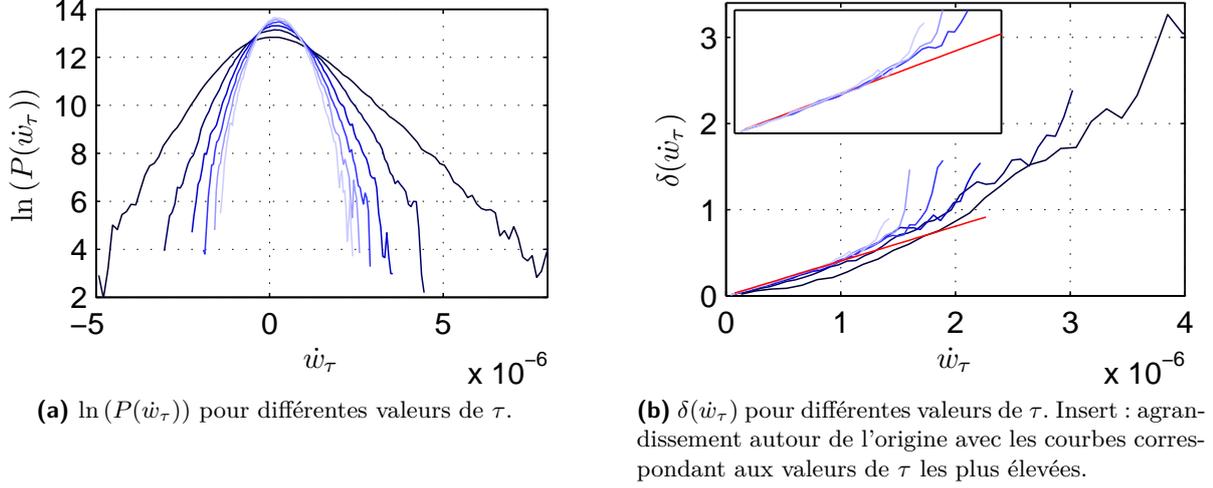


Figure 3.11 – Distributions de probabilité $\ln[P(\dot{w}_\tau)]$ et fonctions d'asymétrie $\delta(\dot{w}_\tau)$ pour $\tau \in [10; 60]$ s (du plus foncé au plus clair). La ligne rouge représente l'ajustement linéaire le plus approprié pour déterminer $E_{c,1}$ pour $\tau = 60$ s [Eq. 3.16]. On a ici $\langle \dot{w} \rangle = 2.5 \cdot 10^{-7}$ W.

Par analogie avec la RF, nous souhaitons donc tester l'existence d'une relation entre la probabilité pour la pale de fournir une puissance \dot{w}_τ au gaz et la probabilité qu'elle reçoive la même puissance venant du gaz, dans la limite des τ infinis :

$$\frac{P(\dot{w}_\tau)}{P(-\dot{w}_\tau)} = e^{\tau \dot{w}_\tau / kT_{RF}}, \quad \text{pour } \tau \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

où kT_{RF} désigne la température effective du système. Notre objectif est de tester cette relation et de mesurer, si cela est pertinent, le paramètre kT_{RF} pour différentes valeurs d'agitation du gaz. Pour cela, nous introduisons la fonction d'asymétrie $\delta(\dot{w}_\tau) \equiv \frac{1}{\tau} \ln \left[\frac{P(\dot{w}_\tau)}{P(-\dot{w}_\tau)} \right]$, que nous calculons pour des valeurs croissantes de τ (Fig. 3.11b).

La RF établit que la linéarité de la fonction d'asymétrie :

$$\delta(\dot{w}_\tau) = \frac{\dot{w}_\tau}{E_{c,1}}, \quad \text{avec } E_{c,1} \rightarrow kT_{RF} \quad \text{quand } \tau \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Il est également possible d'obtenir une autre mesure de kT_{RF} , sous réserve que la distribution de probabilité $P(\dot{w}_\tau)$ soit gaussienne. Dans ce cas, on a

$$\frac{\langle \dot{w}_\tau^2 \rangle}{\langle \dot{w}_\tau \rangle} = E_{c,2}, \quad \text{avec } E_{c,2} \rightarrow kT_{RF} \quad \text{quand } \tau \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Comme expliqué Section 2.5.4, il n'est pas possible d'atteindre réellement la limite $\tau \rightarrow \infty$ puisque nous avons des statistiques de taille finie. Nous nous imposons donc de moyennner sur un temps supérieur à $5\tau_c$ (τ_c est le temps typique de corrélation du système, mesuré à la

section 3.2.2), tout en gardant un domaine de définition de la fonction d'asymétrie suffisamment grand : $\dot{w}_\tau \in [0; 5 \langle \dot{w} \rangle]$. Ces critères sont faciles à respecter dans la mesure où nous pouvons choisir la valeur de $\langle \dot{w} \rangle$ et où nous pouvons faire des acquisitions de plusieurs heures. Il est important de noter que nous ne pouvons pas prouver la validité de la RF : nous vérifions simplement que dans nos barres d'erreur, avec nos critères de moyenne, la linéarité de la fonction d'asymétrie est vérifiée.

Pour déterminer $E_{c,1}$, nous effectuons un ajustement linéaire de la fonction d'asymétrie sur les 3/4 de son domaine de définition. En effet, le manque de statistique commence à être important dans le dernier quart. Pour $E_{c,1}$, il nous suffit de calculer le rapport des moments. On trace donc les énergies caractéristiques $E_{c,1}$ et $E_{c,2}$ [Eq. (3.16) et (3.17)] en fonction de τ sur la figure 3.12. On voit que les deux quantités sont stables pour $\tau \in [40; 60]$ s, et qu'elles coïncident. Notons tout de même que la mesure de $E_{c,2}$ semble beaucoup plus précise. Cependant, elle suppose que $P(\dot{w}_\tau)$ soit gaussienne, ce qui n'est pas prouvé. Nous déduisons ici une valeur de $kT_{RF} = (1.15 \pm 0.10) 10^{-6}$ J.

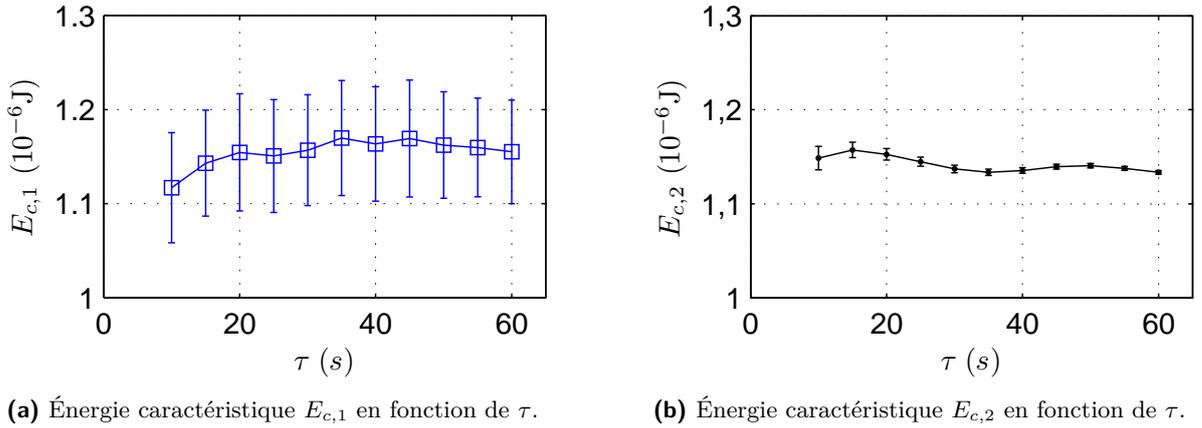


Figure 3.12 – Énergies caractéristiques $E_{c,1}$ et $E_{c,2}$ [Eq. (3.16) et (3.17)] en fonction de τ . Elles sont stables pour $\tau \in [40; 60]$ s et on déduit $kT_{RF} = (1.15 \pm 0.10) 10^{-6}$ J.

3.3.4 Résultats

Nous avons expliqué dans les deux sections précédentes comment nous pouvons obtenir deux mesures indépendantes d'une énergie caractéristique du système par le TFD et la RF. Naturellement, nous aimerions vérifier que ces deux mesures caractérisent bien ce qui pourrait être une température effective du gaz granulaire. Nous avons donc reproduit les mesures décrites précédemment pour différentes agitations du gaz. Pour rappel, pour une agitation du gaz fixée (et donc une valeur de l'énergie cinétique moyenne de la pale E_k fixée), nous attendons que le régime stationnaire soit atteint (typiquement quelques heures) avant de faire une acquisition pendant les 20 à 40 heures suivantes. Nous présentons figure 3.13 tous les résultats obtenus pour 11 valeurs différentes d'agitation accessibles avec notre dispositif expérimental.

On voit tout d'abord que les deux températures kT_{TFD} et kT_{RF} sont compatibles l'une avec l'autre pour une valeur de E_k donnée. Les deux mesures étant indépendantes, ceci donne

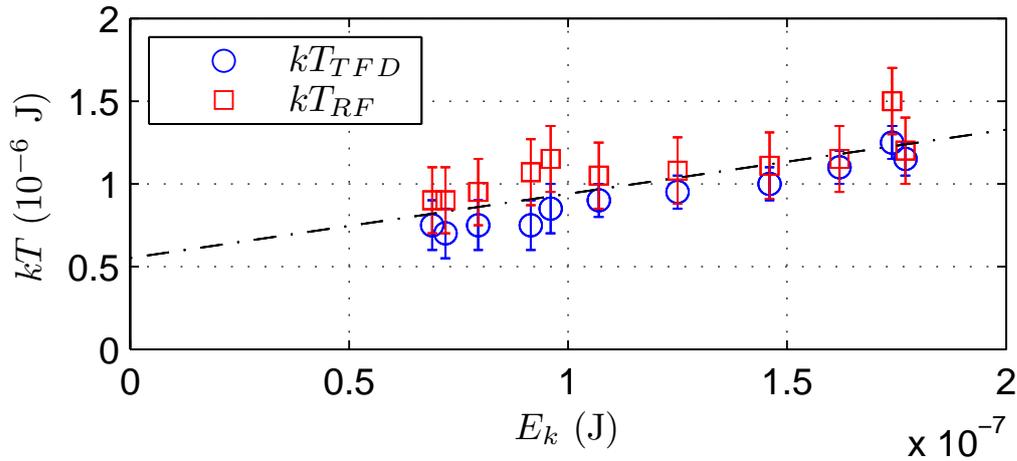


Figure 3.13 – Températures effectives, kT_{TFD} et kT_{RF} , obtenues par deux mesures indépendantes, en fonction de l'énergie cinétique moyenne de la pale, E_k .

déjà une preuve de la validité physique de ces mesures. D'autre part, les deux températures augmentent avec E_k , ce qui constitue le principal résultat de cette étude. Cela signifie que ces énergies caractéristiques quantifient bien le degré d'agitation du gaz, ou du moins de la pale. Nous présentons sur la figure 3.13 un ajustement affine des données, ce qui conduit à l'existence d'une température effective non nulle du gaz pour une agitation nulle de la pale. Ceci peut s'expliquer par le fait que la pale ne permet qu'une mesure locale de l'agitation du gaz. En effet, dans la limite des très faibles agitations, les billes sont bien mises en mouvement par l'agitation de la cuve, mais il n'y a aucun choc entre les billes et la pale, car cette dernière est placée en hauteur.

Il est important de noter que notre dispositif expérimental nous donne la possibilité de travailler à couple imposé et de mesurer la vitesse de la pale en même temps via un unique système, le MCC. Grâce à cela, aucun étalonnage n'est nécessaire ce qui représente un très grand avantage pour calculer la puissance injectée à la pale (RF) et effectuer la mesure spectrale pour le FDT. Pour pouvoir conclure complètement quant au lien entre les températures effectives mesurées ici et la température du système, il serait nécessaire de mesurer la température cinétique du gaz (et non de la pale). Cela nécessite de pouvoir faire un suivi des trajectoires des billes dans un plan horizontal au cours du temps et donc l'utilisation d'une cuve transparente. Ceci peut être réalisé à l'aide de caméras rapides par exemple. Nous avons commencé à faire une telle étude, mais elle n'est pas encore aboutie. Nous présentons les résultats préliminaires dans l'annexe B.1.

3.4 Étude d'un gaz raréfié à température constante

3.4.1 Protocole expérimental

L'objectif dans cette section est d'étudier l'influence de la densité du gaz sur la dynamique de la pale, c'est à dire sur la mesure de température. Pour cela, nous changeons le nombre de billes contenues dans la cuve. Afin de pouvoir interpréter les résultats, il nous faut conserver les autres paramètres constants. Nous choisissons pour cela de travailler à "température" de gaz constante, *i.e.* à E_k constant, *i.e.* à variance de la vitesse de la pale, $\langle \dot{\theta}^2 \rangle$, constante. En l'occurrence, nous travaillons à $E_k = (4.9 \pm 0.5) 10^{-7}$ J. Il est important de noter que la hauteur de la pale dans la cuve n'est pas la même que dans l'étude précédente : nous ici avons choisi de fixer une distance de 9 mm (contre 13.45 précédemment) entre le bas de la pale et le fond de la cuve, lorsque cette dernière est au repos. Ce choix a été fait afin d'avoir un gaz plus énergétique et donc des temps de thermalisation plus courts. Pour chaque densité du gaz étudiée, nous respectons le protocole suivant : le système est agité pendant 5 à 20 heures afin d'assurer qu'il est bien dans un état stationnaire. Cette durée varie fortement avec la densité du gaz étudiée. En particulier, pour les densités les plus faibles, le régime stationnaire est difficile à atteindre car les billes interagissent très peu entre elles, mais majoritairement avec les parois de la cuve. Il est à noter que pour atteindre la valeur de E_k que nous avons choisie, il est nécessaire de faire plusieurs ajustements successifs de l'amplitude d'agitation A . Une fois le régime stationnaire atteint, nous faisons une acquisition des tensions u_0 et u_1 (Sec. 3.2.1) durant 20 heures avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1024$ Hz.

Notre objectif est d'étudier l'influence de la densité du gaz sur sa dynamique. Pour cela, nous choisissons de mesurer de différentes manières le temps typique de corrélation dans la dynamique de la pale. Nous utilisons pour cela plusieurs outils et nous comparons les résultats entre eux.

3.4.2 Mesures du temps de corrélation

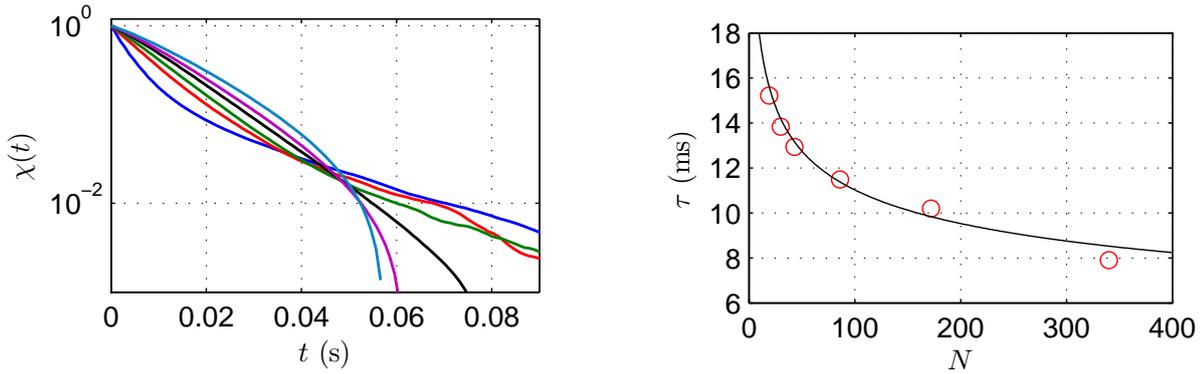
Auto-corrélation et spectre de la vitesse

Nous reprenons pour commencer les quantités introduites précédemment (Sec. 3.2.2) : l'auto-corrélation de la vitesse $\dot{\theta}$ (ou de façon équivalente, la fém e), et son spectre de puissance. Nous rappelons ici l'équation de Langevin [Eq. (3.8)] qui constitue le modèle simplifié pour décrire la dynamique de la pale :

$$J \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \gamma \dot{\theta} = \sqrt{2D} \gamma \xi(t).$$

Si la dynamique de notre système suivait la dynamique décrite par cette équation, on aurait $\chi_e(t) = \exp(-t/\tau_c)$, avec $\tau_c = J/\gamma$. De la même façon, le spectre de puissance de e aurait une forme Lorentzienne : $S_e(f) = \frac{S_0}{1 + (\frac{f}{f_c})^2}$, avec $f_c = 1/(2\pi\tau_c)$.

Nous présentons donc $\chi(t)$ sur la figure 3.14a pour plusieurs valeurs du nombre de billes N



(a) Auto-corrélation $\chi(t)$ pour plusieurs valeurs de N .

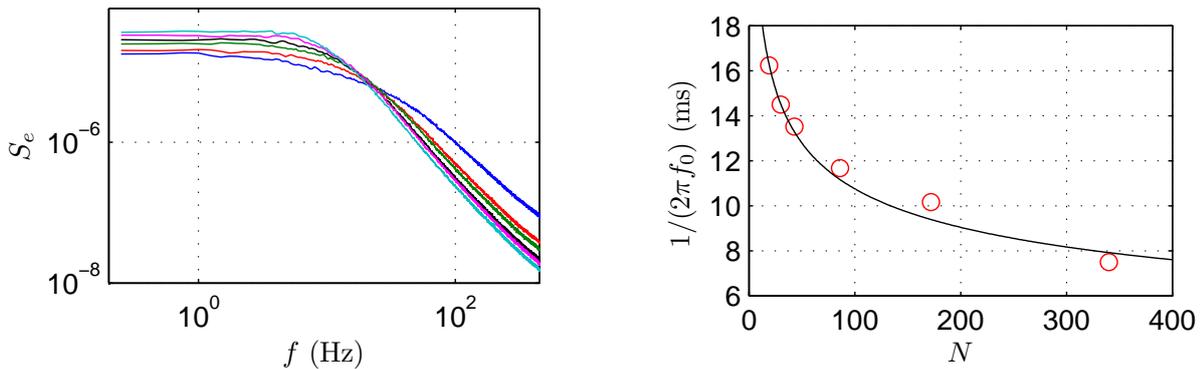
(b) Temps de corrélation τ déduit de $\chi(t)$ en fonction de N .

Figure 3.14 – (a) Auto-corrélation $\chi(t)$ pour plusieurs valeurs de N (340-172-86-43-30-20, bleu-rouge-vert-noir-magenta-cyan). (b) On en déduit un temps caractéristique τ (ronds rouges), qui décroît avec N selon une loi de puissance $\tau \propto N^{-\mu}$ (ligne noire) avec $\mu = 0.40 \pm 0.05$.

constituant le gaz. Nous voyons que la décroissance n'est pas exponentielle dans la très grande majorité des cas, ce qui confirme le fait que l'équation de Langevin ne décrit pas toute la complexité de la dynamique de notre système. Pour autant, il est possible d'extraire de $\chi(t)$ un temps caractéristique :

$$\tau \equiv \int_0^{\infty} \chi(t) dt. \quad (3.18)$$

Nous traçons donc τ en fonction du nombre de billes N sur la figure 3.14b. On voit que τ décroît lorsque N augmente, selon la loi de puissance $\tau \propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.40 \pm 0.05$.



(a) Spectres de la fém, e , pour plusieurs valeurs de N .

(b) Temps de corrélation $1/(2\pi f_0)$ déduit de $S_e(f)$ en fonction de N .

Figure 3.15 – (a) Spectres de la fém, e , pour plusieurs valeurs de N (340-172-86-43-30-20, bleu-rouge-vert-noir-magenta-cyan). (b) On en déduit un temps caractéristique $1/(2\pi f_0)$ (ronds rouges), qui décroît avec N selon une loi de puissance $1/(2\pi f_0) \propto N^{-\mu}$ (ligne noire) avec $\mu = 0.42 \pm 0.05$.

Nous présentons également les spectres S_e obtenus pour plusieurs valeurs de N sur la figure 3.15a. Comme observé précédemment, le spectre est proche d'être lorentzien, mais il ne l'est pas puisque $\chi(t)$ ne décroît pas de manière exponentielle. Dans tous les cas, on peut effectuer un ajustement de ces spectres par des lorentziennes, afin d'en déduire la fréquence

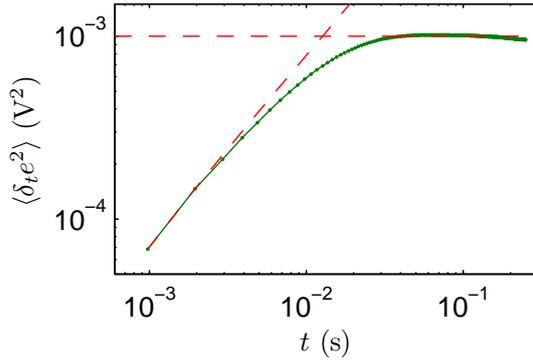
de coupure caractéristique f_0 . De cette fréquence, on peut déduire un temps qui doit suivre la même évolution que τ [obtenu à partir des $\chi(t)$] lorsque le nombre de billes N décroît. On trace donc (Fig. 3.15b) $1/(2\pi f_0)$ en fonction de N , qui suit une loi de puissance compatible avec celle observée pour $\tau(N)$: $1/(2\pi f_0) \propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.42 \pm 0.05$. Ce comportement sera discuté par la suite et comparé à d'autres mesures à la lumière d'éléments théoriques.

Incréments de vitesse

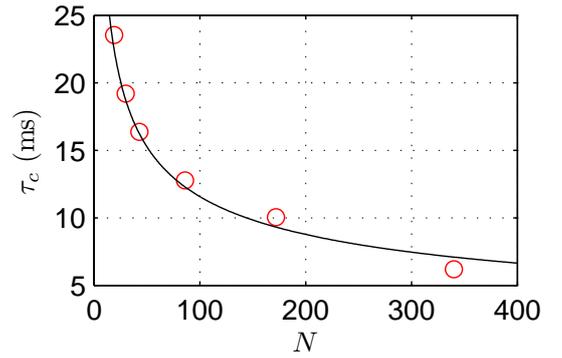
Afin d'étudier plus directement les événements microscopiques qui sont responsables de la dynamique de la pale, nous étudions ici les incréments de vitesse de la pale, *i.e.* la variation de e sur un temps t :

$$\delta e_t(t') \equiv e(t' + t) - e(t'). \quad (3.19)$$

Nous étudions tout d'abord la variance (moment d'ordre deux) des incréments de la vitesse, puis la Kurtosis (moment d'ordre quatre), les moments impairs étant tous nuls par symétrie.



(a) Variance des incréments de la fem, $\langle (\delta e_t)^2 \rangle_{t'}$ pour un gaz constitué de $N = 86$ billes.



(b) Temps caractéristique τ_c , obtenu au croisement des asymptotes correspondant aux régimes diffusif et balistique, en fonction de N .

Figure 3.16 – La variance des incréments de la fem, $\langle (\delta e_t)^2 \rangle_{t'}$ exhibe deux régimes asymptotiques (diffusif et balistique). Le temps τ_c qui sépare les deux régimes suit une loi de puissance : $\tau_c \propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.41 \pm 0.04$.

Si on considère que la force aléatoire $\xi(t)$ est delta-corrélée, *i.e.* $\langle \xi(t' + t)\xi(t') \rangle_{t'} = \delta(t)$, où δ est la fonction de Dirac, on montre facilement que la variance des incréments de vitesse suivent les comportements asymptotiques suivants en résolvant l'équation de Langevin :

$$\langle \delta e_t^2 \rangle = \frac{D\gamma\alpha^2}{J} \quad \text{pour } t \gg \frac{J}{\gamma}, \quad (3.20)$$

$$\langle \delta e_t^2 \rangle = \frac{2D\gamma^2\alpha^2}{J^2} t \quad \text{pour } t \ll \frac{J}{\gamma}. \quad (3.21)$$

La limite $t \gg \frac{J}{\gamma}$ correspond au régime diffusif. À l'inverse, le régime $t \ll \frac{J}{\gamma}$ correspond au régime balistique. Ces deux régimes asymptotiques apparaissent très clairement sur la figure 3.16a, où l'on représente $\langle (\delta e_t)^2 \rangle_{t'}$ en fonction de t pour un gaz constitué de $N = 86$ billes. Le temps τ_c auquel les deux régimes se croisent vérifie $2\tau_c = J/\gamma$, directement lié aux temps caractéristiques

τ [ou $1/(2\pi f_0)$] obtenus via l'étude de $\chi(t)$ (ou S_e). Nous traçons donc le temps τ_c mesuré au croisement des asymptotes des deux régimes pour plusieurs valeurs de nombre de billes N dans le gaz (Fig. 3.16b). L'évolution de τ_c suit encore une fois une loi de puissance avec le même exposant que précédemment, $\tau_c \propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.41 \pm 0.04$. Les valeurs sont globalement compatibles avec les précédentes, sauf à faible N , où le régime balistique est plus difficile à capturer.

À partir du comportement de $\langle \delta e_t^2 \rangle$ observé en fonction de t (Fig. 3.16a), il est également possible de mesurer le coefficient de diffusion D et le coefficient de frottement γ . En effet, la mesure de la pente du régime balistique donne $2D\gamma^2/J^2\alpha^2$, et le plateau du régime diffusif donne $D\gamma\alpha^2/J$ (pour rappel, $e = \alpha\dot{\theta}$). Prenant pour α la valeur donnée par le constructeur ($\alpha = 4.27 \cdot 10^{-3} \text{ V s rad}^{-1}$), on obtient facilement D et γ , le tout pour différentes valeurs de N . On présente donc sur la figure 3.17 ces deux coefficients en fonction de N . On observe la décroissance du coefficient de diffusion lorsqu'on augmente la densité du gaz. À l'inverse le coefficient de friction augmente avec la densité du gaz, puisqu'il y a davantage de billes pour freiner la pale. Afin d'interpréter ces résultats, nous nous appuyons sur les prédictions de la théorie cinétique des gaz [Loeb - 1961] qui décrit le comportement d'un gaz microscopique. Selon cette théorie, dans le cas de la diffusion en trois dimensions, les coefficients D et γ dans un gaz raréfié [L. Landau - 1990], suivent les lois d'échelle

$$D \sim \lambda \bar{v} \quad (3.22)$$

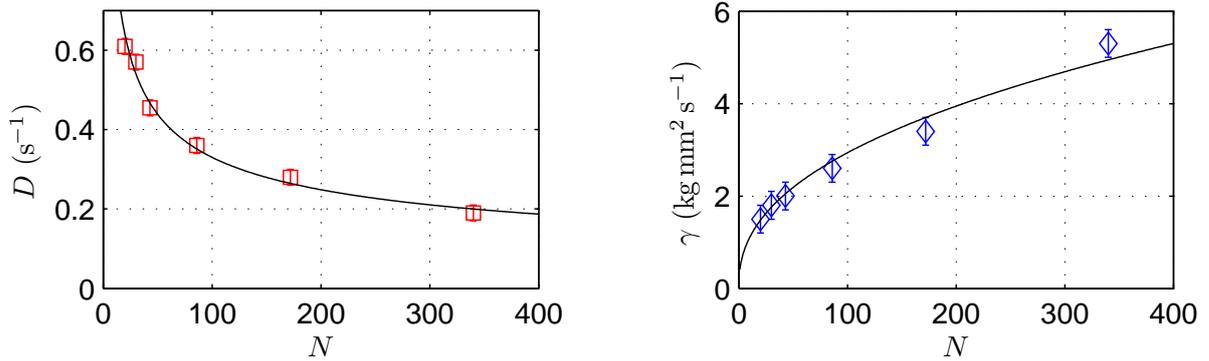
$$\gamma \sim m\bar{v}NL, \quad (3.23)$$

où λ est le libre parcours moyen ($\lambda \propto 1/N$), \bar{v} la vitesse moyenne d'une particule et L la taille typique de la boîte contenant le gaz. Puisque nous travaillons à température constante, on devrait donc avoir $D \propto 1/N$ et $\gamma \propto N$.

Avec nos résultats expérimentaux, on observe effectivement une décroissance de D avec N , mais selon une loi de puissance $\propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.41 \pm 0.04$. De même, γ croît selon une loi de puissance $\propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.43 \pm 0.05$, alors la théorie prévoit une croissance linéaire. Pour expliquer cela, on peut évoquer le fait que nous travaillons dans un régime mixte, très peu dense à peu dense, qui n'est pas forcément bien décrit par la théorie cinétique des gaz. D'autre part, la répartition des billes dans le volume de la cuve pourrait être un facteur déterminant dans la mesure. La densité du gaz décroît *a priori* exponentiellement sur la hauteur de la cuve. Pourtant, il est possible que ce ne soit plus le cas lorsque l'agitation de la cuve est suffisamment forte pour que les billes frappent la pièce supérieure du dispositif. Dans ce cas, il ne semble plus correct de dire que l'on travaille à température fixée. Ce comportement sera discuté plus en détail par la suite.

Au delà de la variance, nous pouvons étudier les moments d'ordre supérieur des incréments afin de caractériser les corrélations temporelles. Nous considérons ici le moment d'ordre quatre normalisé, la Kurtosis :

$$K \equiv \frac{\langle \delta_t e^4 \rangle}{(\langle \delta_t e^2 \rangle)^2}. \quad (3.24)$$



(a) Coefficient de diffusion, D , en fonction du nombre de billes N , ajusté par une loi de puissance $\propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.41 \pm 0.04$.

(b) Coefficient de friction, γ , en fonction du nombre de billes N , ajusté par une loi de puissance $\propto N^{-\mu}$ avec $\mu = 0.43 \pm 0.05$.

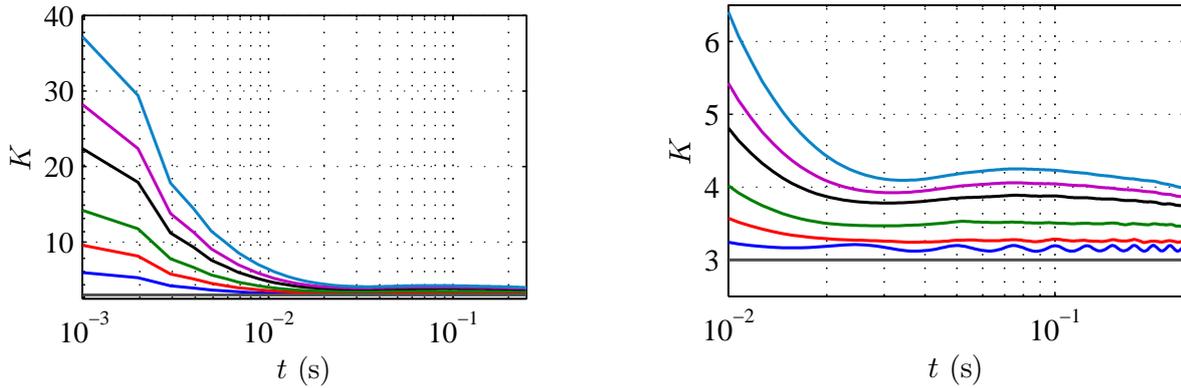
Figure 3.17 – Coefficient de diffusion et de friction, D et γ , en fonction du nombre de billes N .

Dans la limite des longs temps, les corrélations de la vitesse de la pale $\dot{\theta}$ sont supposées disparaître. Dans ce cas, la distribution des incréments $\delta_t \dot{\theta}$ tend vers une gaussienne, pour laquelle la Kurtosis vaut exactement 3. En revanche, pour les incréments de temps courts, les statistiques sont très dépendantes des corrélations.

Nous présentons K sur la figure 3.18 en fonction de l'incrément de temps t pour plusieurs valeurs de N . Comme attendu, la valeur de K est très grande *i.e.* la distribution des incréments a des ailes très développées pour les incréments de temps courts. K décroît ensuite pour les incréments de temps plus longs, pour tendre vers la valeur $K = 3$. Toutefois, on remarque que cette valeur n'est jamais atteinte, en particulier pour les faibles nombre de billes. La valeur asymptotique de K se rapproche de 3 quand N augmente, ce qui prouve que les corrélations sont plus importantes à faible densité. A temps court, K est plus faible pour les valeurs élevées de N . Ceci peut s'expliquer par le fait que dans les gaz les moins denses, la dynamique de la pale est plus intermittente, et donc K est plus grand. En effet, dans ce régime, les collisions sont très espacées dans le temps. Après un choc avec une bille, la pale perd toute sa vitesse à cause des frottements solides. On a alors de longues plages temporelles où la vitesse de la pale est nulle, ce qui augmente sensiblement les corrélations. Comme on le voit sur la figure 3.18b, il y a des oscillations en temps pour les grands temps, surtout aux fortes densités. La fréquence correspondante est de 40 Hz, ce qui est une trace de la fréquence d'excitation de la cellule.

3.4.3 Discussion et conclusion

Dans cette partie, nous avons travaillé à température de pale (E_k) constante. Or, on peut raisonnablement supposer que température de pale et température du gaz sont proportionnelles : c'est en tout cas ce qu'on attendrait d'un objet à l'équilibre thermique avec un thermostat [Brey et Ruiz-Montero - 2008, Javier Brey et Khalil - 2010]. D'après la théorie cinétique des gaz, le coefficient de friction γ devrait croître linéairement avec N , et le coefficient de diffusion ainsi que le temps de corrélation typique de la pale $\tau_c = J/\gamma$ devraient évoluer selon $\propto N^{-1}$, puisque tous les autres paramètres sont constants.



(a) Kurtosis K des incréments de vitesse pour plusieurs valeurs de N .

(b) Kurtosis K des incréments de vitesse pour plusieurs valeurs de N , aux incréments de temps longs.

Figure 3.18 – (a) Kurtosis K des incréments de vitesse $\delta_t \theta$ en fonction de l'incrément de temps t , pour plusieurs valeurs de N (340-172-86-43-30-20, bleu-rouge-vert-noir-magenta-cyan). (b) Agrandissement ; la ligne noire correspond à la référence gaussienne, $K = 3$.

Au lieu de cela, nos observations expérimentales conduisent à des lois de puissances $\propto N^{0.4}$ ou $\propto N^{-0.4}$. Nous proposons plusieurs éléments d'explication à cela. Tout d'abord, la théorie cinétique des gaz repose sur beaucoup d'hypothèses très simplificatrices, dont plusieurs ne sont clairement pas valables ici. En effet, nous travaillons dans un régime mixte, de très peu dense à peu dense, qui n'est pas forcément bien décrit par la théorie. D'autre part, nos résultats peuvent être assez dépendants des choix expérimentaux que nous avons fait : la hauteur à laquelle la pale est placée, la valeur de E_k à laquelle nous travaillons, ... Étant donnée la répartition exponentielle des billes selon l'altitude, ces choix peuvent avoir une influence directe sur les observations. Notons également, pour maintenir E_k constante en variant N , il nous faut adapter l'agitation de la cuve. Le volume occupé par le gaz n'est alors pas strictement le même, et les raisonnements en loi d'échelle deviennent faux. De façon plus générale, la répartition des billes dans le volume de la cuve pourrait être un facteur déterminant dans la mesure. Il est possible que la répartition des billes dans le volume ne suive pas une loi de Boltzmann lorsque l'agitation de la cuve est suffisamment forte pour que les billes frappent la pièce supérieure du dispositif. Or, la sonde étant locale mais macroscopique, nous mesurons un comportement moyen du gaz à une hauteur donnée. L'hypothèse de travail qui consiste à dire que nous travaillons à température de gaz fixée n'est alors plus forcément valable. Nous présentons en annexe B.1 une méthode pour visualiser la répartition des billes dans le gaz. Notons enfin que dans toute notre étude, nous avons négligé la présence de frottements solides au niveau du rotor du MCC. Ceux-ci pourraient biaiser nos observations notamment à très faible densité, car les chocs sur la pale sont très espacés dans le temps. Nous discuterons de l'influence des frottements solides dans la section suivante.

Afin de nous faire une idée plus précise de la dynamique temporelle des billes qui constituent le gaz nous proposons dans l'annexe B.2 de mesurer le temps typique entre deux collisions grâce à un autre dispositif expérimental. Ceci nous permettrait de voir comment, il se compare aux temps caractéristiques de la pale mesurée dans cette partie, et ainsi de valider ou d'invalider les éléments qui nous ont servi à modéliser notre système.

3.5 Étude de deux gaz couplés électro-mécaniquement

3.5.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous avons choisi d'étudier des gaz de densités variables à température constante. Comme expliqué précédemment, nous ne pouvons pas imposer la température du gaz, mais uniquement celle de la pale, E_k . Pour chaque densité étudiée, l'agitation était donc adaptée pour atteindre la valeur de E_k fixée. Nous nous proposons ici de faire une nouvelle étude en nous basant sur des travaux passés [Lecomte et Naert - 2014], dans lesquels deux gaz granulaires sont couplés électro-mécaniquement. Lecomte et Naert ont prouvé que lorsque deux gaz d'agitations différentes étaient couplés, il existe un flux moyen d'énergie du gaz le plus "chaud" vers le gaz le plus "froid", et que ce flux moyen est proportionnel à la différence des "températures" des pales, *i.e.* la différence des E_k . Reprenant ce système de deux thermostats granulaires couplés, notre idée est donc la suivante : affecter à l'un des deux le rôle de référence, et adapter l'amplitude de la vibration imposée au second système, dont la densité est différente, de façon à annuler le flux moyen d'énergie. Nous pourrions alors observer l'influence de la densité du gaz étudié sur les statistiques du flux et de la vitesse de la pale plongée dans le gaz étudié.

3.5.2 Protocole expérimental

Pour réaliser cette expérience, nous avons réalisé une copie de notre dispositif expérimental : nous avons deux cuves, deux pales, deux moteurs avec les mêmes tailles, matériaux et caractéristiques. Le principe de l'expérience repose la réversibilité du Moteur à Courant Continu : deux MCC sont couplés électriquement, tout en étant reliés à des pales qui sont plongées dans deux gaz différents (Fig. 3.19). Supposons qu'une bille frappe la pale dans le gaz de référence, noté 1. Cela va créer une tension aux bornes du MCC 1, et donc un courant I qui circule dans le circuit fermé. Ce courant traverse la résistance R de couplage, et induit un couple Γ au MCC 2, dont la pale va être mise en mouvement. Ainsi, une agitation plus forte d'un des deux gaz va se répercuter sur le gaz le plus froid. Concrètement, un flux d'énergie va se mettre en place entre des deux gaz. Comme prouvé par Lecomte et Naert, ce flux sera de valeur moyenne nulle si les variances des vitesses des pales sont égales, c'est à dire s'ils ont la même valeur de E_k .

Le schéma électrique équivalent du système est présenté figure 3.20. On mesure les tensions u_1 et u_2 , desquelles on déduit

$$I = (u_1 - u_2)/R, \quad (3.25)$$

$$e_1 = u_1 \left(1 + \frac{r_1}{R}\right) - u_2 \frac{r_1}{R}, \quad (3.26)$$

$$e_2 = u_2 \left(1 + \frac{r_2}{R}\right) - u_1 \frac{r_2}{R}. \quad (3.27)$$

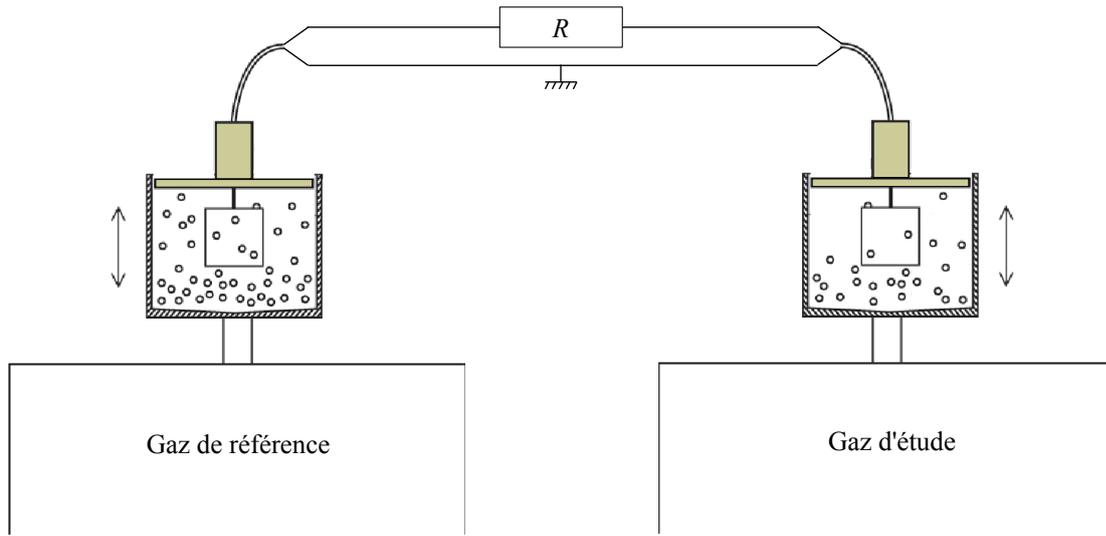


Figure 3.19 – Schéma du dispositif expérimental. La partie beige est fixe dans le référentiel du laboratoire.

On peut alors définir le flux échangé (la puissance échangée) comme

$$\Phi \equiv \dot{\theta}_1 \Gamma - \dot{\theta}_2 \Gamma = I e_1 - I e_2 \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{R + r_1 + r_2} (e_1^2 - e_2^2). \quad (3.29)$$

On voit donc qu'imposer $\langle \Phi \rangle = 0$ revient à imposer $\langle e_1^2 \rangle = \langle e_2^2 \rangle$, soit $E_{k,1} = E_{k,2}$. On retrouve ici l'intuition habituelle, que le flux de chaleur s'annule entre deux corps à température égale. On peut même prendre cela comme définition de l'équilibre thermodynamique entre deux corps.

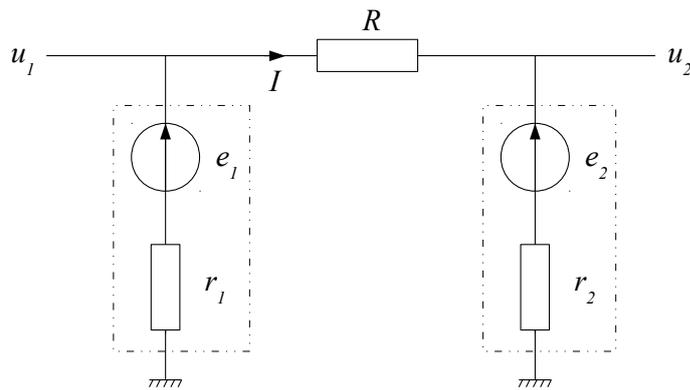


Figure 3.20 – Schéma du circuit électrique. Le rectangle pointillé représente le système {moteur + pale}.

En pratique, nous choisissons de coupler les deux gaz par une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$, très grande devant les résistances internes des MCC. Ceci permet de nous placer dans le cas d'un couplage faible : le gaz le plus "chaud" ne va pas induire un réchauffement notable du gaz le

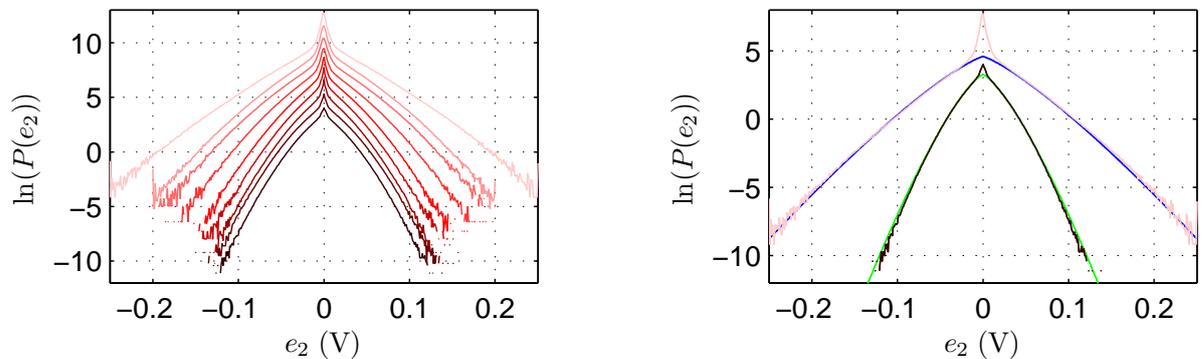
plus "froid", puisque la résistance de couplage limite le courant. Par ailleurs, cette dernière nous permet de mesurer le courant par une simple mesure de la différence de potentiel à ses bornes. Nous nous fixons comme critère de "flux nul" que le flux moyen soit inférieur à 2% de l'écart type du flux : $\langle \Phi \rangle \leq 0.02 \Phi_{\text{RMS}}$ (Φ_{RMS} désigne le moment centré d'ordre deux de Φ). Pour chaque densité du gaz 2 étudiée, nous respectons le même protocole : le système est agité pendant 5 à 20 heures jusqu'à être sûr qu'il est bien dans un état stationnaire (cette durée varie fortement avec la densité du gaz étudiée). Une fois le régime stationnaire atteint, nous faisons une acquisition des tensions u_1 et u_2 durant 20 heures avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1024 \text{ Hz}$. Nous faisons ensuite une nouvelle acquisition de 20 heures des tensions u_1 et u_2 en ayant ouvert le circuit au niveau de la résistance de couplage. Si les propriétés du gaz étudié sont les mêmes avec et sans couplage, alors le couplage entre les deux gaz est bien négligeable.

Notre objectif est d'étudier l'influence de la densité du gaz 2 sur les statistiques du flux Φ et de la vitesse de la pale $\dot{\theta}_2$.

3.5.3 Résultats

Nous présentons ici les résultats pour des gaz constitués de $N_1 = 374$ et $N_2 = 374, 249, 167, 11, 74, 50, 30, 20,$ et 10 billes, agités de telle sorte que $E_k = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$ de part et d'autre.

Distribution des vitesses



(a) $P(e_2)$ pour plusieurs valeurs de N_2 : N_2 croît du plus foncé au plus clair.

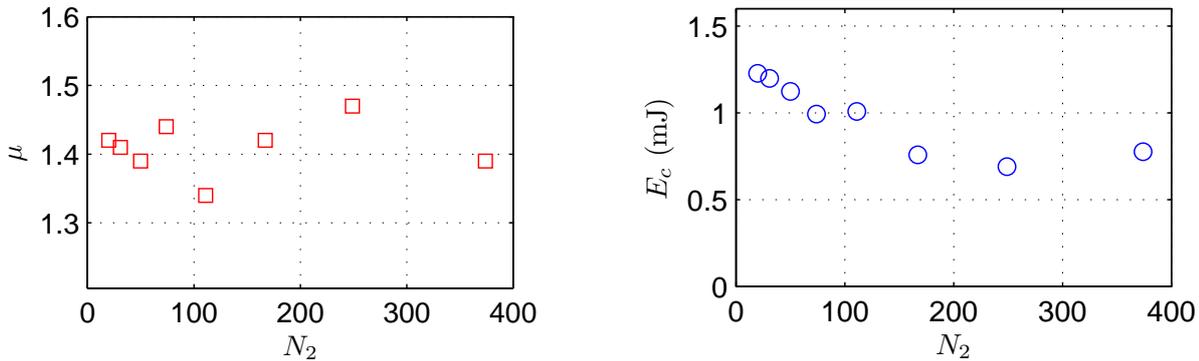
(b) $P(e_2)$ pour $N_2 = 374$ (rouge clair) et $N_2 = 10$ (rouge foncé). Les ailes des distributions sont ajustées par une loi $\propto \exp(-|\beta e_2|^\delta)$ (bleu et vert).

Figure 3.21 – Distributions de probabilité des fem e_2 , pour des valeurs de N_2 croissantes (du plus foncé au plus clair). Les ailes des distributions peuvent être ajustées par une loi $\propto \exp(-|\nu e_2|^\mu)$. Les courbes ont été décalées pour plus de lisibilité.

Nous présentons Figure 3.21a les distributions de probabilité des fem e_2 pour toutes les valeurs de N_2 étudiées (N_2 croît du plus foncé au plus clair). Comme discuté au début de ce chapitre (Sec. 3.2.2), les distributions sont de moyennes nulles et présentent un "pic" autour de $e_2 = 0$. Il est de plus en plus marqué lorsque N_2 diminue. Cette sur-représentation est très probablement due au frottement solide sur le collecteur et les paliers du moteur. En effet, pour les gaz de très faibles densités, après que la pale a subi un impact de bille, sa vitesse

décroit fortement à cause des frottements avant un nouveau choc. Ainsi, le pic autour de $e_2 = 0$ devient prépondérant dans la distribution. On peut noter que l'équation (3.8) est trop simpliste, puisqu'elle ne rend pas compte de cet effet. Cela est particulièrement visible à faible densité, et a été étudié quantitativement dans [Gnoli *et al.* - 2013].

Nous nous concentrons donc, dans un premier temps, sur les ailes des distributions, qui sont elles le reflet de l'agitation du gaz. En écartant les quelques points centraux, elles peuvent être ajustées par une loi de puissance $\propto \exp(|\nu e_2|^\mu)$, comme illustré sur la figure 3.21b dans les cas extrêmes $N_2 = 374$ et $N_2 = 10$ billes. On peut déduire de ν une énergie caractéristique $E_c = J/(\alpha\nu^{1/\mu})^2$ (on rappelle que J est le moment d'inertie de la pale), qui correspondrait à la largeur de la distribution sans tenir compte de la partie centrale (distribution ajustée par la loi de puissance). Nous présentons donc l'évolution de l'exposant μ et de cette énergie caractéristique E_c sur la figure 3.22. On voit que μ est quasi-indépendant de la densité du gaz : $\mu = 1.40 \pm 0.05$. En revanche, E_c décroît lorsque N augmente, avant de se stabiliser pour les valeurs de $N_2 > 150$. Nous remarquons que les valeurs numériques de E_c sont très différentes de celle de E_k , bien qu'il s'agisse dans les deux cas de largeurs des distributions de probabilité de fém e . Toutefois, E_c est calculée sans tenir compte de la partie centrale de la distribution, ce qui change significativement la valeur de la variance de la distribution.



(a) Puissance δ utilisée pour décrire les ailes de $P(e_2)$ en fonction de N_2 .

(b) Énergie caractéristique E_c utilisée pour décrire les ailes de $P(e_2)$ en fonction de N_2 .

Figure 3.22 – Paramètres μ et E_c de la loi de puissance $\exp(|\nu e_2|^\mu)$ servant à ajuster les ailes des distributions $P(e_2)$ en fonction du nombre de billes dans le gaz 2, N_2 .

On voit que les distributions $P(e_2)$ n'évoluent pas en forme, puisque μ est quasiment indépendante de N_2 . Toutefois, la largeur de la distribution, donnée par E_c , évolue pour les plus faibles densités ($N_2 < 150$). Le pic central de la distribution étant un effet de la sonde (frottements sur l'axe du moteur), seules les ailes reflètent la dynamique du gaz. Puisqu'elles ne dépendent pas de N_2 , cela signifie que la dynamique du gaz raréfié ne dépend pas de la densité.

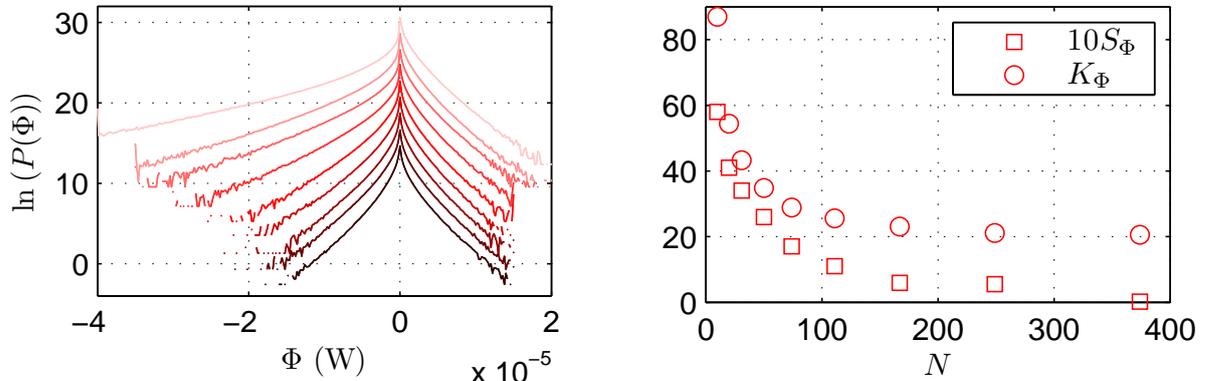
Flux entre les gaz

Nous proposons ici d'étudier l'évolution de la statistique du flux Φ entre les deux gaz. Nous présentons figure 3.23a les distributions de probabilité du flux, $P(\Phi)$. Il est important de noter que dans tous les cas discutés ici, le flux moyen est nul puisque c'est la condition de travail que

nous nous imposons. En revanche, la distribution est de plus en plus large lorsqu'on diminue N : elle ne s'élargit que du côté des flux négatifs, ce qui correspond aux chocs très énergétiques ayant lieu dans le gaz 2, *i.e.* le gaz étudié. En contrepartie, et pour assurer une moyenne nulle, la distribution "se creuse" au niveau des valeurs de flux faiblement négatifs. On montre figure 3.23b l'évolution des moments normalisés d'ordre 3 et 4 (Skewness et Kurtosis) des distributions :

$$S_{\Phi} = \frac{\langle \Phi^3 \rangle}{\langle \Phi^2 \rangle^{3/2}} \quad \text{et} \quad K_{\Phi} = \frac{\langle \Phi^4 \rangle}{\langle \Phi^2 \rangle^2}$$

Initialement, lorsque les deux gaz reliés sont parfaitement identiques, la distribution est symétrique, comme attendu. Lorsque N décroît dans le gaz étudié, elle devient asymétrique (S_{Φ} croît) et de plus en plus pointue (K_{Φ} croît).



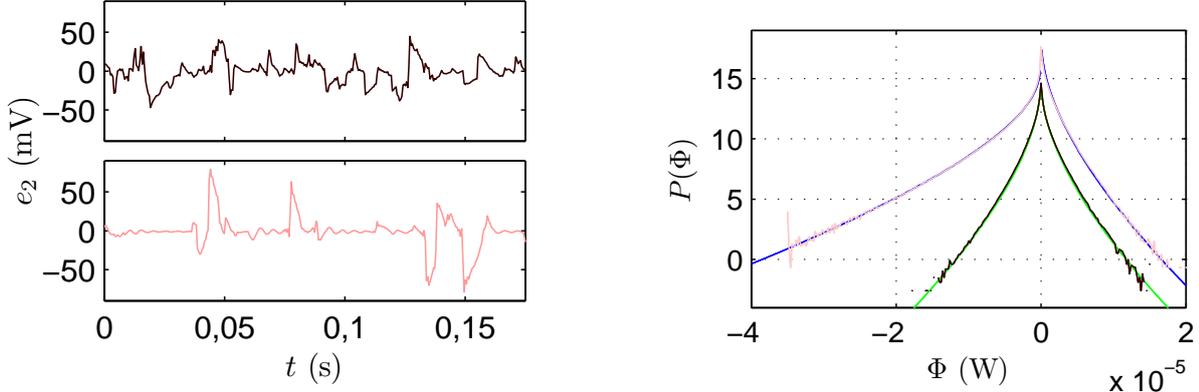
(a) Distributions du flux, $P(\Phi)$, pour plusieurs valeurs de N .

(b) Skewness et Kurtosis de $P(\Phi)$ en fonction de N .

Figure 3.23 – Distributions du flux, $P(\Phi)$, et ses moments normalisés d'ordre 3 et 4, pour plusieurs valeurs du nombre de billes dans le gaz 2, N . Les courbes ont été décalées pour plus de lisibilité.

Notons que la distribution semble assez stable du côté des flux positifs, alors qu'elle évolue beaucoup du côté des flux négatifs. En effet, la forme de la distribution du côté positif est contrôlée uniquement par le gaz 1, alors que la forme du côté négatif est contrôlée par le gaz 2 de densité variable. L'évolution du côté négatif traduit le fait des événements très énergétiques ont lieu mais avec une faible probabilité lorsque N_2 diminue, alors que les événements peu énergétiques deviennent eux de plus en plus rares. Les événements qui ont lieu dans un gaz ou dans l'autre sont statistiquement indépendants, puisque pour créer un flux positif (respectivement négatif), il faut nécessairement qu'une bille frappe la pale dans le gaz 1 (respectivement 2). Supposons que ces événements ne se recouvrent pas temporellement : cette hypothèse paraît justifiée dans le cas où le gaz d'étude est très peu dense, puisque les chocs des billes sur la pale sont très rares (notons tout de même que pour $N_1 = N_2 = 374$, les gaz sont aussi très dilués, mais dans une moindre mesure). Nous présentons sur la figure 3.24a des exemples typiques de signaux $e_2(t)$ dans les cas extrêmes de deux gaz couplés identiques à $N = 374$ billes (en haut), et de deux gaz couplés constitués de $N = 374$ et $N = 20$ billes (en bas). Dans le cas $N_1 = N_2 = 374$, certains chocs se recouvrent temporellement, alors que dans le cas $N_1 = 374 - N_2 = 20$, les chocs sont bien

indépendants.



(a) Signaux $e_2(t)$ mesurés dans un gaz constitué de $N = 374$ billes (haut), et $N = 20$ billes (bas).

(b) Distributions du flux $P(\Phi)$ dans les cas $N_1 = N_2 = 374$ (rouge clair) et $N_1 = 374 - N_2 = 20$ (rouge foncé). Les distributions sont ajustées par la loi donnée par l'équation (3.30) (bleu et vert).

Figure 3.24 – Distributions du flux $P(\Phi)$, entre deux gaz granulaires tels que $N_1 = N_2 = 374$ (rouge clair) et $N_2 = 20$ (rouge foncé). Les distributions sont ajustées par la loi donnée par l'équation (3.30) (bleu et vert).

À partir de cette hypothèse d'indépendance des chocs, nous pouvons prévoir la forme de $P(\Phi)$ via la loi de puissance $\exp(|\nu e_2|^\mu)$ utilisée pour ajuster les ailes de la distribution $P(e_2)$. Sachant que le flux s'exprime en fonction de e_1 et e_2 par $\Phi = [(e_1)^2 - (e_2)^2]/R_t$ (avec $R_t = R + r_1 + r_2$) et en supposant l'indépendance des chocs, on peut prédire la partie positive de la $P(\Phi)$ (respectivement négative) à partir de celle de e_1 (respectivement e_2). On fait pour cela le changement de variable nécessaire :

$$\begin{aligned} Q(e^2)d(e^2) &= P(e)d(e) + P(-e)d(-e) \\ &= 2P(e)d(e) \quad \text{par symétrie.} \end{aligned}$$

On en déduit $Q(e^2) = P(e)/e$. Sachant nous avons utilisé la loi de puissance $P(e) \propto \exp(|\beta e|^\delta)$ on en déduit que $P(\Phi)$ peut être ajustée avec la loi

$$P(\Phi) \propto \exp \frac{[-\beta^\delta |R_t \Phi|^{\delta/2}]}{\sqrt{\Phi}}. \quad (3.30)$$

Nous présentons sur la figure 3.24b les distributions pour les cas $N_1 = N_2 = 374$ et $N_1 = 374 - N_2 = 20$. On voit que l'ajustement est très proche de la courbe, même dans le cas de deux gaz denses couplés. D'autre part, l'ajustement est bon sur les ailes de la distribution, mais aussi proche du pic à $\Phi = 0$. Ceci est probablement lié au fait que les contributions liées au frottement solide dans $P(e_1)$ et $P(e_2)$ se compensent lorsqu'on calcule le flux $\Phi = [(e_1)^2 - (e_2)^2]$.

Énergie injectée

Comme expliqué en introduction de cette partie, nous nous sommes donné comme critère de travailler à flux moyen nul entre les deux gaz granulaires. Le premier étant le gaz de référence, son

agitation et donc toutes ses propriétés sont constantes. En revanche, l'intensité de la vibration qu'il faut imposer au gaz 2 pour qu'il reste en équilibre avec le 1 quand N_2 varie n'est pas facile à déterminer.

Nous présentons figure 3.25a l'évolution avec N de l'amplitude d'agitation nécessaire pour maintenir un flux moyen nul entre le gaz de référence et le gaz d'étude (unité arbitraire, $A = 1$ lorsque les deux gaz en contact sont identiques). On voit que l'amplitude d'agitation n'a pas un comportement monotone avec N . En partant de deux gaz symétriques en contact, $N_1 = N_2 = 374$, vers un gaz très peu dense et un gaz référence, $N_1 = 374 - N_2 = 20$, on voit qu'il faut d'abord diminuer l'agitation du gaz puis augmenter, avec un minimum autour de $N = 100$ billes. Nous proposons dans la suite un raisonnement avec quelques lois d'échelles pour justifier ce comportement en nous basant sur le fait que la puissance injectée dans le gaz compense en moyenne la puissance dissipée.

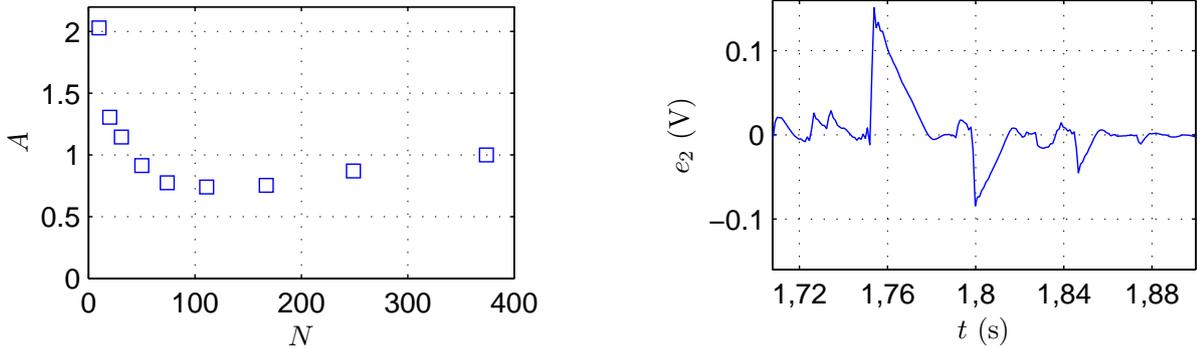
On note ici v la vitesse typique d'une bille et L la dimension typique de la cuve. La puissance injectée dans le système correspond à la pression exercée par le gaz sur la surface inférieure de la cuve, multipliée par sa surface et par la vitesse typique à laquelle elle se déplace :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{inj}} &\sim m\rho v^2 \cdot L^2 \cdot A\omega \\ &\sim mN \frac{v^2}{L} A\omega.\end{aligned}$$

La puissance dissipée dans le gaz est due aux collisions inélastiques. Elle est de l'ordre de la vitesse typique d'une bille, multipliée par la fréquence des chocs et par le nombre de chocs. Il convient de distinguer les collisions bille-bille et les collisions bille-cuve :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{dis}} &= \mathcal{P}_{\text{dis,bille-bille}} + \mathcal{P}_{\text{dis,bille-cuve}} \\ &\sim \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{v}{\rho^{1/3}} \cdot N + \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{v}{L} \cdot N \\ &\sim \frac{m}{2} \frac{v^3 N}{L} (1 + \rho^{1/3} L).\end{aligned}$$

Puisque nous travaillons à E_k constante, la vitesse typique des bille, v , doit l'être aussi. En égalisant les deux quantités, on obtient que l'amplitude d'agitation varie avec N selon $A \sim (1 + N^{1/3})$. Cette loi d'échelle ne décrit que la croissance de A avec N pour les grandes valeurs de N . Notons que nous ne cherchons pas à vérifier la validité de la puissance $1/3$, mais à obtenir une tendance. On arrive ainsi à prévoir que A augmente lorsque N augmente, et que $A \neq 0$ à $N = 0$. Cependant, nos arguments ne permettent pas d'expliquer la forte remontée de A pour les très faibles valeurs de N . Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les frottements solides présents au niveau de l'axe du MCC. En effet, dans le cas des gaz très peu denses, la pale se met à tourner suite à une collision avant que sa vitesse de rotation ne décroisse linéairement jusqu'à devenir nulle (Fig.3.25b). Aucune collision n'a lieu avant la dissipation complète de l'énergie cinétique de la pale. Dans ce cas, la puissance dissipée est simplement donnée par le couple de frottement multiplié par la vitesse typique de la pale : $\mathcal{P}_{\text{dis}} \sim \Gamma_s v$. En écrivant que la puissance injectée compense la puissance dissipée, et puisqu'on travaille à E_k constante,



(a) Évolution avec N de l'amplitude A d'agitation nécessaire pour maintenir un flux moyen nul entre le gaz de référence et le gaz d'étude (unité arbitraire).

(b) Signal temporel $e_2(t)$ typique dans le cas d'un gaz très raréfié ($N = 20$ billes).

Figure 3.25 – Évolution avec N de l'amplitude A d'agitation nécessaire pour maintenir un flux moyen nul entre le gaz de référence et le gaz d'étude (A est donnée en unité arbitraire : $A = 1$ lorsque les deux gaz en contact sont identiques avec $N = 374$ billes chacun).

i.e. v constante, on obtient dans ce régime que $A \sim 1/N$. Cette tendance est compatible avec les résultats expérimentaux observés à faible N . Ceci montre bien l'importance que prend le frottement solide dans notre expérience aux faibles densités.

3.5.4 Conclusion

À travers cette étude, nous avons pu montrer que c'est la variance de la vitesse seule qui domine les mesures des fluctuations de vitesse et de flux, même si les statistiques sont non gaussiennes, voire très loin d'être gaussiennes. Dans notre étude, nous avons négligé les frottements au niveau de l'axe du MCC, en particulier dans l'interprétation de nos résultats. Ceci est justifié à densité assez élevée, puisque la pale subit les collisions des billes très fréquemment, et elle n'a pas le temps de ralentir significativement entre deux collisions successives. En revanche, les frottements peuvent jouer un rôle très important lorsque le gaz est de faible densité : la pale voit sa vitesse diminuer linéairement jusqu'à atteindre zéro entre deux collisions successives. La situation d'un objet soumis à de la friction solide plongé dans un gaz granulaire a été étudiée théoriquement [Touchette *et al.* - 2012] et expérimentalement [Gnoli *et al.* - 2013]. Afin de pouvoir interpréter nos résultats correctement, il est donc important quantifier ces frottements solides. Ainsi, nous pourrions voir dans quelles conditions nous pourrions les négliger ou au contraire comment en tenir compte de façon quantitative dans nos calculs. Un dispositif qui nous permettrait de quantifier le frottement solide est un banc moteur constitué de deux MCC dont les rotors sont couplés mécaniquement. L'un fonctionne en tant que moteur, l'autre en temps que génératrice. La différence entre réponse et le forçage nous permettrait *a priori* de mesurer le couple de frottement Γ_s d'un MCC.

Une évolution possible du dispositif avec deux gaz couplés serait de changer la résistance de couplage, afin de voir l'influence d'un gaz chaud sur un gaz froid : le gaz chaud va imposer un courant important dans le circuit, et donc un couple à la pale plongée dans le gaz froid. Ce

dernier sera donc "réchauffé" par le mouvement de la pale. Dans la limite d'un couplage infiniment fort (résistance nulle), un flux infini se mettrait en place entre les deux gaz. Pour autant, il ne semble pas possible que les deux gaz s'équilibrent et atteignent la même température, puisque la puissance échangée est typiquement de l'ordre de 10^{-5} W, à comparer aux quelques W qui servent à maintenir les billes en mouvement.

3.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donc étudié un gaz granulaire peu dense avec plusieurs dispositifs expérimentaux et avec différents points de vue théoriques. Cette étude expérimentale repose sur le système {Moteur à Courant Continu + Pale} utilisé pour sonder le gaz, à la fois de manière passive mais aussi active. Cela nous permet en premier lieu de quantifier l'agitation du gaz. Pour cela, nous avons défini l'énergie cinétique moyenne de la pale, E_k , qui permet d'accéder indirectement au degré d'agitation des billes qui constituent le gaz. Nous avons également étudié la dynamique de la pale. Nous avons montré qu'elle était proche de celle d'une particule brownienne plongée dans un bain thermique et qu'elle obéissait raisonnablement à une équation de Langevin. En utilisant cette particule brownienne 1D comme une sonde active du gaz granulaire stationnaire, nous avons pu tester la cohérence, au moins partiellement, de deux résultats exacts issus de la Physique Statistique Hors-Équilibre : le TFD et la RF. Nous avons montré que les échelles de températures obtenues via ces deux théorèmes coïncidaient et étaient étroitement liées à l'énergie cinétique de la pale. Il est important de garder à l'esprit que le TFD traduit un cas particulier de la RF, lorsque l'hypothèse de réponse linéaire est vérifiée. Avec une puissance moyenne injectée par la pale inférieure à la puissance qui compense la dissipation de près de 10 ordres de grandeur, on peut raisonnablement faire cette hypothèse. Mais nous voulons souligner que les deux tests présentés sont bien indépendants, puisqu'expérimentalement les modes d'analyse sont distincts et indépendants. Enfin, nous avons mené une étude de la dynamique de la pale en faisant varier la densité du gaz dans laquelle elle est plongée, mais en conservant la même agitation soit avec un gaz seul, soit avec deux gaz couplés électro-mécaniquement. Nous avons montré qu'il est possible d'extraire une échelle de temps caractéristique des corrélations dans la dynamique de la pale, les coefficients de diffusion et de trainée qui interviennent dans la modélisation "à la Langevin", et que la friction solide joue un rôle important dans le fonctionnement de la sonde, en particulier aux très faibles densités.

Pour expliquer les lois d'échelles observées différentes de celles prévues par la théorie cinétique des gaz, nous avons évoqué le problème de la répartition du gaz dans le volume. En effet, comme l'a montré notre étude préliminaire (annexe B.1), la répartition des billes dans le volume est très différente selon l'agitation et la densité du gaz étudié. Nous présentons figure 3.26 une représentation schématique de la répartition des billes dans la cuve dans différents cas répartis sur la courbe présentant l'amplitude nécessaire pour assurer un flux nul en fonction du nombre de bille (Fig. 3.25a). Rappelons que le système {MCC + pale} (en beige sur la figure) est fixe dans alors que la cuve est en mouvement. Ainsi, dans la situation de référence avec $N = 374$ billes, la quasi-totalité du volume est occupé. En revanche, pour $N \simeq 100$ billes, tout le volume n'est pas occupé, et la répartition exponentielle des billes est nette. Enfin, pour $N \simeq 20$ billes, les billes entrent en collision avec la partie supérieure du dispositif, et occupent tout le volume. Or, la sonde que nous utilisons est locale : nous mesurons un comportement moyen du gaz à une hauteur donnée. L'hypothèse de travail qui consiste à dire que nous travaillons à température de gaz fixée n'est alors plus forcément valable, puisque la pale n'interagit pas avec la totalité du gaz.

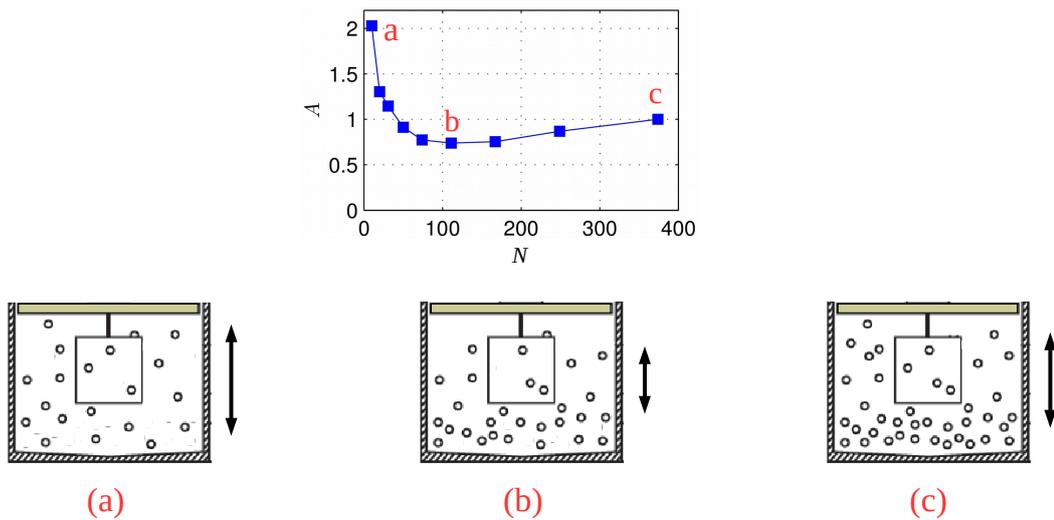


Figure 3.26 – Représentation schématique de la répartition des billes dans la cuve dans le cas (a) d’une faible densité et d’une forte agitation, (b) d’une densité moyenne et d’une faible agitation, (c) d’une densité forte et d’une agitation moyenne.

Notre dispositif simple et innovant peut être modifié de plusieurs façon afin de répondre à plusieurs questions évoquées tout au long de nos différentes études. On peut par exemple penser à fixer le système {MCC + pale} à la cuve afin qu’il soit lui aussi vibré. Ceci éviterait tout risque de détérioration de la pale par contact avec le fond de la cuve, et nous permettrait de travailler à de plus grandes amplitudes de vibrations. On peut également évoquer la taille de la pale, qui ne permet qu’une mesure macroscopique : à l’aide d’une pale plus petite, on pourrait sonder le gaz à différentes hauteurs, afin de caractériser la répartition des billes dans le volume. D’autre part, l’influence des frottements solides semble importante. On peut penser que développer un dispositif sans contact physique ou avec une forte force de rappel permettrait de simplifier la situation. On peut également évoquer la possibilité de placer l’axe du moteur horizontalement, afin de sonder la composante verticale des vitesses des billes.

Enfin, le dispositif avec deux gaz couplés électro-mécaniquement peut être utilisé de plusieurs façons, en variant plusieurs paramètres comme le couplage (résistif, capacitif voire inductif), les pales (taille, matériau) ou encore les billes (nombre, taille, masse, ...). On pourrait également étudier les transitions entre états stationnaires, comme cela a été réalisé auparavant [Mounier et Naert - 2012], mais en conservant un gaz de référence. On peut également penser à un dispositif dissymétrique, de type "ratchet" [Viot *et al.* - 2011], ou à l’étude directe de la diffusion de la pale dans le gaz afin de faire le lien entre température et diffusion.

Conclusions et Perspectives

Les études que nous avons menées dans le chapitre 2 sur la bille rebondissant sur une surface vibrée nous a permis de montrer que le régime stationnaire hors-équilibre dans lequel elle se trouve est, par certains aspects, similaire à un régime d'équilibre, ce qui constitue une première surprise. Par exemple, nous avons montré que les distributions de probabilité de la hauteur, de la vitesse ou de l'énergie de la bille sont très proches de distributions d'équilibre, avec une énergie caractéristique kT qui dépend uniquement des paramètres d'excitation du plateau et de dissipation du contact bille-plateau. Cependant, derrière cette apparence de simple équilibre, se cache en réalité une dynamique complexe au niveau des échanges d'énergie : une simple description du système comme un réservoir à température T n'est pas possible puisqu'une partie des transitions observées d'un état vers un autre n'est tout simplement pas réversible. Face à ce constat, nous avons adopté une autre approche du problème afin de pouvoir poursuivre notre étude. Pour cela, nous avons notamment proposé d'étudier les échanges d'énergie entre la bille et la surface vibrée avec un regard nouveau. En modifiant la définition de la contribution dissipative, nous avons pu nous replacer dans un cadre théorique favorable au calcul de plusieurs quantités comme par exemple le taux de création d'entropie dans le système. En nous basant sur des travaux passés, nous avons pu calculer cette quantité à partir des cartes de taux de probabilité de passage d'un état vers un autre. Nous avons également pu étudier et quantifier l'écart au bilan détaillé, et montrer que la dynamique de notre système n'était finalement pas si éloignée d'une dynamique réversible. Nous avons également pu analyser le processus d'injection d'énergie en nous basant sur la Relation de Fluctuation. Si la validité de la RF n'est pas établie ici, cette étude nous a permis de dégager une échelle d'énergie caractéristique du système. Grâce à tous ces outils, nous avons pu extraire différentes températures effectives, toutes proportionnelles à $m(A\omega)^2/(1-e)$, où $m(A\omega)^2$ est la seule énergie caractéristique du système et $(1-e)$ l'écart à l'élasticité du contact bille-plateau. Il est apparu que ces températures ne sont pas strictement égales, ce qui n'est pas surprenant puisqu'elles caractérisent des processus physiques différents. La suite naturelle de ce travail serait donc d'identifier un cadre théorique adéquat qui nous permette de décrire de façon cohérente ce système en utilisant des concepts de la physique hors équilibre. En particulier, il serait intéressant de voir s'il est possible de réconcilier les différentes mesures de températures en les interprétant différemment, à la lumière de modèles théoriques par exemple.

D'autre part, nous avons étudié dans le chapitre 3 un gaz granulaire peu dense à l'aide d'un

dispositif expérimental innovant et relativement simple à mettre en œuvre. Nous avons étudié ce système avec différents points de vue théoriques en nous basant sur des résultats généraux de la Physique Statistique proche ou loin de l'équilibre. Cette étude expérimentale repose sur le système {Moteur à Courant Continu + Pale} que nous avons conçu et développé pour sonder le gaz granulaire. Cela nous donne la possibilité de travailler à la fois de manière passive mais aussi active. On peut par exemple imposer un couple et mesurer la vitesse de la pale en même temps avec un unique système. D'autre part, aucun étalonnage n'est nécessaire ce qui représente un très grand avantage pour calculer la puissance injectée à la pale (RF) et effectuer la mesure spectrale pour le FDT. Grâce à notre dispositif, nous avons étudié la dynamique de la pale plongée dans le gaz granulaire : nous avons montré qu'elle était proche de celle d'une particule brownienne plongée dans un bain thermique et raisonnablement décrite par une équation de Langevin. En utilisant ce dispositif comme une sonde active du gaz granulaire maintenu stationnaire, nous avons pu montrer que le Théorème de Fluctuation-Dissipation était au moins partiellement vérifié, alors même que ce résultat est valable uniquement proche de l'équilibre. Nous avons également utilisé le cadre théorique de la Relation de Fluctuation pour extraire une échelle d'énergie qui s'apparente à la température effective du gaz. Nous avons montré que ces deux mesures indépendantes de la température effective du gaz granulaire étaient compatibles entre elles, et étroitement liées à l'énergie cinétique de la pale. D'autre part, nous avons mené une étude de la dynamique et des fluctuations de la pale en faisant varier la densité du gaz dans laquelle elle est plongée, en conservant la même agitation via deux dispositifs différents. Ainsi, nous avons montré que les temps caractéristiques ne suivent pas les prédictions de la théorie cinétique et que la friction solide au niveau de l'axe du moteur joue un rôle important dans le fonctionnement de la sonde, en particulier aux très faibles densités. Enfin, nous avons utilisé deux dispositifs expérimentaux identiques pour étudier les flux d'énergie existant entre deux gaz granulaires de densités différentes couplés électro-mécaniquement via le système {pale + MCC}.

À travers nos différentes études, il apparaît que les concepts de la physique à l'équilibre ne s'appliquent pas à nos deux systèmes stationnaires hors-équilibre, ce qui n'est finalement pas surprenant. En revanche, nous avons mis en évidence le fait qu'ils constituent une bonne trame pour notre étude, puisqu'ils fonctionnent au moins partiellement et nous permettent de dégager des échelles d'énergie ou de temps qui caractérisent bien les fluctuations ou la dynamique de nos systèmes.

Le dispositif d'étude du gaz granulaire est le plus prometteur pour mettre en place de nouvelles études, et ce afin de répondre à plusieurs questions évoquées tout au long de ce manuscrit. Une première modification possible du dispositif serait de fixer le système {MCC + pale} à la cuve. En effet, cela nous permettrait de travailler avec des amplitudes de vibrations plus élevées et ainsi d'élargir la gamme d'énergie sondée. D'autre part, cela permet de travailler avec un gaz homogène, ce qui rend l'étude plus simple. Un autre aspect important serait de changer la taille de pale. Il s'agit d'un objet macroscopique qui sert ici de sonde locale, mais on a vu qu'elle ne nous donnait accès qu'à des mesures moyennées sur l'espace qu'elle couvre. On peut aussi évoquer la possibilité de travailler avec des billes nettement plus petites (donc moins massives) afin de pouvoir augmenter significativement de leur nombre dans la cuve. Enfin, le dispositif avec

les deux gaz couplés électro-mécaniquement peut être utilisé en variant le couplage (résistif, capacitif, inductif) ou les billes (nombre, taille, masse).

ANNEXES

ANNEXE A

Stabilité d'une bille rebondissant sur une surface concave

Sommaire

A.1 Introduction	116
A.2 Dispositif expérimental	116
A.3 Résultats préliminaires	117
A.3.1 Premières observations	117
A.3.2 Premier modèle théorique	118
A.4 Résultats détaillés	120
A.4.1 Caractérisation du mouvement de la bille	120
A.4.2 Modèle théorique	121
A.5 Conclusions et perspectives	125

A.1 Introduction

Nous avons étudié dans le Chapitre 2 le mouvement vertical d'une bille qui rebondit sur une surface horizontale vibrée. Nous utilisons, pour maintenir la bille à la verticale sur vibreur, non pas une surface horizontale mais une lentille concave. L'intuition est que la pente ramènera la bille vers le centre si elle vient à s'éloigner de l'axe du vibreur. Cette technique, proposée dans plusieurs études [Pieranski - 1983, Tuffiaro et Albano - 1986], a permis d'étudier, par exemple, les transitions vers la chaos par doublement de période. Lors de la mise au point de notre dispositif expérimental, nous nous sommes rendu compte que, si la bille reste en moyenne sur l'axe du vibreur, elle parcourt en réalité une trajectoire dans le plan horizontal dont l'extension spatiale peut être importante. En dehors d'une étude numérique qui fait état de mouvements horizontaux intermittents induits par la présence d'aspérités [Wright *et al.* - 2008], il n'existe pas dans la littérature de mention d'un mouvement latéral systématique de la bille. Nous avons découvert que la trajectoire purement verticale de la bille est en fait instable et que le mouvement horizontal est le résultat d'une instabilité mécanique.

Dans la mesure où ceci ne rentre pas directement dans le cadre de cette thèse mais que cela présente un intérêt pour la compréhension physique du problème, nous présentons cette étude en annexe. Nous présentons donc ici une étude expérimentale quantitative de ce problème ainsi qu'un modèle théorique pour identifier les mécanismes physiques responsables de cette instabilité.

A.2 Dispositif expérimental

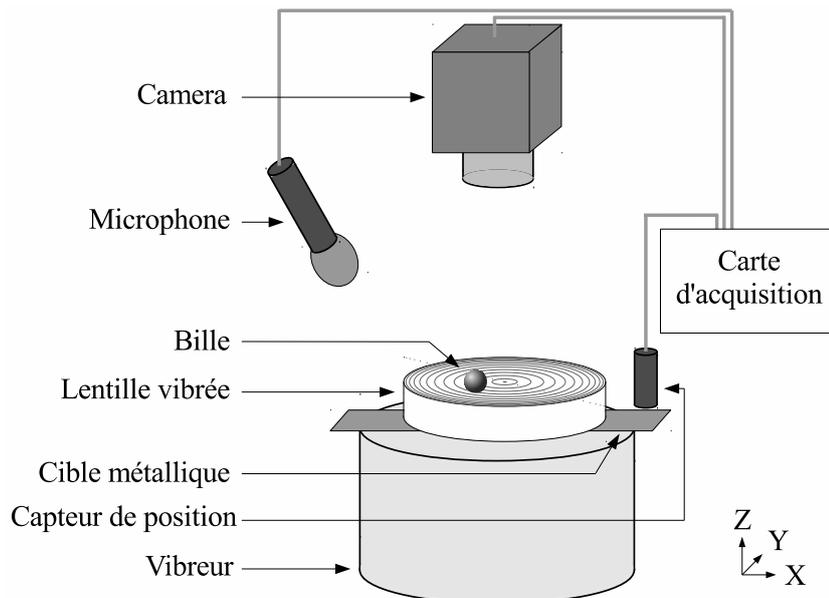


Figure A.1 – Schéma du dispositif expérimental.

Le dispositif expérimental présenté Section 2.2.2 a été modifié, afin de pouvoir étudier

au mieux le mouvement horizontal de la bille (Fig. 2.2). Il est donc constitué d'une lentille parabolique concave de rayon de courbure $R = 15.6$ cm au centre et de diamètre extérieur 10 cm, à laquelle est imposé un mouvement sinusoïdal selon la verticale par le vibreur électromagnétique. Nous utilisons une bille d'acier de rayon $r = 5$ mm qui rebondit sur la lentille. Nous travaillons avec des fréquences de vibrations f allant de 30 à 70 Hz, soit une accélération relative toujours inférieure à 0.7. Le capteur inductif est utilisé pour mesurer la position verticale $z(t)$ de la lentille. Un microphone acoustique classique (Sennheiser, MKH20 P48), relié à une carte son (TASCAM, US 122MKII) elle-même reliée à l'ordinateur, est utilisé pour détecter les impacts de la bille sur la lentille. Enfin, une caméra est ajoutée (jAi, CM080GE) au dessus du dispositif pour détecter la position de la bille dans le plan horizontal au cours du temps. Les signaux issus du capteur inductif et du microphone sont enregistrés pendant toute la durée de l'expérience pour ensuite être traités, alors que les images issues de la caméra sont traitées en temps réel afin de ne stocker que la position de la bille. Nous avons rencontré quelques problèmes pour synchroniser les acquisitions des signaux et des images en particulier pour les hautes fréquence d'acquisition de la caméra. Ceci est très probablement dû à la faible vitesse de transfert des données de la caméra vers l'ordinateur. En conséquence, nous nous sommes limités à une fréquence d'acquisition de $f_i = 20$ Hz pour la camera, ce qui permet tout de même de reconstruire la trajectoire de la bille dans le plan horizontal. La fréquence d'acquisition $f_s = 10$ kHz pour le capteur inductif et le microphone assure, elle, une résolution temporelle suffisante tout en limitant la taille des données à traiter.

Afin de nous limiter à une situation aussi simple que possible, l'amplitude et la fréquence des vibrations imposées à la lentille, $z(t) = A \sin(2\pi ft)$, sont choisies de telle sorte que la bille se trouve dans le Mode 1, *i.e.* la bille entre en collision avec le plateau une fois par période $1/f$ du mouvement vertical du plateau (Sec. 2.2.2). Pour le coefficient de restitution $e \simeq 0.81$ avec lequel nous travaillons, il est nécessaire que l'accélération relative de la lentille ($\Gamma \equiv A(2\pi f)^2/g$) soit suffisamment élevée pour que le Mode 1 puisse exister ($\Gamma > \frac{1-e}{1+e}\pi \simeq 0.33$), mais suffisamment faible pour éviter le doublement de période (ici, $\Gamma < 1$) [Barroso *et al.* - 2009].

A.3 Résultats préliminaires

A.3.1 Premières observations

Une fois la bille placée au centre de la lentille avec un mouvement vertical périodique synchronisé avec celui de la lentille (Mode 1), nous observons un comportement assez étonnant de la bille dans le plan horizontal. Lorsqu'elle s'écarte un peu du centre, elle ne revient pas vers celui-ci mais présente un mouvement complexe, d'amplitude conséquente. Nous présentons sur la figure A.2 une trajectoire typique : la bille s'écarte à peine du centre (à cause d'une aspérité à la surface de la lentille ou des conditions initiales) et commence à suivre une trajectoire elliptique dont le grand axe tourne lentement (Fig. A.2a). Ensuite, l'amplitude typique du mouvement horizontal croît dans les deux directions avant d'atteindre une trajectoire quasi-circulaire dans le régime stationnaire (Fig. A.2b).

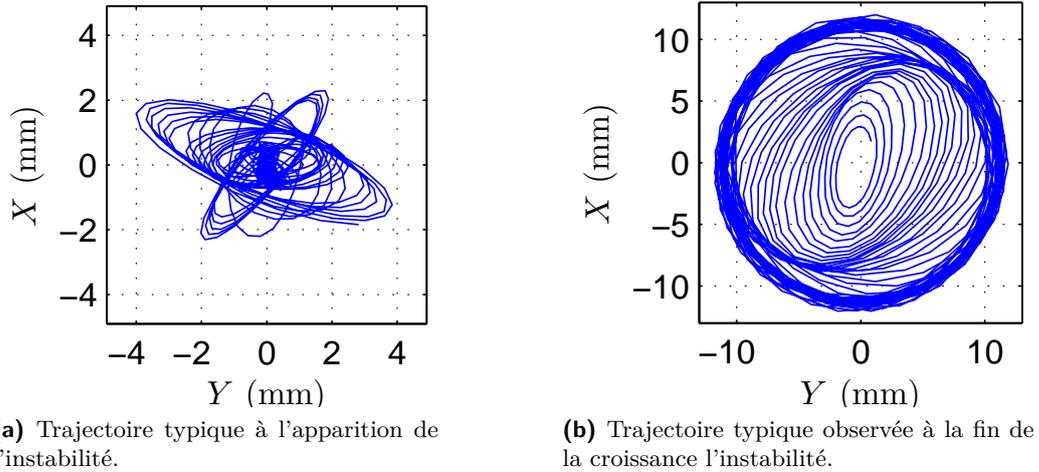


Figure A.2 – Trajectoires typiques de la bille dans le plan horizontal (X-Y) pour $f = 30$ Hz, $A = 4.1 \cdot 10^{-2}$ cm, $R = 15.6$ cm et $r = 0.5$ cm.

Avant de tenter de comprendre les mécanismes responsables de l'apparition de cette instabilité, nous mesurons et analysons la fréquence caractéristique f_0 du mouvement horizontal. Tout d'abord, f_0 est quasi-constante lors de la croissance de l'instabilité et en régime stationnaire. Ensuite, nous constatons que f_0 est quasi-indépendante de la fréquence de vibration f (pour $f \in [30; 70]$ Hz, Fig. A.3a) et totalement indépendante de l'amplitude de vibration A (pour $A \in [0.35; 0.55]$ mm, Fig. A.3b). Pour toutes ces valeurs des paramètres expérimentaux, nous mesurons $f_0 = (1.10 \pm 0.02)$ Hz.

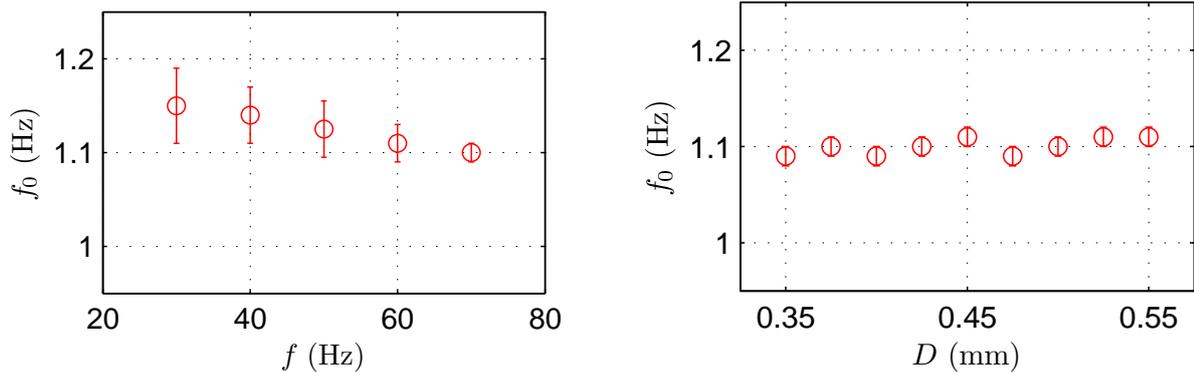


Figure A.3 – Fréquence f_0 du mouvement horizontal en fonction de la fréquence f et de l'amplitude A de vibration de la surface.

A.3.2 Premier modèle théorique

Les observations précédentes peuvent s'expliquer avec quelques arguments simples. Il ne s'agit que d'une première approche pour tenter d'identifier les mécanismes physiques mis en jeu.

Nous considérons ici une modélisation à deux dimensions seulement. On se place donc dans un plan vertical contenant l'axe Z du vibreur et on considère le régime permanent. Puisque la bille se trouve dans le Mode 1, la durée de ses vols entre deux collisions successives est constante et égale à $1/f$, et sa vitesse verticale à la collision vaut $V_z = -g/(2f)$, où z est la coordonnée verticale. Soit x la distance de la bille au centre de la lentille dans le plan horizontal. La pente locale entre surface et l'horizontale vaut alors $\frac{x}{R}$ (R étant le rayon de courbure de la lentille). En supposant que le transfert d'impulsion dans le choc est tel que la variation de vitesse horizontale est proportionnelle à la vitesse d'impact et à la pente locale (Fig. A.4), la variation de vitesse horizontale s'écrit alors $\Delta V_x = 2 \left(\frac{x}{R}\right) V_z$. Étant donné que la bille entre en collision avec la surface à la fréquence f , on peut considérer que $\ddot{x} = f \Delta V_x$ et donc que, $\ddot{x} = -\frac{g}{R} x$.

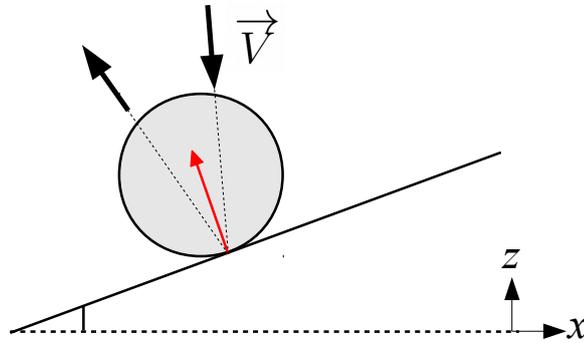


Figure A.4 – Schéma de principe décrivant le rebond de la bille sur une surface inclinée.

Ces arguments assez simples conduisent à un mouvement horizontal périodique de fréquence $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/R}$, soit la fréquence du pendule de longueur R , et donc indépendant de f et A . L'absence de dépendance de f_0 avec A n'est pas surprenante puisqu'aucune caractéristique du mouvement de la bille n'en dépend lorsqu'elle est dans le Mode 1. En revanche, l'absence de dépendance de f_0 avec f n'avait rien d'évident. Avec cette expression, nous obtenons la valeur de $f_0 = 1.26 \text{ Hz}$, ce qui est proche mais significativement plus grand que la valeur mesurée expérimentalement. Notons que l'accord quantitatif n'était pas attendu puisque plusieurs des caractéristiques expérimentales n'ont pas été prises en compte : nous considérons un mouvement dans un plan vertical seulement, nous ne tenons pas compte de la rotation de la bille sur son axe, nous faisons une hypothèse forte quant à la loi de collision et nous ne tenons pas compte de la vitesse de la surface au moment de la collision. Ce plus, si ces arguments permettent de comprendre l'existence d'oscillations, ils ne permettent pas de mettre en évidence le mécanisme d'amplification qui expliquerait la croissance de l'instabilité. Il est donc nécessaire de faire une analyse plus fine du problème.

A.4 Résultats détaillés

A.4.1 Caractérisation du mouvement de la bille

Dans le but de modéliser correctement le système, nous effectuons une série de tests expérimentaux.

- Nous vérifions tout d'abord que l'instabilité n'est pas due à un mauvais contrôle de la verticalité du système. Pour cela, nous inclinons volontairement le système. La seule conséquence est l'observation d'une trajectoire elliptique et non circulaire lorsque le régime stationnaire est atteint, le grand axe de l'ellipse étant orienté selon la direction de plus grande pente.
- Une autre raison potentielle pour l'observation de cette instabilité est la modulation du temps de vol de la bille entre deux collisions due à son mouvement horizontal. En effet, lorsque la bille s'éloigne du centre de la lentille, elle frappe la lentille plus tôt puisque la surface est plus haute. Nous observons que cela n'a pas ou peu d'effet en imposant volontairement une lente modulation de la fréquence de vibration f . La modulation est de l'ordre de 10%, avec une fréquence de l'ordre de f_0 . Nous faisons le même type de test avec une modulation de l'amplitude A de vibration, avec la même conclusion : il n'existe aucun changement notable dans le comportement du système.
- Nous testons également l'influence de la taille de la bille ($r = 1$ mm à 1 cm) et de son matériau (acier inoxydable, P.V.C., plexiglas, liège). Dans tous les cas, l'instabilité apparaît sans qu'il nous soit possible d'étudier séparément l'influence de la taille et du matériau. Cependant, l'instabilité est plus marquée pour les matériaux dont le coefficient de friction est plus grand, signe que le contact bille-lentille joue un rôle très important.

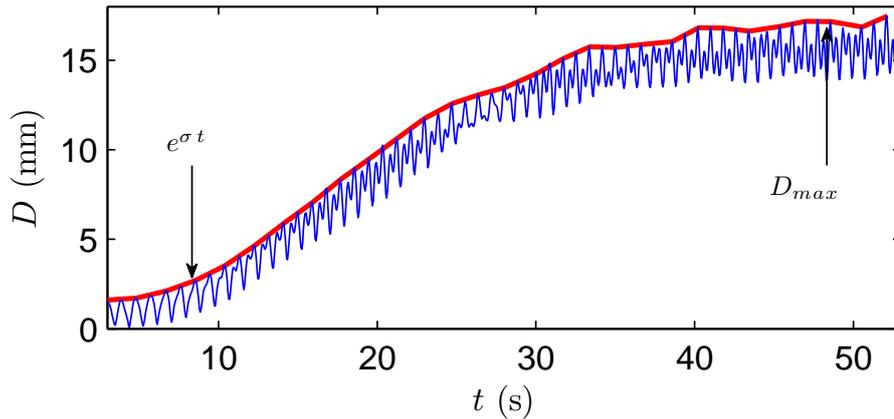


Figure A.5 – Comportement typique de la distance de la bille au centre $D(t)$. On observe d'abord une croissance exponentielle de l'instabilité avec le taux σ , avant qu'elle ne sature à $D(\infty) \equiv D_{max}$. Observation pour $f = 30$ Hz, $A = 4.0 \cdot 10^{-2}$ cm, $R = 15.6$ cm et $r = 0.5$ cm.

Afin de caractériser la croissance de l'instabilité, nous mesurons la distance de la bille au centre de la lentille $D(t)$ en fonction du temps t , comme illustré sur la figure A.5). Le taux de croissance σ est obtenu en ajustant les maxima locaux de $D(t)$ par une expression du type $\exp(\sigma t)$. Nous mesurons également le rayon de la trajectoire en régime stationnaire. On voit sur

la figure que dans ce régime $D(t)$ n'est pas parfaitement constante, et qu'il existe toujours de faibles oscillations. Ces dernières disparaissent au bout d'un temps assez long, mais la valeur moyenne de D reste inchangée et est notée $D(\infty) \equiv D_{max}$. Il est à noter que l'amplitude de vibration A n'a d'influence ni sur σ ni sur D_{max} , tant que la bille reste dans le Mode 1. En revanche, le taux de croissance σ et D_{max} décroissent significativement quand on augmente la fréquence f des vibrations, comme le montre la figure A.6. Chaque point correspond à la moyenne sur 20 mesures différentes, les barres d'erreur étant directement liées à la dispersion des mesures et non à la précision sur la mesure.

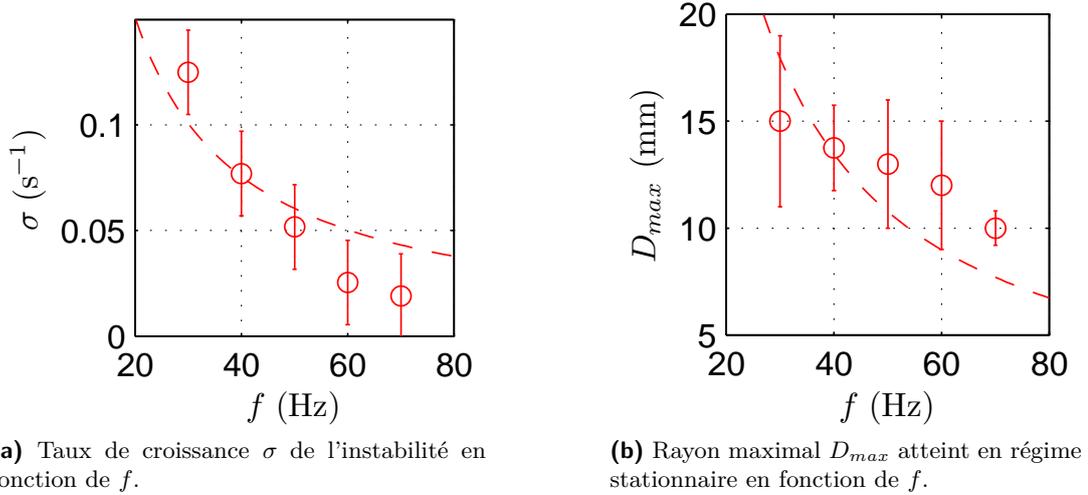


Figure A.6 – Taux de croissance σ de l'instabilité et rayon maximal D_{max} atteint en régime stationnaire en fonction de la fréquence f de vibration. Les cercles représentent la moyenne sur environ 20 mesures. Les lignes pointillées correspondent au meilleur fit $\propto f^{-1}$. Mesures effectuées pour $R = 15.6$ cm et $r = 5$ mm.

A.4.2 Modèle théorique

À partir des observations expérimentales, nous proposons un modèle pour expliquer l'apparition de cette instabilité ainsi que la décroissance observée de σ et D_{max} avec f . Pour cela, nous simplifions le problème en considérant une situation à deux dimensions seulement, dans un plan vertical contenant l'axe de vibration du vibreur. Nous prenons maintenant en compte la rotation propre de la bille (à la vitesse angulaire Ω , où Ω est un scalaire) et nous utilisons un modèle plus physique pour décrire la collision. Nous nous plaçons dans le référentiel associé à la surface vibrée, l'axe vertical étant orienté vers le bas (Fig. A.7). En plus des forces extérieures \mathbf{f}_{ext} , il faut prendre en compte l'accélération d'entraînement due au mouvement du référentiel, $-m A \omega^2 \sin(\omega t) \mathbf{i}$ (m est la masse de la bille, et \mathbf{i} le vecteur unitaire vertical). Le problème est considéré en coordonnées polaires ρ et θ , comme illustré sur la figure A.7. Nous décrivons le mouvement de la bille en le décomposant en deux étapes : le vol libre puis la collision.

Dans toute la suite, nous utilisons la notation \cdot_n^- pour désigner les quantités juste avant la n -ième collision, et un signe \cdot_n^+ après.

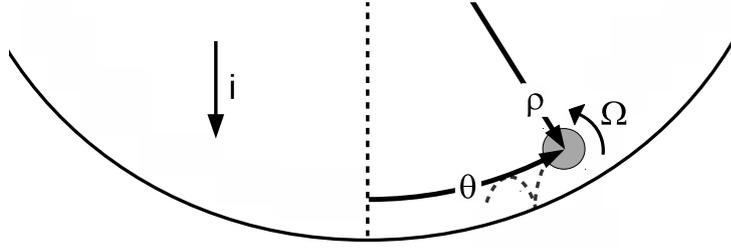


Figure A.7 – Définition des différentes variables ρ , θ et Ω utilisées dans le modèle.

Description du vol libre

La phase de vol libre est la plus facile à décrire puisque dans ce cas $\mathbf{f} = m g \mathbf{i}$ et $\dot{\Omega} = 0$. Pour simplifier les notations, nous introduisons la fréquence caractéristique du pendule de longueur $R - r$, $\nu \equiv \sqrt{g/(R - r)}$. En effet, $R - r$ est la distance entre le centre de courbure de la lentille et le centre de masse de la bille.

L'équation de la dynamique de la bille pendant un vol, décomposée sur les composantes radiale et ortho-radiale, s'écrit

$$(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = g[1 - \Gamma \sin(\omega t)] \cos(\theta) \quad (\text{A.1})$$

$$(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) = -g[1 - \Gamma \sin(\omega t)] \sin(\theta). \quad (\text{A.2})$$

Considérons la composante radiale de l'accélération : $\ddot{\rho}$ est de l'ordre de g alors que $\rho \dot{\theta}^2$ est de l'ordre de $g (\nu/f)^2 \Delta\theta^2$. Or la fréquence caractéristique ν est très petite comparée à la fréquence des vibrations f , et l'amplitude angulaire des oscillations $\Delta\theta$ est inférieure à ou de l'ordre de l'unité. En conséquence, le second terme de l'accélération radiale peut être négligé et on peut prendre $\cos(\theta) \simeq 1$. L'équation (A.1) se réduit donc à

$$\ddot{\rho} = g[1 - \Gamma \sin(\omega t)], \quad (\text{A.3})$$

et peut être résolue analytiquement pour obtenir $\rho(t)$.

Nous considérons que la durée du vol libre est $1/f$, *i.e.* $t_{n+1} = t_n + 1/f$. Les conditions initiale et finale du vol s'écrivent donc $\rho(t_n) = R - r$ et $\rho(t_n + 1/f) = R - r$. Ceci nous permet d'obtenir la solution de l'équation (A.3). A partir de l'expression de $\rho(t)$, on déduit une première relation entre $\dot{\rho}_n^+ \equiv \dot{\rho}(t_n)$ et $\dot{\rho}_{n+1}^- \equiv \dot{\rho}(t_n + 1/f)$:

$$\dot{\rho}_n^+ = A\omega \cos(\omega t_n) - \frac{g}{2f} \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\rho}_n^- + 1 = A\omega \cos(\omega t_n) + \frac{g}{2f}. \quad (\text{A.5})$$

D'autre part, en considérant la collision n , la bille entre en contact avec la surface avec une

vitesse normale $\dot{\rho}_n^-$ et repart avec la vitesse normale $\dot{\rho}_n^+$. Alors, la loi de collision s'écrit :

$$\dot{\rho}_n^+ = -e\dot{\rho}_n^- \quad (\text{A.6})$$

où e est le coefficient de restitution. En utilisant le fait que le mouvement radial est périodique, on obtient la relation $\cos(2\pi f t_n) = \frac{1-e}{1+e} \frac{\pi}{\Gamma}$, ce qui contraint la valeur du temps de collision t_n .

On s'intéresse ensuite à la composante ortho-radiale de l'équation de la dynamique, Eq. (A.2). Toujours dans la limite $f \gg \nu$, on peut négliger le terme $\dot{\rho}\dot{\theta}$ devant $\rho\ddot{\theta}$. En utilisant l'expression de $\rho(t)$ obtenue précédemment, on obtient une équation portant uniquement sur θ , que l'on peut résoudre pour obtenir $\theta(t)$. On a alors l'expression suivante :

$$\dot{\theta}_{n+1}^- = \left[1 - \frac{1}{1+e} \left(\frac{\nu}{f} \right)^2 \right] \dot{\theta}_n^+ - \left(\frac{\nu}{f} \right) \theta_n^+. \quad (\text{A.7})$$

Description de la collision

La description de la collision est plus difficile à mettre en équations, et il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires quant à la loi de collision. Lorsque la bille entre en contact avec la surface, elle est soumise à une force de contact qui peut être décomposée en sa composante normale (radiale) N et tangentielle T .

Nous obtenons tout d'abord une expression pour N en considérant la durée de collision τ , et en écrivant que pour la collision n , on a $\ddot{\rho} = \frac{\dot{\rho}_n^+ - \dot{\rho}_n^-}{\tau}$. On considère également que $N \simeq m\ddot{\rho}$, puisque dans la limite $\tau \rightarrow 0$, l'accélération de gravité est négligeable pendant la collision. En utilisant l'équation (A.6), on obtient alors

$$N = -m(1+e) \frac{\dot{\rho}_n^-}{\tau}. \quad (\text{A.8})$$

La dynamique de la bille à la collision est également gouvernée par deux autres équations. L'équation concernant la vitesse ortho-radiale donne :

$$m(R-r)\ddot{\theta} = T - mg[1 - \Gamma \sin(2\pi ft)] \sin(\theta). \quad (\text{A.9})$$

Le théorème du moment cinétique donne une relation entre le couple rT et le moment angulaire $J\dot{\Omega}$:

$$J\dot{\Omega} = rT \quad (\text{A.10})$$

où $J = \frac{2}{5} m r^2$ pour une bille pleine. Les équations (A.9) et (A.10) font toutes les deux intervenir la composante tangentielle T de la force de contact, et il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire pour continuer le raisonnement.

Nous supposons que le contact entre la bille et la surface est décrit par les lois d'Amontons-

Coulomb. Lorsque le contact est glissant, on a $T = \mu S(v_I) N$ ($N < 0$), en notant S la fonction signe et $v_I = r \Omega + (R - r) \dot{\theta}$ la vitesse du point de contact I . Or, puisque la bille est initialement au centre de la lentille, la composante tangentielle T peut légitimement être négligée par rapport à la composante normale. En conséquence, on peut supposer que le point de contact I n'est pas glissant, et que sa vitesse v_I est soumise à une loi de collision similaire à la loi de collision pour les vitesses normales [Eq. (A.6)] :

$$v_{In}^+ = e' v_{In}^- \quad (\text{A.11})$$

On introduit donc ici un second coefficient de restitution qui est potentiellement différent de e [Domenech-Carbo - 2014]. Les équations (A.9), (A.10), (A.11) conduisent alors à :

$$\Omega_n^+ = \frac{2 + 5e'}{7} \Omega_n^- + \frac{5(1 - e')}{7} \frac{R - r}{r} \dot{\theta}_n^- \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\theta}_n^+ = \frac{5 + 2e'}{7} \dot{\theta}_n^- + \frac{2(1 - e')}{7} \frac{r}{r - R} \Omega_n^- \quad (\text{A.13})$$

La collision est donc totalement décrite par les équations (A.6), (A.12) et (A.13) : à partir des valeurs des quantités $\dot{\rho}_n^-$, Ω_n^- et $\dot{\theta}_n^-$ avant la n -ième collision, on obtient celles de $\dot{\rho}_n^+$, Ω_n^+ et $\dot{\theta}_n^+$, après la collision.

Description complète

Nous considérons maintenant plusieurs collisions successives.

Nous avons obtenu les équations (A.7), $\theta_{n+1}^- = \theta_n^+ + \dot{\theta}_n^+ / f$ et $\Omega_{n+1}^- = \Omega_n^+$ qui donnent les variations de θ , $\dot{\theta}$ et Ω pendant la période de vol entre les collisions n et $n + 1$. Ensuite, nous utilisons les équations (A.6), (A.12) et (A.13) pour décrire leurs évolutions suite à la collision. Ceci nous permet d'obtenir une relation de récurrence pour le vecteur $\mathbf{X}_n = (\epsilon \Omega_n^+, \dot{\theta}_n^+, \theta_n^+)$, où $\epsilon \equiv r / (R - r)$. Cette relation s'écrit $\mathbf{X}_{n+1} = \mathcal{M} \mathbf{X}_n$, avec

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{(2+5e')}{7} & \frac{5(1-e')}{7} \left(1 - \frac{\nu^2}{(1+e)f^2}\right) & -\frac{5(1-e')}{7} \frac{\nu}{f} \\ \frac{2(1-e')}{7} & \frac{(5+2e')}{7} \left(1 - \frac{\nu^2}{(1+e)f^2}\right) & -\frac{(5+2e')}{7} \frac{\nu}{f} \\ 0 & \frac{\nu}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Cette relation de récurrence donne l'évolution des trois quantités Ω_n^+ , $\dot{\theta}_n^+$, et θ_n^+ au fur et à mesure des chocs successifs. On peut prédire leur évolution en calculant les valeurs propres de \mathcal{M} , celles qui nous intéressent étant les deux valeurs propres conjuguées λ_{\pm} . L'évolution temporelle de Ω , $\dot{\theta}$ et θ va alors être du type $\exp(\sigma t) \cos(2\pi f_0 t)$ avec $\sigma = f \ln(|\lambda|)$ et $f_0 = f / (2\pi) \text{Arg}(\lambda)$. On obtient, au premier ordre non nul en $\frac{\nu}{f}$, des oscillations à la fréquence

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5}{7}} \nu + \mathcal{O}\left(\frac{\nu}{f}\right), \quad (\text{A.15})$$

dont l'amplitude croît avec le taux

$$\sigma = \frac{5e - 2e' - 7ee'}{14(1+e)(1-e')} \frac{\nu^2}{f} + \mathcal{O}\left(\frac{\nu^2}{f^2}\right). \quad (\text{A.16})$$

Pour rappel, ces résultats sont obtenus dans la limite $f \gg \nu$, $\nu \equiv \sqrt{g/(R-r)}$. Avec les valeurs des paramètres expérimentaux, nous obtenons $f_0 = (1.095 \pm 0.005)$ Hz, soit un accord excellent avec la valeur mesurée expérimentalement ($f_0^{\text{exp}} = (1.10 \pm 0.02)$ Hz). D'autre part, l'expression théorique de σ prévoit une décroissance lorsque f augmente, ce qui est observé expérimentalement. (Fig. A.6a). Le meilleur ajustement avec les données expérimentales conduit à une valeur plausible de e' : $e' \approx 0.45$ [Domenech-Carbo - 2014].

Enfin, notons que le modèle ne prévoit pas de saturation pour la croissance de l'instabilité. On peut malgré tout penser que la saturation provient du glissement au contact entre la bille et la lentille. Cette idée est étayée par une observation relatée plus tôt (Sec.A.4.1) : les billes ayant un coefficient de friction plus élevé suivent une trajectoire de plus grande amplitude lorsqu'elles sont en régime stationnaire. En effet, lorsque la bille est suffisamment loin du centre de la lentille, la pente devient importante et le glissement paraît inévitable. Lorsque le rapport des composantes tangentielle et normale de la force de contact, $|T/N|$, dépasse le seuil de friction μ , la bille se met à glisser. A partir de la dynamique de la bille, on peut estimer T/N . Nous avons obtenu une expression pour N [Eq. (A.8)]. Nous faisons de même pour obtenir l'expression de T en utilisant l'équation (A.11) : $T = \frac{2}{7\tau} \frac{1-e'}{e'} m [r \Omega_n^+ + (R-r) \dot{\theta}_n^+]$. En utilisant la solution croissante et périodique de fréquence f_0 pour $\theta(t)$, on obtient que le seuil de glissement est atteint pour l'amplitude

$$D_{\max} \simeq \frac{49\pi}{20} \frac{(1+e)e'}{1-e'} \left(\frac{f_0}{f}\right) \mu R. \quad (\text{A.17})$$

Même si l'accord avec les résultats expérimentaux peut être mis en question, en particulier la dépendance de D_{\max} avec f , l'accord qualitatif du modèle avec les données expérimentales (voir Fig. A.6) donne $\mu \approx 0.3$, ce qui est encore une fois une valeur plausible. De plus, l'hypothèse du glissement au point de contact est étayée par le fait que la trajectoire n'est pas vraiment circulaire mais présente des oscillations, des dérapages plus ou moins erratiques, lorsque la bille est dans le régime stationnaire (Fig. A.5).

A.5 Conclusions et perspectives

Si l'accord avec les données expérimentales est seulement qualitatif, c'est très probablement parce que nous avons considéré un modèle à deux dimensions pour décrire un problème qui lui est à trois dimensions. Nous avons essayé de réaliser l'expérience en deux dimensions pour pouvoir comparer les résultats à notre modèle. Pour cela, nous avons confiné la bille entre deux murs verticaux. Cependant, la friction entre la bille et les murs empêche l'apparition de toute instabilité. D'un point de vue théorique, un modèle tridimensionnel est probablement possible, mais il est alors nécessaire de choisir un modèle qui décrive bien la collision pour avoir un bon accord avec les résultats expérimentaux. Or, une telle modélisation est encore aujourd'hui sujet

à débat [Thornton *et al.* - 2013, Domenech-Carbo - 2014]. Notons également que l'apparition de l'instabilité étant conditionnée assez finement à la loi de contact, l'étude numérique du problème pourrait être intéressant pour tester la validité de plusieurs modèles codés en éléments discrets (DEM) [Cundall et Strack - 1979].

Pour conclure, il convient de décrire une dernière observation expérimentale : la bille peut expérimenter un mouvement périodique et s'arrêter, c'est-à-dire ne plus rebondir, au bout d'un certain temps. Ceci intervient le plus souvent avant que l'instabilité ne soit pleinement développée. Lors de notre étude, ce fait expérimental n'a pas été étudié, mais nous avons proposé à un étudiant de l'ENS de Lyon, Clément Gouillier, d'étudier spécifiquement ce problème. Pour cela, il a proposé d'observer la trajectoire de la bille dans l'espace des phases constitué de la vitesse initiale et de la phase initiale de choc. Par une simulation numérique, il a pu déterminer les zones dans l'espace des phases conduisant à une trajectoire périodique ou bien à un arrêt de la bille. On montre par exemple figure A.8 une carte de l'espace des phases obtenue pour $\Gamma = 0.4$. Les zones vertes correspondent à des conditions initiales menant à une trajectoire périodique, les zones rouges à un arrêt. Le point noir est l'attracteur théorique : c'est la position où devraient se trouver tous les points s'il n'y avait pas d'instabilité, *i.e.* si la bille entrait en collision avec la lentille toujours avec la même vitesse et la même phase. Sur cette carte ont été superposés les points expérimentaux (bleus) d'une trajectoire instable menant à l'arrêt de la bille. Les croix roses sont les six derniers points de cette trajectoire et on voit qu'ils se rapprochent sensiblement du bord de la zone stable. Cette observation montre que l'arrêt de la bille est provoqué par sa sortie du bassin d'attraction du mode périodique. L'instabilité provoque une exploration de l'espace des phases dont l'extension peut être telle que les conditions de rebond ne sont plus satisfaites. Cette étude donnera lieu prochainement à une publication.

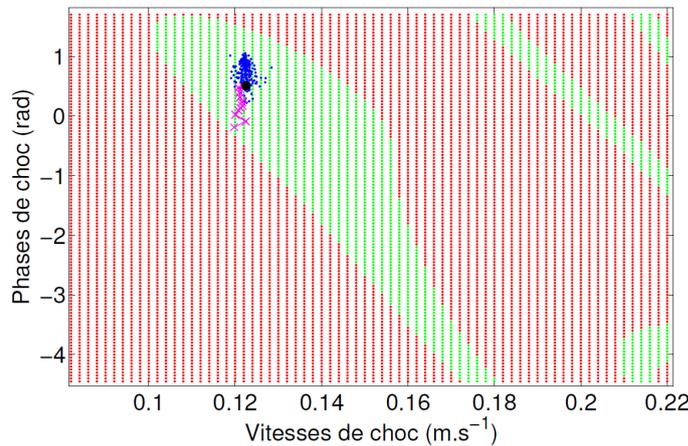


Figure A.8 – Carte de l'espace des phases (vitesse et phase de choc) pour $\Gamma = 0.4$, sur laquelle on a superposé les points expérimentaux d'une trajectoire menant à l'arrêt de la bille. Les points bleus sont les points expérimentaux, les croix roses sont les six derniers points de la trajectoire.

ANNEXE B

Travaux complémentaires sur les gaz granulaires

Sommaire

B.1	Température cinétique du gaz	128
B.2	Temps entre deux chocs successifs	129

Nous présentons dans cette annexe des travaux encore en cours concernant le gaz granulaire. Dans la première partie, nous présentons une ébauche de dispositif expérimental qui permet de visualiser le gaz granulaire au sein de la cuve vibrée. Ceci nous permettrait de mesurer les vitesses des billes et de mesurer directement la température cinétique du gaz, mais aussi de quantifier la répartition des billes dans la cuve. Dans la seconde, nous présentons un nouveau dispositif expérimental qui, couplé à celui présenté dans le chapitre 3, pourrait nous permettre de mesurer les temps caractéristiques importants pour décrire la dynamique du gaz granulaire.

B.1 Température cinétique du gaz

L'un des problèmes évoqués dans le chapitre 3 est l'impossibilité de mesurer la température cinétique du gaz. En effet, notre dispositif nous permet de mesurer l'énergie cinétique moyenne de la pale que nous supposons proportionnelle à la température, sans pouvoir le prouver. D'autre part, le TFD et la RF nous ont permis de mesurer des températures effectives et nous aimerions pouvoir les comparer à une valeur. Pour cela, nous avons réalisé une cuve en verre transparent de même dimensions que la cuve en Dural (Fig. B.1), ce qui nous permet de suivre le déplacement des billes au sein de la cuve. Notons que la dynamique du gaz peut être légèrement différente selon si la cuve est en Dural ou en verre. En effet, la restitution lors d'un choc entre une bille et les parois latérales de la cuve est différente. Malgré tout, cette différence n'est pas majeure, et ne change pas la physique du problème. Cela nous permet nous permet de faire quelques vidéos et d'estimer la vitesse des billes. Ainsi, dans la gamme d'amplitude de vibrations correspondant à $E_k \simeq 1 \cdot 10^{-7}$ J, nous mesurons une vitesse typique $\bar{v} \simeq 20 \text{ cm s}^{-1}$. En écrivant $\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$, on obtient une estimation de la température cinétique du gaz, $kT \simeq 1 \cdot 10^{-6}$ J, soit le même ordre de grandeur que les températures effectives kT_{TFD} et kT_{RF} . Ceci nous confirme que les mesures obtenues via le TFD et la RF ont un sens physique et qu'il ne s'agit pas uniquement d'un paramètre issu d'une relation mathématique : il s'agit bien de la température cinétique du gaz. Notons également que la photo fait clairement apparaître la stratification du gaz, comme expliqué à la fin du chapitre 3.



Figure B.1 – Photo du dispositif expérimental utilisant une cuve transparente afin de visualiser le déplacement des billes dans le gaz granulaire.

Cette mesure préliminaire nous conforte dans notre volonté de faire du suivi de particules au sein du gaz. Ceci nous permettrait de mettre en évidence les propriétés moyennes du gaz en fonction de plusieurs paramètres comme l'agitation de la cuve, mais aussi la taille ou la masse des billes. D'autre part, cela nous permettrait de mettre en évidence la différence de dynamique et de statistique des vitesses entre le haut et le bas de la cuve par exemple.

B.2 Temps entre deux chocs successifs

Comme nous l'avons vu, il est difficile de sonder le gaz granulaire dans son volume et la pale ne peut pas nous donner de mesure directe du libre parcours moyen ou des temps de vol des billes dans le gaz. Ceci a été réalisé dans un gaz granulaire soumis à des vibrations sinusoïdales en faible gravité [Falcon *et al.* - 2006]. Les auteurs ont pu mesurer l'évolution de la fréquence typique des collisions avec la vitesse typique du mur vibré et le nombre de particules. Ils montrent en particulier que la fréquence typique des collisions ne croît pas linéairement avec le nombre de particules, et ce à cause de la nature dissipative des contacts.

Plus simplement, nous aimerions avoir une idée de la dynamique des billes qui constituent le gaz, et en particulier des temps caractéristiques mis en jeu. Or, cela n'est pas possible avec notre dispositif expérimental constitué du système {pale + MCC} car le signal de la fém du MCC ne nous permet pas de distinguer les impacts successifs des billes sur la pale. En effet, les impacts sont trop rapprochés dans le temps (en particulier aux fortes densités) ce qui nous empêche de les séparer temporellement et de mesurer l'amplitude de la vitesse de la pale consécutivement au choc. En conséquence, nous avons fait une série de mesures en remplaçant la pale reliée au MCC par un capteur d'impact. L'objectif est de mesurer le temps typique entre deux collisions, puis de voir comment il dépend de l'amplitude ou de la fréquence de vibration de la cuve et comment il se compare aux temps caractéristiques de la pale mesurée précédemment (Sec. 3.4.2).

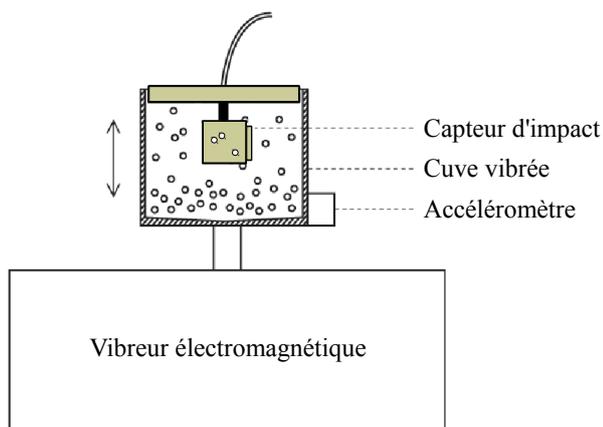


Figure B.2 – Schéma du dispositif expérimental avec le capteur d'impact. La partie beige {capteur + couvercle} est fixe.

Nous utilisons un capteur (PCB Piezotronics, SN LW40562), dont taille comparable à celle de la pale, mais qui est fixe (Fig. B.2). Il s'agit d'un capteur piezo-électrique, qui détecte les

impacts sur l'une de ses surfaces verticales. Ainsi, la tension U qu'il délivre fait apparaître des pics de plus ou moins forte amplitude à chaque fois qu'une bille entre en collision avec la surface sensible (Fig. B.3). Une calibration permettrait *a priori* de relier l'intensité d'un pic à la composante normale de la vitesse de la bille. Cependant, le capteur n'a pas la même sensibilité sur tout sa surface, ce qui rend la calibration impossible puisqu'on ne sait pas discriminer les effets de l'angle d'impact et de position sur le capteur. Nous avons donc limité l'utilisation du capteur à la mesure des temps d'attente entre deux chocs successifs. On fait l'acquisition de la tension U en utilisant le logiciel LabViewTM, couplé à une carte d'acquisition (NI PXIe-4462). L'acquisition se fait à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 200$ kHz. Les données sont ensuite traitées et analysées sur le logiciel Matlab[©]. En utilisant un seuillage adapté, nous détectons les instants où des pics apparaissent, ce qui correspond à un impact d'une bille (Fig. B.3). On voit que les pics sont bien séparés dans le temps, ce qui nous permet de bien distinguer temporellement deux impacts successifs.

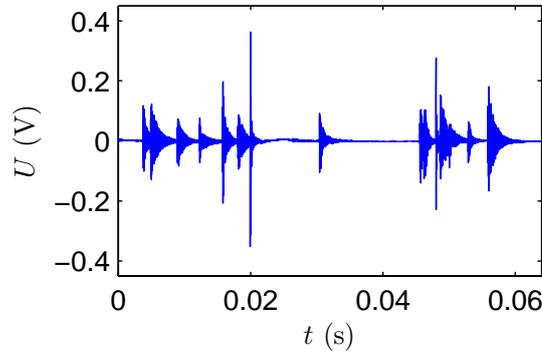
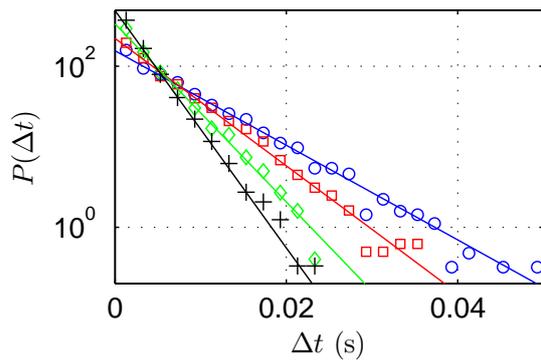


Figure B.3 – Signal $U(t)$ typique, mesuré pour un gaz constitué de $N = 374$ billes confiné dans une cuve soumise à une accélération $a = 2.7$ g.

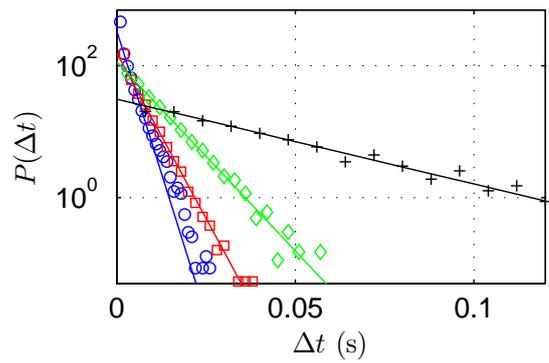
Cela nous permet donc pour un couple (A, f) d'amplitude et de fréquence de vibration de la cuve, de mesurer la distribution des temps d'attente Δt , entre deux collisions successives (Fig. B.4a et B.4a). On voit que les distributions peuvent être ajustées par une loi exponentielle :

$$P(\Delta t) = \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right). \quad (\text{B.1})$$

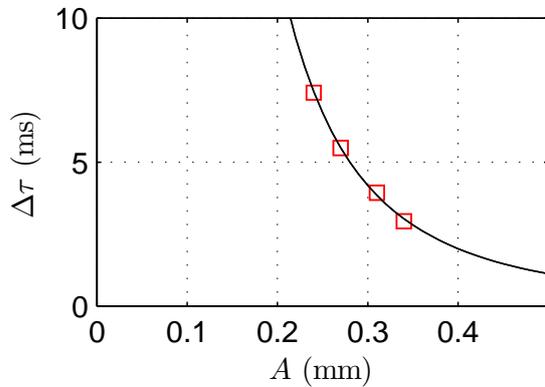
Nous traçons donc l'évolution de $\Delta\tau$ avec A (Fig. B.4c) et avec f (Fig. B.4d). Notons qu'il est très difficile d'obtenir des lois d'échelles robustes avec si peu de données. Malgré tout, on voit que $\Delta\tau$ dépend de A et f selon des lois de puissances. Notons également que les temps $\Delta\tau$ sont du même ordre de grandeur que les temps caractéristiques de la pale mesurés à la section 3.4.2). Pour pouvoir aller plus loin dans l'analyse, ils serait nécessaire d'avoir plus de données expérimentales et de réaliser deux mesures pour un couple (A, f) d'amplitude et de fréquence de vibration de la cuve donné : la première avec la pale, pour mesurer E_k et τ_c , la seconde avec le capteur d'impact, pour mesurer $\Delta\tau$. Ceci nous permettrait de conclure quant à la dépendance de $\Delta\tau$ avec A , f et E_k et de le comparer avec τ_c .



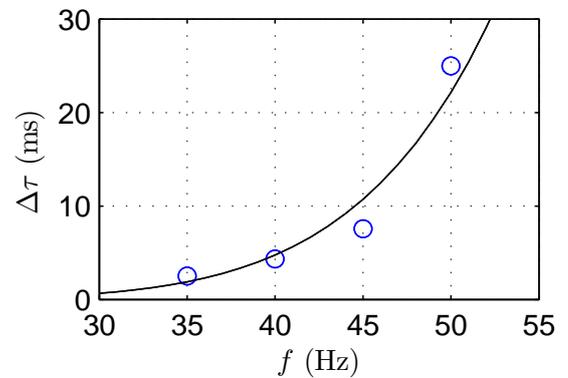
(a) $P(\Delta t)$ à $f = 40$ Hz et $A = 0.24$ (ronds bleus), 0.27 (carrés rouges), 0.31 (diamants verts) et 0.34 mm (croix noires).



(b) $P(\Delta t)$ à $A = 0.31$ mm et $f = 35$ (ronds bleus), 40 (carrés rouges), 45 (diamants verts) et 50 Hz (croix noires).



(c) Temps caractéristique $\Delta\tau$ en fonction de A à $f = 40$ Hz (carrés rouges), ajusté par une loi de puissance $T \propto A^\mu$ avec $\mu = -2.6 \pm 0.2$ (ligne noire).



(d) Temps caractéristique $\Delta\tau$ en fonction de f à $A = 0.31$ mm (ronds bleus), ajusté par une loi de puissance $T \propto f^\mu$ avec $\mu = 12 \pm 4$ (ligne noire).

Figure B.4 – Distributions de probabilité, $P(\Delta t)$, des temps d'attente entre chocs et temps caractéristiques $\Delta\tau$ associés, pour différentes amplitudes A et fréquences f de vibrations de la cuve.

ANNEXE C

Étude d'un autre système dissipatif stationnaire : dynamique d'une chaîne de patins frictionnels

Sommaire

C.1 Introduction	134
C.2 Description du modèle	135
C.2.1 Construction du processus	136
C.2.2 Choix des paramètres	138
C.3 Étude complète d'un processus	138
C.3.1 Caractéristiques du processus	139
C.3.2 Théorème de Fluctuation-Dissipation	141
C.3.3 Relation de Fluctuation	143
C.4 Résultats globaux	145
C.4.1 Résultats à taille de système fixée ($N = 30$ blocs)	145
C.4.2 Influence de la taille de système	146
C.5 Évolution du modèle et perspectives	147

Le travail présenté dans cette annexe a été effectué en collaboration avec Luis A. Pugnioni, lors de ma visite de trois mois dans le groupe qu'il dirige, dédié à l'étude des matériaux granulaires dans le Département d'Ingénierie Mécanique de la Facultad Regional La Plata - Universidad Tecnológica Nacional, à La Plata en Argentine. Ce travail est présenté en Annexe car il n'est pas encore abouti et complet pour des questions de temps, mais présente un intérêt certain dans le cadre de cette thèse. En effet, il s'agit d'une étude d'un autre système macroscopique dissipatif, dans laquelle on utilise les mêmes concepts et outils de la physique statistique hors-équilibre que ceux utilisés dans les parties précédentes.

C.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à deux types de systèmes dissipatifs : une bille unique au contact d'un plateau vibrant (Chapitre 2), et un gaz granulaire contenu dans une boîte vibrée (Chapitre 3). Dans le premier, outre les corrélations et les fluctuations du système, nous avons étudié les échanges irréversibles d'énergie entre la bille et le plateau qui sert de thermostat. Dans le second, nous nous sommes encore intéressés à des échanges irréversibles d'énergie, cette fois entre une petite pale mobile et un gaz granulaire qui sert de thermostat stationnaire hors équilibre. Dans ces deux systèmes, nous avons notamment mis en œuvre un protocole de mesure de la température effective du thermostat en s'appuyant sur le théorème de fluctuation. Nous proposons ici l'étude inachevée d'un troisième système stationnaire hors équilibre, en utilisant la même démarche : une chaîne de patins soumis à de la friction solide, reliés entre eux par des ressorts, le tout reposant sur un support. Pour en étudier la dynamique, on peut solliciter le système de façon mécanique de différentes façons :

- en imposant une succession d'impulsions (force imposée sur une courte durée) à un patin,
- en imposant une traction à vitesse (ou force) constante,
- de façon thermique, en imposant des dilatations aux patins ou aux ressorts.

Ce système a été initialement étudié pour décrire la dynamique discontinue et intermittente des séismes [Burridge et Knopoff - 1967, Carlson et Langer - 1989]. Ce système a également été utilisé pour modéliser l'interaction entre plusieurs grains, contrôlée en grande partie par la friction solide [Géminard et Bertin - 2010]. De fait, le passage d'un état bloqué à un état glissant d'un seul contact parmi des dizaines/centaines d'autres constitue un réarrangement irréversible du système. Le système a été étudié pour simuler la compaction d'une colonne de grains soumise à une contrainte thermique cyclique [Blanc et Géminard - 2013]. On peut expliquer la déstabilisation du système en modélisant deux grains par des blocs solides (Fig. C.1). L'élasticité du matériau peut être modélisée par un ressort reliant ces deux blocs solides, l'effet de la température étant pris en compte dans la variation longueur à vide du ressort. Pour créer un mouvement d'ensemble du système et briser sa symétrie, le support doit être incliné par rapport à l'horizontale. On s'attend ainsi à ce que le système se déplace dans le sens de la pente.

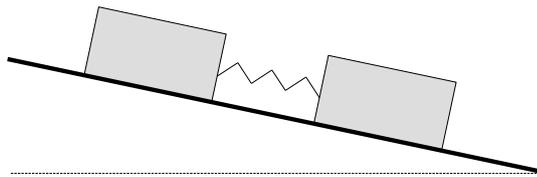


Figure C.1 – Schéma simplifié du système étudié : les billes sont remplacées par des blocs

Pour ce qui concerne le cadre de cette thèse, ce système peut être considéré comme un système modèle pour étudier la mécanique statistique des systèmes dissipatifs, comme évoqué dans [Aumaitre *et al.* - 2001]. En effet, la friction solide entre les patins et le sol induit des pertes d'énergie pour le système à chaque fois qu'un patin, au moins, se déplace. Il est donc nécessaire d'injecter en continu de l'énergie au système pour le maintenir en mouvement. Nous nous proposons d'étudier ce système sur la base du modèle construit par Blanc *et al.* [Blanc *et al.* - 2011, Blanc *et al.* - 2014] : nous imposons de façon cyclique des dilatations aux ressorts, de sorte que l'équilibre des forces soit rompu.

C'est donc avec les mêmes objectifs que précédemment que nous pouvons étudier ce système qui n'est pas gouverné par la mécanique statistique à l'équilibre : tenter de décrire la dynamique du système en utilisant des outils issus de la physique proche de l'équilibre. Grâce au Théorème de Fluctuation-Dissipation ou à la Relation de Fluctuation, notre objectif sera de voir s'il est possible de définir une ou plusieurs températures pour notre système, et de comprendre ce qu'elles représentent au niveau physique.

C.2 Description du modèle

Le système d'étude est composé de N blocs ponctuels de masse identique m (Fig. C.2). La position du bloc i est notée x_i . Ces blocs sont reliés à leurs voisins par des ressorts de masse nulle, de constante de raideur k et de longueur à vide l variable. Chacun de ces blocs est soumis aux forces élastiques des 2 ressorts voisins, à son poids mg (g étant l'accélération de la pesanteur) et à la force de réaction du plan incliné sur lequel ils sont posés, ce dernier faisant un angle α avec l'horizontale. La force élastique induite par le bloc $i + 1$ sur le bloc i vaut

$$f_{i+1 \rightarrow i} = -k[x_i - x_{i+1} + l]. \quad (\text{C.1})$$

La force exercée par le plan incliné sur un bloc possède une composante tangentielle et une composante normale au plan de contact. La composante normale compense la composante normale du poids du bloc, $mg \cos(\alpha)$. La composante tangentielle est donnée par les lois d'Amontons-Coulomb qui seront discuté dans la suite. Nous travaillerons dans la suite avec des variables adimensionnées, en prenant comme échelle de temps $\tau_{dyn} = (\frac{m}{k})^{1/2}$ et comme échelle de longueur $L = \frac{mg}{k}$.

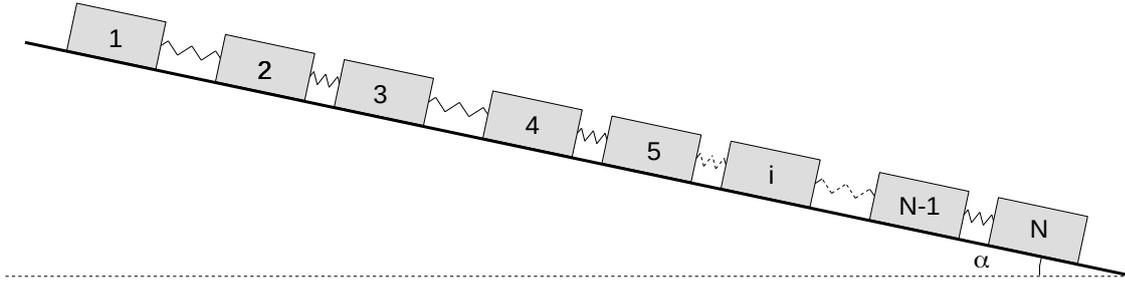


Figure C.2 – Schéma du système étudié.

C.2.1 Construction du processus

Nous décrivons ici la façon dont processus étudié, constitué d'une succession d'étapes, fonctionne. On le considère au repos, à la fin de l'étape $q - 1$. On décrit donc l'étape q .

- Selon les positions de chacun des blocs et de la valeur de chacune des longueurs à vide des ressorts, il peut exister des tensions au sein du système. En effet, quand le bloc i est à l'arrêt, il faut que la résultante des forces tangentielles qui s'exercent sur lui ne dépasse pas en valeur absolue le seuil de friction $\mu_s mg \cos \alpha$, en accord avec les lois d'Amontons-Coulomb. Le coefficient de friction statique μ_s caractérise les forces de contact entre le plan incliné et un bloc. La condition de vitesse nulle nous permet de savoir que la position du bloc i ne change pas. Nous ne disposons *a priori* que d'un encadrement de la force de friction. La valeur de la composante tangentielle de la réaction du support est donnée par la condition que la somme des forces appliquées au bloc i à l'arrêt est nulle.

- Afin de mettre le système en mouvement, nous appliquons une variation de la longueur à vide des ressorts (par analogie avec les effets de dilatations thermiques). Cette variation est la même pour tous les ressorts du système. La longueur à vide des ressorts à l'étape q , l_q , vaut $l_q = l_0[1 + \theta_q]$, avec l_0 la longueur à vide de référence des ressorts et θ_q sa dilatation à l'étape q . La condition pour que le patin i se mette en mouvement s'écrit (l'indice q de l'étape en cours n'est pas indiqué pour plus de clarté) :

$$|x_2 - x_1 - (1 + \theta) l_0 + \sin \alpha| > \mu_s \cos \alpha \quad (i = 1) \quad (\text{C.2})$$

$$|x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i + \sin \alpha| > \mu_s \cos \alpha \quad (i \neq 1, N) \quad (\text{C.3})$$

$$|x_{N-1} - x_N + (1 + \theta) l_0 + \sin \alpha| > \mu_s \cos \alpha \quad (i = N). \quad (\text{C.4})$$

Lorsqu'un bloc passe de l'arrêt au mouvement et réciproquement, on dit qu'il "change d'état". Cette variation va provoquer un changement des forces en jeu dans le système. Si toutes les résultantes tangentielles appliquées aux blocs restent inférieures au seuil de friction statique, alors le système reste au repos, et on passe directement à l'étape $q + 1$. Dans le cas contraire, à savoir si au moins une résultante tangentielle dépasse le seuil de friction, le bloc en question est

mis en mouvement.

- A ce stade, le système n'est donc plus à l'équilibre. Quand le bloc i se déplace relativement à son support, la force qui s'oppose à son mouvement est donnée par les lois d'Amontons-Coulomb : $f_d = -\mu_d mg \cos \alpha S(\dot{x}_i)$, où \dot{x}_i est la vitesse du bloc i et S désigne la fonction signe [$S(u) = 1$ si $u > 0$ et $S(u) = -1$ si $u < 0$]. Les équations du mouvement lorsque le patin i bouge sont donc :

$$\ddot{x}_1 = -[x_1 - x_2 + (1 + \theta) l_0] - \mu_d S(\dot{x}_1) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = 1) \quad (\text{C.5})$$

$$\ddot{x}_i = -[2x_i - (x_{i+1} + x_{i-1})] - \mu_d S(\dot{x}_i) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i \neq 1, N) \quad (\text{C.6})$$

$$\ddot{x}_N = -[x_N - x_{N-1} - (1 + \theta) l_0] - \mu_d S(\dot{x}_N) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = N). \quad (\text{C.7})$$

En résolvant les équations de la dynamique pour décrire les mouvements successifs de chaque bloc, on obtiendra alors la nouvelle disposition à l'équilibre du système total, ce qui correspond à la fin de l'étape q . Pour des raisons de temps de calcul, nous réalisons en réalité une procédure plus complexe, décrite ici.

Lorsqu'on a choisit aléatoirement la valeur de la dilatation θ_q , on cherche la dilatation minimale qui rompt une des conditions de stabilité. C'est le réarrangement mécanique q_1 , ayant lieu à la dilatation θ^{q_1} , conduisant les blocs à de nouvelles positions stables $x_i^{q_1}$. Pour trouver ces nouvelles positions, on intègre numériquement les équations du mouvement avec un pas de temps $\Delta t \ll (\frac{m}{k})^{1/2}$, en utilisant l'algorithme *Velocity Verlet* [W. H. Press - 2007]. Cet algorithme consiste à calculer les positions à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des positions, des vitesses et des accélérations à l'instant t , puis à calculer les vitesses à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des vitesses à l'instant t et des accélérations aux instants t et $t + \Delta t$. A la fin de chaque pas de temps Δt , on vérifie d'une part que les blocs en mouvement n'ont pas déstabilisé leurs voisins et d'autre part que les blocs en mouvement ne s'arrêtent pas, c'est-à-dire qu'aucun des blocs ne "change d'état". Si pendant cet incrément de temps, un bloc "change d'état", on estime à partir de la valeur des vitesses et accélérations aux temps t et $t + \Delta t$, l'incrément de temps Δt_p ($\Delta t_p < \Delta t$) correspondant au "changement d'état" d'un bloc. La procédure numérique utilise alors exceptionnellement cet incrément de temps Δt_p pour l'intégration numérique des équations. On répète cette procédure jusqu'à ce que tous les blocs soient à l'arrêt. Chaque bloc est alors à la position $x_i^{q_1}$. On cherche alors la nouvelle valeur de la dilatation θ^{q_2} pour laquelle un réarrangement mécanique a lieu, et par la même procédure on trouve la nouvelle configuration stable. Quand la dilatation θ^{q_j} nécessaire au prochain réarrangement q_j est au-delà de la valeur initialement choisie θ_q , on considère que les positions $x_i^{q_j}$ à la fin du précédent réarrangement correspondent aux positions à la fin de l'étape q .

- Lorsque l'étape q est terminée, on choisit aléatoirement une nouvelle valeur de la dilatation θ_{q+1} , et on répète la procédure précédemment exposée.

C.2.2 Choix des paramètres

Comme expliqué ci-dessus, à chaque étape, les longueurs à vide des ressorts sont dilatées. A l'étape q , elles valent $l_q = l_0[1 + \theta_q]$, avec l_0 la longueur à vide de référence et θ_q la dilatation. On tirera les $\{\theta_q\}$ sur une loi gaussienne :

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \quad (\text{C.8})$$

où σ_θ représente l'ordre de grandeur typique d'une dilatation. Il est important de noter que l'on appliquera la même dilatation θ_q à tous les ressorts à chaque étape q du processus. D'autre part, le terme de "dilatation" sera utilisé abusivement dans la toute la suite alors qu'il peut correspondre en réalité à une contraction ($\theta_q < 0$).

On choisit comme condition initiale la situation où tous les blocs sont disposés à égale distance les uns des autres, et sans tension initiale. Il est nécessaire de briser la symétrie du système pour observer un moment d'ensemble de la chaîne. Lorsqu'on applique une force $f = \sin(\alpha)$ non nulle, les blocs en début et fin de chaîne vont se mettre naturellement en mouvement puisqu'ils n'ont qu'un voisin : leur résultante tangentielle sortira obligatoirement du cône de frottement pour une dilatation assez importante. En revanche, lorsque $f = 0$, la rupture de symétrie est provoquée par une erreur numérique (erreur d'arrondi due à la précision finie des nombres utilisés). Ceci permet à un premier bloc (le premier ou le dernier, pour la même raison que précédemment) de se déplacer et ensuite à toute la chaîne de se mettre en reptation.

Le choix des différents paramètres introduits précédemment doit être fait avec précaution. Dans la suite, on utilise les valeurs utilisées dans l'étude de Blanc *et. al*, dont on sait qu'elles donnent des résultats sensés. Ainsi, on travaille avec la longueur à vide des ressorts $l_0 = 10^3$, les coefficients de friction $\mu_s = 0.6$ et $\mu_d = 0.5$, le temps d'intégration $\Delta t = 10^{-3}$ s. Les seuls paramètres sur lesquels on agit sont le nombre total d'étapes de dilatations, le nombre N de blocs présents dans le système, l'amplitude typique des dilations σ_θ et l'angle du plan incliné α ou de façon équivalente, la force appliquée à tous les blocs $f = \sin(\alpha)$.

Par la méthode décrite précédemment, pour chaque dilatation imposée, on résout la dynamique interne des réarrangements, jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre. Pour autant, dans notre étude, nous ne tenons à aucun moment compte de la durée nécessaire à tous ces réarrangements. En effet, nous nous concentrons uniquement sur les positions des blocs à la fin de chaque étape, lorsque le système a atteint un nouvel équilibre, c'est-à-dire avant et après chaque dilatation. De la sorte, nous ne raisonnons pas en terme d'évolution temporelle, mais d'évolution étape après étape.

C.3 Étude complète d'un processus

On se propose ici d'étudier un processus donné, *i.e.* une succession de 10^5 étapes de dilatations $\{\theta_q\}$ tirées sur une gaussienne de largeur $\sigma_\theta = 0.008$ appliquée à une chaîne constituée de $N = 30$ blocs. On étudiera l'influence de la valeur de la force f appliquée à la lumière de deux

résultats généraux utilisés précédemment dans la thèse : le Théorème de Fluctuation-Dissipation et la Relation de Fluctuation. Dans cette partie, nous exposons les méthodes utilisées et nous discutons de leur intérêt. Nous proposons dans la partie suivante une étude complète lorsqu'on varie les paramètres de contrôle σ_θ et N .

C.3.1 Caractéristiques du processus

Notre première observation est que le système se comporte de façon relativement homogène au cours des différentes étapes qu'il subit : la dynamique de chaque bloc du système est très proche de celle du centre de masse G , excepté à l'échelle d'un très faible nombre d'étapes (typiquement moins 10). En conséquence, nous étudierons les propriétés du système à travers celles de son centre de masse G . Nous traçons Figure C.3a la position du centre de masse G du système, $x_G^q = \frac{1}{N} \sum_i x_i^q$ aux différentes étapes q du processus. On voit apparaître un mouvement aléatoire de G , provoqué par les dilatations successives. Lorsqu'on applique une force suffisamment importante, s'ajoute à ce mouvement aléatoire une dérive globale de la chaîne (Fig. C.3b).

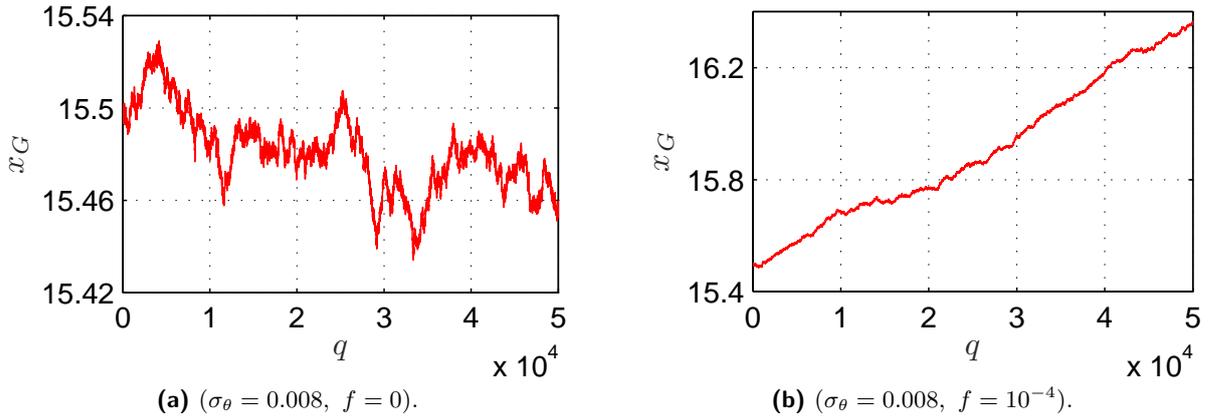
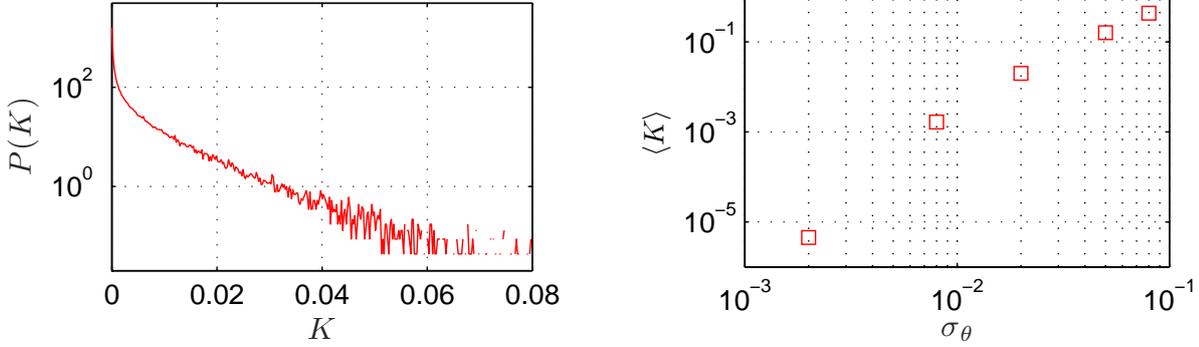


Figure C.3 – Position du centre de masse x_G en fonction de q pour deux jeux de paramètres (σ_θ, f) .

On peut quantifier cette dérive en calculant la vitesse du centre de masse. N'ayant pas de base temporelle dans cette étude, on assimile $x_i^{q+1} - x_i^q$ à la vitesse du bloc i à l'étape q . La vitesse instantanée s'écrit alors $v_G^q \equiv \frac{1}{N} \sum_i (x_i^{q+1} - x_i^q)$.

Dès lors, une première façon de caractériser le processus est d'étudier l'"énergie cinétique" instantanée du système, $K^q = \frac{1}{2N} \sum_i (x_i^{q+1} - x_i^q)^2 - (v_G^q)^2$ (on rappelle que $m = 1$). Cette énergie ne prend pas en compte le mouvement du centre de masse et traduit donc uniquement les fluctuations de position, et donc l'agitation du système. En observant la distribution de probabilité $P(K)$ (Fig.C.4a), on voit que les petits réarrangements sont clairement les événements les plus probables. La queue de la distribution est quasi-exponentielle. Pour autant, nous ne chercherons à pas la caractériser davantage, la quantité d'intérêt étant ici la valeur moyenne de la distribution, qui caractérise l'agitation globale du système. On calcule donc $\langle K \rangle \equiv \langle K^q \rangle_q$, où $\langle . \rangle_q$ désigne la moyenne statistique sur toutes étapes du processus. $\langle K \rangle$ sera d'autant plus élevée

que l'amplitude typique des dilations σ_θ sera grande, puisqu'on aura des réarrangements plus importants (Fig.C.4b). Cela nous permet de faire une première mesure de l'énergie interne du système.

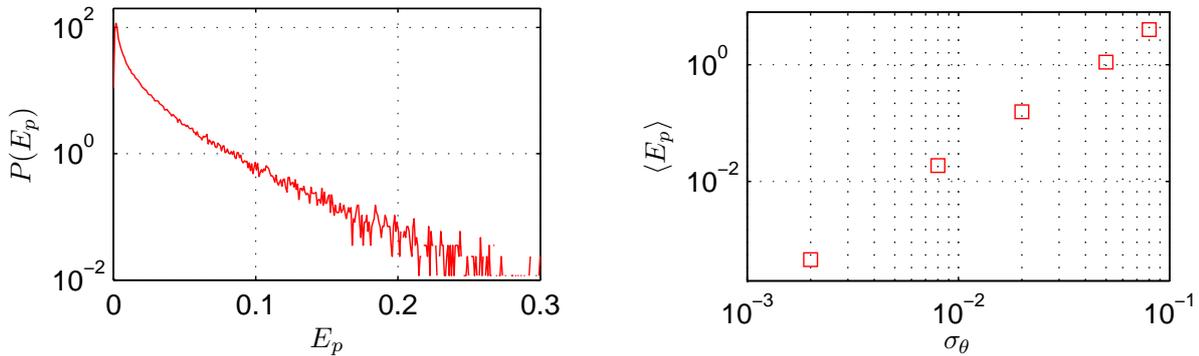


(a) Distribution de probabilité de l'énergie cinétique K pour ($\sigma_\theta = 0.008$, $f = 10^{-4}$). La valeur moyenne vaut ici $\langle K \rangle = 3.26 \cdot 10^{-3}$.

(b) Énergie cinétique moyenne $\langle K \rangle$ en fonction de l'amplitude typique des dilations appliquées aux ressorts σ_θ .

Figure C.4 – Propriétés de l'énergie cinétique K .

Il est également possible de calculer l'énergie potentielle du système à chaque étape q , qui correspond à l'énergie stockée dans les ressorts. On introduit donc l'énergie potentielle élastique par bloc $E_p^q = \frac{1}{2N} \sum_i [x_{i+1}^q - x_i^q - l_0(1 + \theta^q)]^2$. Cette quantité ne caractérise le système que de façon statique, et ne capture pas du tout la dynamique. Sa distribution de probabilité est qualitativement proche de celle de K^q (Fig.C.5a). Tout comme pour $\langle K \rangle$, l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ sur tout le processus sera d'autant plus élevée que l'amplitude typique des dilations σ_θ sera grande (Fig.C.5b), puisque le système est plus désordonné. Cela nous permet de faire une deuxième mesure d'énergie typique du système.



(a) Distribution de probabilité de l'énergie potentielle E_p pour ($\sigma_\theta = 0.008$, $f = 10^{-4}$). La valeur moyenne vaut ici $\langle E_p \rangle = 1.9 \cdot 10^{-2}$.

(b) Énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ en fonction de l'amplitude typique des dilations appliquées aux ressorts σ_θ (loi de puissance : $\langle E_p \rangle \propto \sigma_\theta^{2.4}$).

Figure C.5 – Propriétés de l'énergie potentielle E_p .

Dans l'optique de mesurer une énergie caractéristique du processus, voire une "température" du système, on s'attachera dans la suite à tester deux théorèmes étudiés précédemment : le

théorème de Fluctuation et celui de Fluctuation-Dissipation. Afin de tester au mieux ces deux théorèmes, il est nécessaire de n'appliquer qu'une perturbation au système stationnaire. Cela implique de choisir la force f appliquée au système de façon à ce qu'elle soit négligeable devant les autres forces auxquelles les blocs sont soumis. Ceci sera discuté en détail dans la prochaine section.

C.3.2 Théorème de Fluctuation-Dissipation

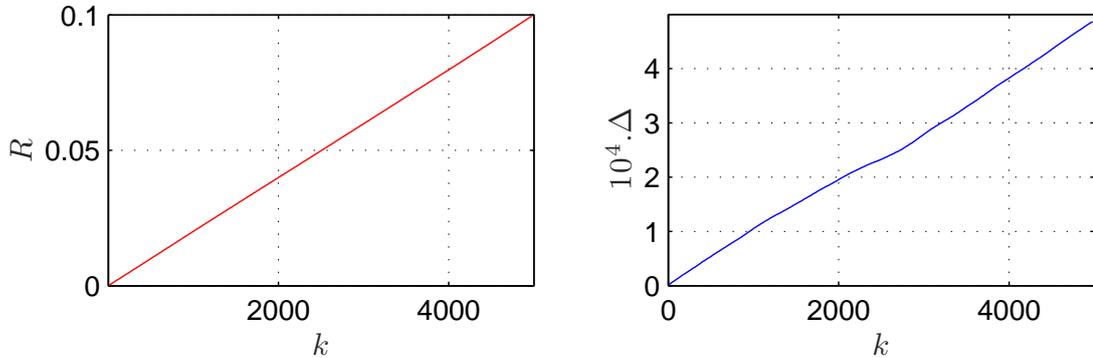
Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la position du centre de masse G du système fluctue au cours de différentes étapes de dilatations successives et dérive en présence d'une force extérieure f non nulle. On peut quantifier cette dérive en calculant la quantité moyennée

$$R(k) \equiv \left\langle x_G^{q+k} - x_G^q \right\rangle_q. \quad (\text{C.9})$$

On voit que la dérive croît linéairement avec le nombre d'étapes de dilatations k (Fig. C.6a). Avec les fluctuations de position de G , nous nous posons la question de savoir dans quel régime de diffusion (sur-, normale-, sous-diffusion). On introduit donc pour cela le déplacement carré moyen

$$\Delta(k) \equiv \left\langle \left(x_G^{q+k} - x_G^q \right)^2 \right\rangle_q - \left\langle x_G^{q+k} - x_G^q \right\rangle_q^2, \quad (\text{C.10})$$

où l'on a retiré la dérive linéaire du système pour ne mesurer que sa diffusion. On observe un régime de diffusion normale puisque Δ croît linéairement avec k (Fig.C.6b).

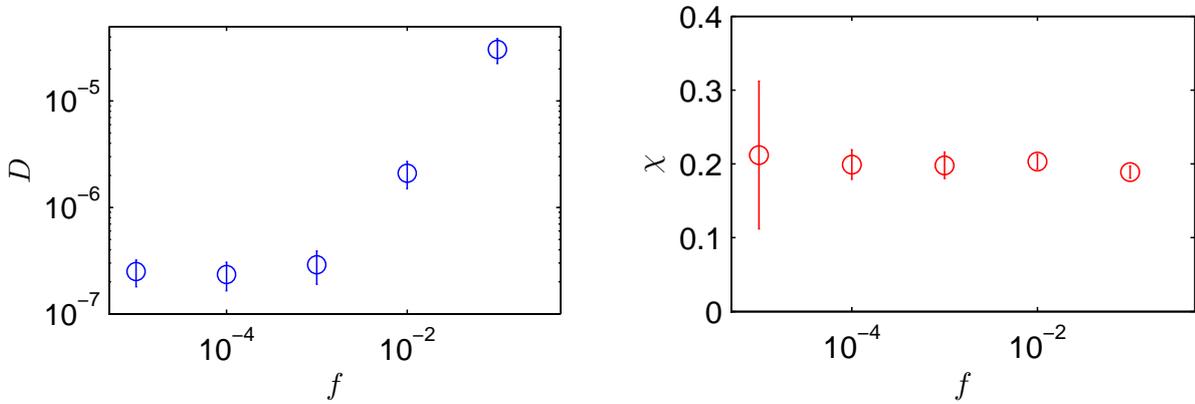


(a) Évolution de la dérive R avec le nombre d'étapes k : $R = 1.99 \cdot 10^{-5}k$. **(b)** Évolution déplacement carré moyen du centre de masse G , Δ avec le nombre d'étapes k : $R = 9.45 \cdot 10^{-8}k$.

Figure C.6 – Étude de la diffusion et de la dérive du système pour $(\sigma_\theta = 0.008, f = 10^{-4})$.

Par analogie avec le mouvement brownien à une dimension, on note $R(k) \equiv f\chi k$ et $\Delta(k) \equiv 2Dk$, où χ est la réponse du système à la force extérieure et D le coefficient de diffusion. Le théorème de Fluctuation-Dissipation suppose que l'on applique une perturbation au système, *i.e.* une force f suffisamment faible pour ne pas modifier le comportement intrinsèque du système. Mais il est également nécessaire d'avoir une dérive suffisamment importante pour qu'elle soit linéaire et donc mesurable correctement. Afin de vérifier cela, on étudie le même processus pour plusieurs valeurs de f . On voit sur la Figure C.7a que le coefficient de diffusion D croît

artificiellement à cause de la présence d'une force f trop élevée. A contrario, la dérive du système est mesurée plus précisément si l'on applique une force élevée. Il existe un régime optimum autour de $f \simeq 10^{-4}$ où l'on peut mesurer χ et D correctement.



(a) Coefficient de diffusion D mesuré en fonction de la force f appliquée.

(b) Réponse χ mesurée en fonction de la force f appliquée.

Figure C.7 – Évolution du coefficient de diffusion et de la réponse du système avec la force f appliquée pour $\sigma_\theta = 0.008$.

Lorsqu'on a trouvé ce régime, on peut tester le théorème de Fluctuation-Dissipation. Celui-ci prédit que la diffusion propre du système est proportionnelle à la réponse du système à la perturbation (force f) [Makse et Kurchan - 2002]. Notre système n'étant pas à l'équilibre, il n'y a *a priori* aucune raison pour que le théorème soit vérifié. Cependant, si l'excitation appliquée au système n'est qu'une perturbation par rapport à l'état stationnaire dans lequel il se trouve, il est possible que la réponse soit proportionnelle aux fluctuations libres. Si c'est le cas, cela nous permettrait de mesurer une énergie caractéristique qui peut s'apparenter à la température effective du système stationnaire, comme proposé dans plusieurs études [Cugliandolo et Kurchan - 1993, D'anna *et al.* - 2003, Buisson *et al.* - 2003, Grenard *et al.* - 2008, Gnoli *et al.* - 2013]. Sous une de ces formes, le théorème peut s'écrire

$$\Delta(k) = 2kT_{FDT} \frac{R(k)}{f}. \quad (\text{C.11})$$

En traçant de façon paramétrique $\Delta(k)/2$ en fonction de $R(k)/f$ (Fig.C.8), la pente de la courbe est directement égale à la température effective du système kT_{FDT} . Sous réserve d'avoir vérifié que les deux quantités sont bien linéaires en k , ceci nous permet d'obtenir de façon visuelle une mesure de la température. Il est important de noter que le comportement général du système dépend fortement de la série de dilations tirées aléatoirement, pour une valeur de σ_θ donnée. On a tracé Figure C.8 quatre processus différents, obtenus pour $\sigma_\theta = 0.008$ et $f = 10^{-4}$. On voit que la courbe dépend clairement du tirage des $\{\sigma_\theta\}$: si la tendance est la même pour les quatre processus, les courbes ne sont pas toutes identiques. En effet, l'évolution du système dépend beaucoup de la configuration dans laquelle il se trouvait précédemment malgré le tirage aléatoire des $\{\sigma_\theta\}$. Il est donc nécessaire de faire une moyenne sur plusieurs processus pour espérer obtenir une valeur avec une précision raisonnable. Ceci sera présenté dans la section C.4.

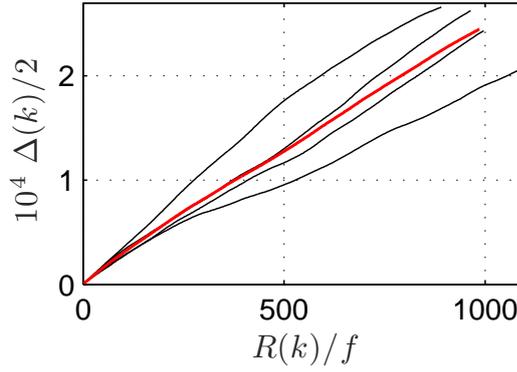


Figure C.8 – Tracés paramétriques de $\Delta(k)/2$ en fonction de $R(k)/f$, pour quatre processus différents (noir), ainsi que leur moyenne (rouge). On mesure une pente $kT_{FDT} = (2.4 \pm 0.1) 10^{-7}$ pour les paramètres ($\sigma_\theta = 0.008$, $f = 10^{-4}$).

On peut également obtenir kT_{FDT} en calculant directement le ratio $\frac{D}{\chi}$. Comme pour le tracé paramétrique, on fait la moyenne des réponses $R(k)$ et des déplacements carrés moyens Δ sur plusieurs processus afin de déterminer D et χ avec une meilleure précision. Pour les paramètres ($\sigma_\theta = 0.008$, $f = 10^{-4}$) étudiés ici, on obtient $kT_{FDT} = (2.37 \pm 0.15) 10^{-7}$. Cette valeur sera discutée dans la suite, à la lumière d'autres résultats.

C.3.3 Relation de Fluctuation

Une autre approche consiste à étudier le processus d'injection d'énergie, qui se fait via la force extérieure f . On peut alors étudier les fluctuations de l'énergie injectée du point de vue de la Relation de Fluctuation (ou Gallavotti-Cohen) [Aumaitre *et al.* - 2001, Ciliberto *et al.* - 2004]. Avec cette approche, il convient d'abord de définir correctement l'énergie injectée dans le système. On considère que le processus de dilatations successives correspond à la dynamique propre du système, ce qui le maintient "en vie". Par ailleurs, on impose une force f , extérieure au système, pour le perturber. En faisant cela, nous injectons de l'énergie dans le système. Dès lors, l'énergie injectée entre l'étape q et l'étape $q + 1$ correspond à la somme des travaux de la force sur tous les blocs et vaut donc

$$w^q = f \left(\sum_i (x_i^{q+1} - x_i^q) \right). \quad (\text{C.12})$$

On trace Figure C.9a une distribution typique de cette quantité sur la durée totale d'un processus. Le pic central est compatible avec l'observation faite précédemment : la très grande majorité des réarrangements sont de très faible amplitude. Les événements négatifs correspondent à des cas où la chaîne de blocs s'est déplacée en moyenne dans la direction opposée à celle de la force f . Il est à noter que cette distribution n'est pas symétrique, dans la mesure où l'on injecte de l'énergie en moyenne : $\langle w \rangle \neq 0$.

Dans l'optique de tester les relations de fluctuations, on définit alors l'énergie injectée sur

k étapes successives,

$$w_k = \sum_{m=q}^{q+k} w^m \quad (\text{C.13})$$

Le théorème utilise habituellement la notion d'énergie moyenne injectée sur une fenêtre temporelle. Étant donné qu'aucune base temporelle n'est utilisée dans notre étude, on moyenne sur un nombre d'étapes successives donné. La Relation de Fluctuation quantifie l'irréversibilité du processus d'injection et établit que pour k suffisamment grand, l'asymétrie de la distribution de probabilité des $\{w_k\}$ est telle que

$$\delta(w_k) \equiv \frac{1}{k} \ln \left[\frac{P(w_k)}{P(-w_k)} \right] = \frac{1}{kT_{GC}} w_k, \quad k \rightarrow \infty, \quad (\text{C.14})$$

où kT_{GC} désigne la température effective du système.

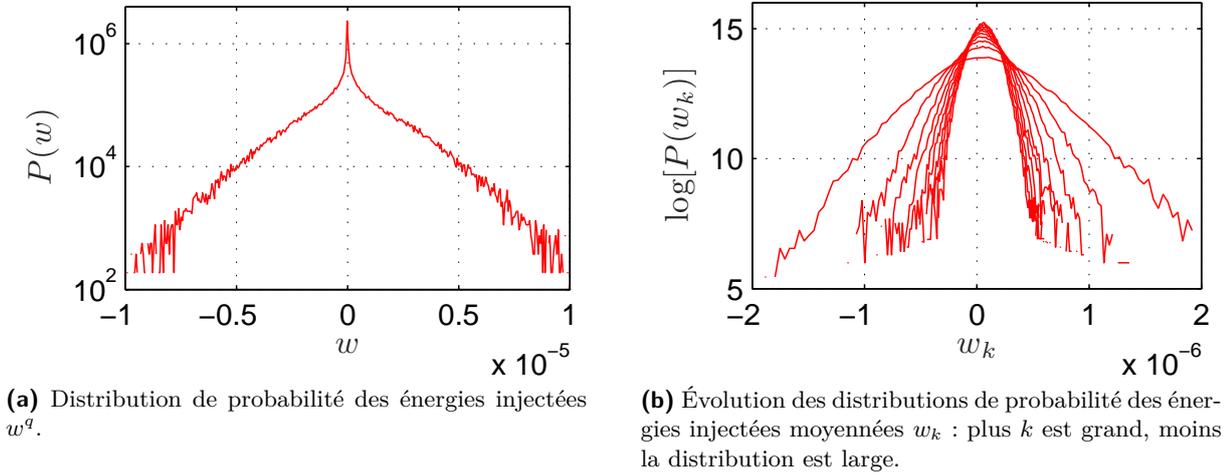
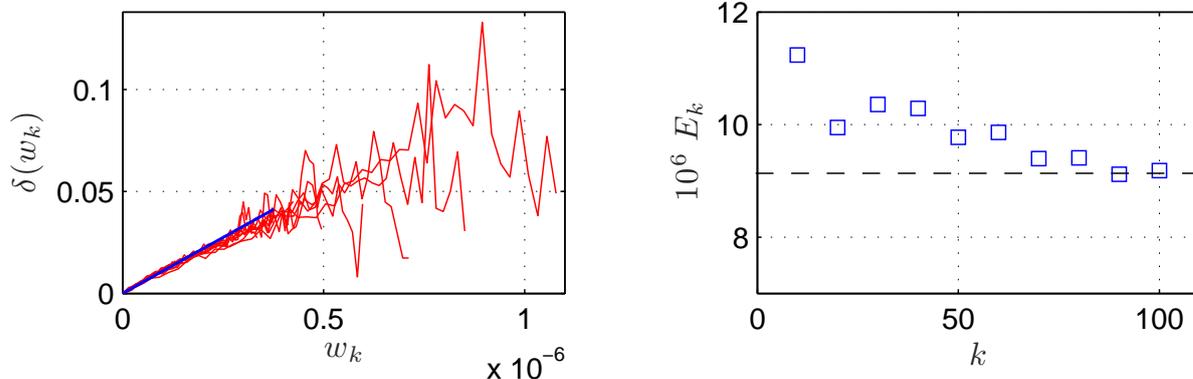


Figure C.9 – Distributions de probabilité des énergies injectées instantanée, w^q , et moyennée, w_k , pour ($\sigma_\theta = 0.008$, $f = 10^{-4}$).

On voit sur la Figure C.9b l'évolution de $P(w_k)$ lorsque k augmente : plus on moyenne sur un grand nombre de dilatations successives, moins la distribution est large. On voit alors clairement apparaître que $\langle w \rangle \neq 0$. On peut alors quantifier l'asymétrie de la distribution en calculant la fonction $\delta(w_k)$ introduite Eq. (C.14). Comme expliqué précédemment, nous ne pouvons pas atteindre strictement la limite $k \rightarrow \infty$. Nous nous imposons de moyenner sur un nombre suffisamment important de dilatations [Aumaitre *et al.* - 2001] de telle sorte que le système "a perdu la mémoire" (typiquement au delà de 10 étapes). A contrario, nous ne moyennons pas trop afin que la fonction d'asymétrie soit définie au moins sur la gamme $w_k \in [0; 5 \langle w \rangle]$. Sur la figure C.10a, nous montrons les fonctions d'asymétrie associées aux distributions de la Figure C.9b, pour $k \in [10; 100]$. Elles sont raisonnablement linéaires, en particulier aux grands k . Il est important de noter que l'on vérifie la linéarité de $\delta(w_k)$ sur une large gamme de valeurs, puisqu'ici $\langle w \rangle = 6.08 \cdot 10^{-8}$. Pour chaque valeur de k , on peut extraire la pente de la droite correspondant à l'inverse d'une énergie. On trace cette énergie E_k en fonction de k sur la Figure C.10b. On voit que pour k assez grand, la valeur de E_k atteint un palier, qu'on

considère égal à la température du système. On obtient donc ici $kT_{GC} = (9.1 \pm 0.2) 10^{-6}$. On remarque que cette valeur n'est pas compatible avec celle obtenue précédemment via le FDT (section précédente). Ceci sera discuté dans la suite, avec une comparaison des deux valeurs et leurs évolutions avec les paramètres de contrôle.



(a) Fonctions d'asymétrie $\delta(w_k)$ pour plusieurs valeurs de k .

(b) Évolution de l'énergie caractéristique obtenue à partir du fit de $\delta(w_k)$ avec k . Pour les grandes valeurs de k , on atteint un palier qui définit la température du système, $kT_{GC} = (9.1 \pm 0.2) 10^{-6}$.

Figure C.10 – Test du théorème de Fluctuation : fonctions d'asymétrie et énergies caractéristiques issues de leur fit pour $(\sigma_\theta = 0.008, f = 10^{-4})$.

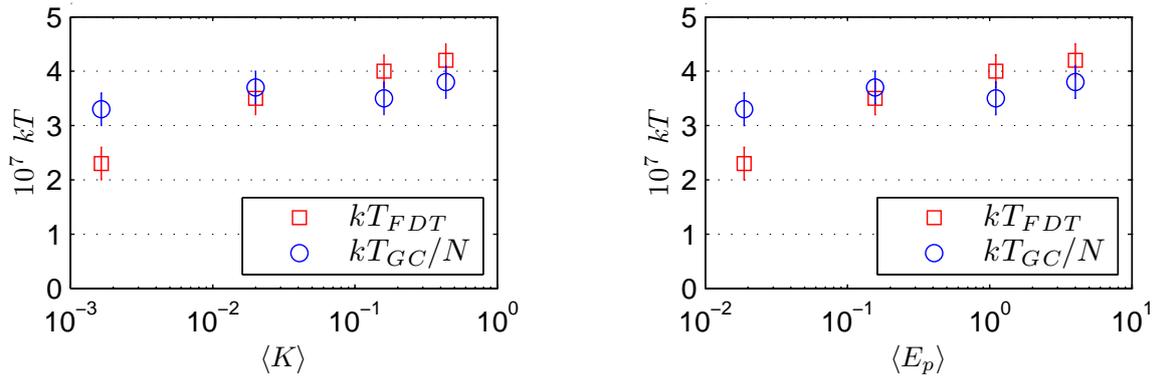
C.4 Résultats globaux

C.4.1 Résultats à taille de système fixée ($N = 30$ blocs)

On présente dans cette section les différentes températures caractéristiques obtenues par les méthodes présentées dans la section précédente (FDT et RF). Les résultats sont obtenus en moyennant une série de 15 processus différents, à (σ_θ, f) donné. L'objectif annoncé est de vérifier si les "températures" obtenues par les deux théorèmes utilisés ici sont bien proportionnelles à "l'agitation" ($\langle K \rangle$) ou "l'énergie" ($\langle E_p \rangle$) du système. Nous nous sommes intéressés à une gamme de valeurs de σ_θ qui sont compatibles avec les contraintes suivantes :

- la position du centre de masse fluctue au cours du temps, à l'image d'un processus brownien. Ceci suppose que les dilatations soient suffisamment importantes pour mettre le système en mouvement. Pour $N = 30$ blocs, cela impose $\sigma_\theta \geq 0.008$,
- le temps de calcul doit être raisonnable (tout comme la taille des fichiers de données). Puisqu'il nous faut effectuer 15 séries pour un couple (σ_θ, f) donné et trouver une valeur de f adaptée, nous nous sommes limités à $\sigma_\theta \leq 0.02$, ce qui correspond à 5 heures par processus (10^5 étapes par processus). Il est toujours possible d'augmenter cette limite en faisant tourner le code sur des machines plus puissantes, mais nous nous sommes ici restreints à cette valeur choisie arbitrairement.

On présente l'évolution des deux températures kT_{FDT} et kT_{GC} avec "l'agitation" du système $\langle K \rangle$ (Fig. C.11a) et son "énergie" $\langle E_p \rangle$ (Fig. C.11b). Il est important de noter que pour que les



(a) Évolution des deux températures kT_{FDT} et kT_{GC}/N avec "l'agitation" du système $\langle K \rangle$.

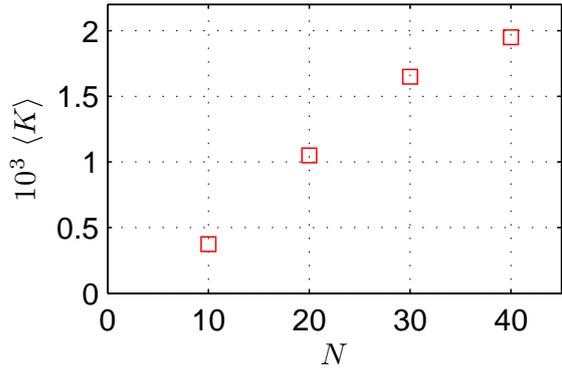
(b) Évolution des deux températures kT_{FDT} et kT_{GC}/N avec l'"énergie" du système $\langle E_p \rangle$.

Figure C.11 – Évolution des deux températures kT_{FDT} et kT_{GC}/N avec "l'agitation" du système $\langle K \rangle$ ou son "énergie" $\langle E_p \rangle$.

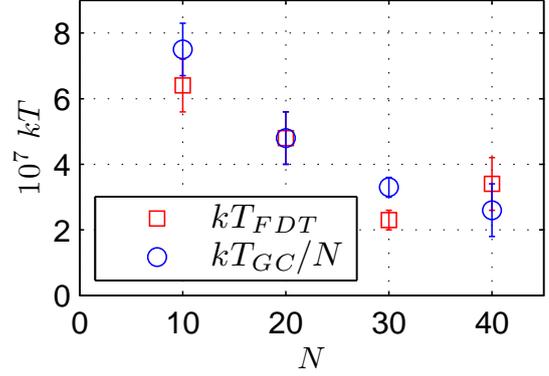
deux températures soient comparables, il est nécessaire de considérer la température par bloc, kT_{GC}/N , et non kT_{GC} . En effet, nous avons utilisé dans le théorème l'énergie totale injectée qui est par définition extensive. On voit tout d'abord que les deux "températures" sont compatibles, sauf à faible énergie. Ceci nous conforte dans l'idée que ces deux quantités sont représentatives de l'énergie du système. D'autre, part, elles augmentent globalement avec $\langle K \rangle$ ou $\langle E_p \rangle$. En revanche, elles n'augmentent pas du tout de façon linéaire (échelle logarithmique en abscisse). Il semble donc nécessaire d'obtenir davantage de résultats, pour d'autres valeurs de σ_θ , pour vérifier si les "températures" mesurées continuent à croître avec $\langle K \rangle$.

C.4.2 Influence de la taille de système

Il est également important de vérifier l'influence de la taille du système. En effet, nous avons choisi arbitrairement $N = 30$, mais les quantités mesurées, pour être identifiées à des températures, doivent être intensives, *i.e.* indépendantes de N . Nous traçons sur la Figure (C.12) l'évolution de $\langle K \rangle$ avec N ainsi que celles kT_{FDT} et kT_{GC}/N , pour $\sigma_\theta = 0.008$. On voit que la température du système décroît lorsque sa taille augmente, alors même que son énergie caractéristique $\langle K \rangle$ croît. Les barres d'erreurs sont plus importantes pour les points $N \neq 30$ (Fig. C.12b) car ils ont été obtenus en ne moyennant que 5 processus. Nous en concluons que les bords du système jouent un rôle très important dans la dynamique globale du système. Cet effet est d'autant plus marqué qu'on atteint des taille de systèmes très réduites. En effet, pour un système nettement plus grand ($N > 100$), la dynamique des blocs en début et fin de chaîne n'est que peu visible par rapport à celle des très nombreux blocs en milieu de chaîne. Pour remédier à ce problème nous nous proposons de modifier le modèle, afin que les bords ne soient plus prédominants. Ceci sera développé dans la prochaine section.



(a) Évolution de $\langle K \rangle$ avec le nombre de blocs N dans le système.



(b) Évolutions de kT_{FDT} et kT_{GC}/N avec le nombre de blocs N dans le système.

Figure C.12 – Évolutions des énergies caractéristiques du système avec le nombre de blocs N qui le compose pour $\sigma_\theta = 0.008$.

C.5 Évolution du modèle et perspectives

Afin de ne plus avoir de blocs qui se comportent différemment des autres en bout de chaîne, nous proposons de faire évoluer le modèle en une chaîne bouclée sur elle-même (Fig. C.13). Il est alors nécessaire de faire quelques modifications pour que le système puisse être étudié comme précédemment :

- comme expliqué dans la section C.2.1, à chaque étape du processus, nous calculons la dilatation minimale qui va provoquer un réarrangement du système. Dans le cas de la chaîne linéaire, c'est nécessairement l'un des blocs aux extrémités (le premier ou le dernier) qui va bouger en premier. Dans le cas de la chaîne bouclée, et puisque les ressorts sont linéaires, nous ne pouvons pas calculer cette dilatation limite. Il est donc nécessaire d'introduire des ressorts non-linéaires. Nous choisissons ici $f_{i+1 \rightarrow i} = -k[x_i - x_{i+1} + l]^{3/2}$, par analogie avec le contact Hertzien.
- vu la symétrie du problème, lorsqu'on applique la même dilatation à tous les ressorts, le système ne fait que se dilater de façon homothétique. Afin de briser cette symétrie, nous choisissons de ne pas appliquer la même dilatation à tous les ressorts. Une fois la dilatation minimale θ^{k+1} pour qu'un réarrangement se produise obtenue, nous appliquons à chaque ressort une dilatation tirée aléatoirement sur $[-\theta^{k+1}; \theta^{k+1}]$. Ainsi, nous introduisons du désordre à chaque étape de dilatation, ce qui a pour effet de maintenir le système en mouvement.

Il est à noter que l'on n'incline plus le système comme précédemment pour appliquer une force extérieure. De façon équivalente, on applique alors un couple, qui va faire tourner préférentiellement le système dans un sens.

Gradenigo et collaborateurs ont montré qu'il était possible d'étudier une chaîne de patins frictionnels dans le cadre d'une thermodynamique effective [Gradenigo *et al.* - 2015]. Leur calcul, qui repose sur l'idée que tous les micro-états stables du système sont équiprobables, permet d'obtenir une température d'Edwards du système. Ils ont montré que cette température évolue

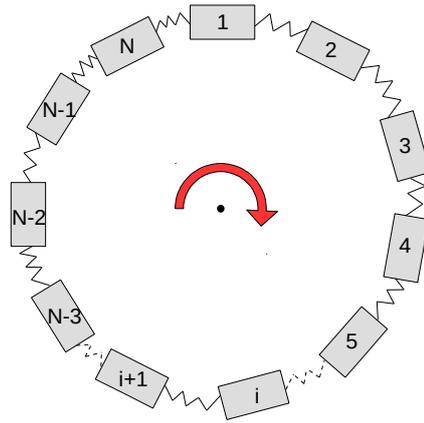


Figure C.13 – Schéma du système modifié.

de façon non triviale avec l'énergie stockée dans le système. Afin de comparer nos résultats aux leurs, il est nécessaire d'étudier des systèmes de taille bien plus importante ($N > 100$). Il sera alors intéressant d'étudier la longueur de corrélation dans la chaîne, définie par

$$C(|i - j|) = \left\langle \frac{\sum_{i \neq j, i=1}^N (x_{i+1}^q - x_i^q - l^q)(x_{j+1}^q - x_j^q - l^q)}{\sum_{i=1}^N (x_{i+1}^q - x_i^q - l^q)^2} \right\rangle_q. \quad (\text{C.15})$$

D'autre part, il nous sera nécessaire d'optimiser le temps de calcul afin de pouvoir balayer une gamme d'énergie bien plus importante que précédemment, et ainsi vérifier si les énergies caractéristiques que nous obtenons ont les mêmes lois d'échelles que les leurs.

Bibliographie

- [Ahlers *et al.* - 2009] AHLERS, G., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2009). Heat transfer and large scale dynamics in turbulent rayleigh-bénard convection. *Reviews of modern physics*, 81(2):503.
- [Andrieux *et al.* - 2007] ANDRIEUX, D., GASPARD, P., CILIBERTO, S., GARNIER, N., JOUBAUD, S. et PETROSYAN, A. (2007). Entropy production and time asymmetry in nonequilibrium fluctuations. *Physical Review Letters*, 98(15).
- [Aranson et Olafsen - 2002] ARANSON, I. S. et OLAFSEN, J. S. (2002). Velocity fluctuations in electrostatically driven granular media. *Physical Review E*, 66(6).
- [Aumaitre - 1999] AUMAITRE, S. (Mars 1999). *Etude des fluctuations de grandeurs global dans les systèmes dissipatifs hors-équilibre*. Thèse de doctorat, ENS Lyon.
- [Aumaitre *et al.* - 2006] AUMAITRE, S., ALASTUEY, A. et FAUVE, S. (2006). A quasi-elastic regime for vibrated granular gases. *European Physical Journal B*, 54(2):263–266.
- [Aumaitre *et al.* - 2004] AUMAITRE, S., FARAGO, J., FAUVE, S. et MC NAMARA, S. (2004). Energy and power fluctuations in vibrated granular gases. *European Physical Journal B*, 42(2):255–261.
- [Aumaitre *et al.* - 2001] AUMAITRE, S., FAUVE, S., MCNAMARA, S. et POGGI, P. (2001). Power injected in dissipative systems and the fluctuation theorem. *European Physical Journal B*, 19(3):449–460.
- [Baldassarri *et al.* - 2005] BALDASSARRI, A., BARRAT, A., D’ANNA, G., LORETO, V., MAYOR, P. et PUGLISI, A. (2005). What is the temperature of a granular medium? *Journal of Physics-Condensed Matter*, 17(24):S2405–S2428.
- [Bandi et Connaughton - 2008] BANDI, M. M. et CONNAUGHTON, C. (2008). Craig’s xy distribution and the statistics of lagrangian power in two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, 77(3).
- [Barrat *et al.* - 2002] BARRAT, A., BIBEN, T., RACZ, Z., TRIZAC, E. et van WIJLAND, F. (2002). On the velocity distributions of the one-dimensional inelastic gas. *Journal of Physics a-Mathematical and General*, 35(3):463–480.
- [Barrat et Trizac - 2003] BARRAT, A. et TRIZAC, E. (2003). Random inelasticity and velocity fluctuations in a driven granular gas. *European Physical Journal E*, 11(1):99–104.
- [Barrat *et al.* - 2005] BARRAT, A., TRIZAC, E. et ERNST, M. H. (2005). Granular gases : dynamics and collective effects. *Journal of Physics-Condensed Matter*, 17(24):S2429–S2437.

- [Barroso *et al.* - 2009] BARROSO, J. J., CARNEIRO, M. V. et MACAU, E. E. N. (2009). Bouncing ball problem : Stability of the periodic modes. *Physical Review E*, 79(2).
- [Bartlett et Bullock - 2014] BARTLETT, S. et BULLOCK, S. (2014). Natural convection of a two-dimensional boussinesq fluid does not maximize entropy production. *Physical Review E*, 90(2):023014.
- [Ben-Naim *et al.* - 2005] BEN-NAIM, E., MACHTA, B. et MACHTA, J. (2005). Power-law velocity distributions in granular gases. *Physical Review E*, 72(2).
- [Bernstein - 1977] BERNSTEIN, A. D. (1977). Listening to coefficient of restitution. *American Journal of Physics*, 45(1):41–44.
- [Berthier et Biroli - 2011] BERTHIER, L. et BIROLI, G. (2011). Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials. *Reviews of Modern Physics*, 83(2):587–645.
- [Blanc et Géminard - 2013] BLANC, B. et GÉMINARD, J.-C. (2013). Intrinsic creep of a granular column subjected to temperature changes. *Physical Review E*, 88(2).
- [Blanc *et al.* - 2014] BLANC, B., GÉMINARD, J. C. et PUGNALONI, L. A. (2014). On-and-off dynamics of a creeping frictional system. *European Physical Journal E*, 37(11).
- [Blanc *et al.* - 2011] BLANC, B., PUGNALONI, L. A. et GÉMINARD, J. C. (2011). Creep motion of a model frictional system. *Physical Review E*, 84(6).
- [Blickle *et al.* - 2006] BLICKLE, V., SPECK, T., HELDEN, L., SEIFERT, U. et BECHINGER, C. (2006). Thermodynamics of a colloidal particle in a time-dependent nonharmonic potential. *Physical review letters*, 96(7):070603.
- [Bonaldi *et al.* - 2009] BONALDI, M., CONTI, L., DE GREGORIO, P., RONDONI, L., VEDOVATO, G., VINANTE, A., BIGNOTTO, M., CERDONIO, M., FALFERI, P., LIGUORI, N., LONGO, S., MEZZENA, R., ORTOLAN, A., PRODI, G. A., SALEMI, F., TAFFARELLO, L., VITALE, S. et ZENDRI, J. P. (2009). Nonequilibrium steady-state fluctuations in actively cooled resonators. *Physical Review Letters*, 103(1).
- [Bonetto *et al.* - 1997] BONETTO, F., GALLAVOTTI, G. et GARRIDO, P. (1997). Chaotic principle : an experimental test. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 105(4):226–252.
- [BouDET et Kellay - 2010] BOUDET, J.-F. et KELLAY, H. (2010). Drag coefficient for a circular obstacle in a quasi-two-dimensional dilute supersonic granular flow. *Physical review letters*, 105(10):104501.
- [Bramwell *et al.* - 2001] BRAMWELL, S. T., FORTIN, J. Y., HOLDSWORTH, P. C. W., PEYSSON, S., PINTON, J. F., PORTELLI, B. et SELITTO, M. (2001). Magnetic fluctuations in the classical xy model : The origin of an exponential tail in a complex system. *Physical Review E*, 63(4).
- [Bramwell *et al.* - 1998] BRAMWELL, S. T., HOLDSWORTH, P. C. W. et PINTON, J. F. (1998). Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, 396(6711):552–554.
- [Brey *et al.* - 1999] BREY, J. J., CUBERO, D. et RUIZ-MONTERO, M. J. (1999). High energy tail in the velocity distribution of a granular gas. *Physical Review E*, 59(1):1256–1258.
- [Brey *et al.* - 2000] BREY, J. J., PRADOS, A. et SANCHEZ-REY, B. (2000). Thermodynamic description in a simple model for granular compaction. *Physica A*, 275(3-4):310–324.

- [Brey et Ruiz-Montero - 2003] BREY, J. J. et RUIZ-MONTERO, M. J. (2003). Velocity distribution of fluidized granular gases in the presence of gravity. *Physical Review E*, 67(2).
- [Brey et Ruiz-Montero - 2008] BREY, J. J. et RUIZ-MONTERO, M. J. (2008). Velocity fluctuations of a piston confining a vibrated granular gas. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*.
- [Buisson *et al.* - 2003] BUISSON, L., BELLON, L. et CILIBERTO, S. (2003). Intermittency in ageing. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 15(11):S1163.
- [Burridge et Knopoff - 1967] BURRIDGE, R. et KNOPOFF, L. (1967). Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57(3):341–350.
- [Cadot *et al.* - 2010] CADOT, O., TOUZE, C. et BOUDAUD, A. (2010). Linear versus nonlinear response of a forced wave turbulence system. *Physical Review E*, 82(4).
- [Cafiero *et al.* - 2000] CAFIERO, R., LUDING, S. et HERRMANN, H. J. (2000). Two-dimensional granular gas of inelastic spheres with multiplicative driving. *Physical Review Letters*, 84(26):6014–6017.
- [Callen et Greene - 1952] CALLEN, H. B. et GREENE, R. F. (1952). On a theorem of irreversible thermodynamics. *Physical Review*, 86(5):702.
- [Carlson et Langer - 1989] CARLSON, J. M. et LANGER, J. S. (1989). Mechanical model of an earthquake fault. *Physical Review A*, 40(11):6470–6484.
- [Castaing - 1996] CASTAING, B. (1996). The temperature of turbulent flows. *Journal de Physique II*, 6(1):105–114.
- [Chandler - 1987] CHANDLER, D. (1987). *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press.
- [Ciliberto *et al.* - 1991] CILIBERTO, S., DOUADY, S. et FAUVE, S. (1991). Investigating space-time chaos in faraday instability by means of the fluctuations of the driving acceleration. *Europhysics Letters*, 15(1):23–28.
- [Ciliberto *et al.* - 2004] CILIBERTO, S., GARNIER, N., HERNANDEZ, S., LACPATIA, C., PINTON, J. F. et CHAVARRIA, G. R. (2004). Experimental test of the gallavotti-cohen fluctuation theorem in turbulent flows. *Physica a-Statistical Mechanics and Its Applications*, 340(1-3):240–250.
- [Ciliberto et Laroche - 1998] CILIBERTO, S. et LAROCHE, C. (1998). An experimental test of the gallavotti-cohen fluctuation theorem. *Le Journal de Physique IV*, 8(PR6):Pr6–215.
- [Collin *et al.* - 2005] COLLIN, D., RITORT, F., JARZYNSKI, C., SMITH, S. B., TINOCO, I. et BUSTAMANTE, C. (2005). Verification of the crooks fluctuation theorem and recovery of rna folding free energies. *Nature*, 437(7056):231–234.
- [Cugliandolo et Kurchan - 1993] CUGLIANDOLO, L. et KURCHAN, J. (1993). Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model. *Physical Review Letters*, 71(1):173.
- [Cugliandolo - 2011] CUGLIANDOLO, L. F. (2011). The effective temperature. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(48):483001.

- [Cundall et Strack - 1979] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). Discrete numerical-model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65.
- [D’anna *et al.* - 2003] D’ANNA, G., MAYOR, P., BARRAT, A., LORETO, V. et NORI, F. (2003). Observing brownian motion in vibration-fluidized granular matter. *Nature*, 424(6951):909–912.
- [deOliveira et Goncalves - 1997] DEOLIVEIRA, C. R. et GONCALVES, P. S. (1997). Bifurcations and chaos for the quasiperiodic bouncing ball. *Physical Review E*, 56(4):4868–4871.
- [Domenech-Carbo - 2014] DOMENECH-CARBO, A. (2014). On the tangential restitution problem : independent friction-restitution modeling. *Granular Matter*, 16(4):573–582.
- [Douarche *et al.* - 2006] DOUARCHE, F., JOUBAUD, S., GARNIER, N. B., PETROSYAN, A. et CILIBERTO, S. (2006). Work fluctuation theorems for harmonic oscillators. *Physical Review Letters*, 97(14).
- [Edwards - 1994] EDWARDS, S. (1994). The role of entropy in the specification of a powder. *In Granular Matter*, pages 121–140. Springer.
- [Einstein - 1905] EINSTEIN, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 322(8):549–560.
- [Evans *et al.* - 1993] EVANS, D. J., COHEN, E. G. D. et MORRIS, G. P. (1993). Probability of 2nd law violations in shearing steady-states. *Physical Review Letters*, 71(15):2401–2404.
- [Evans et Searles - 2002] EVANS, D. J. et SEARLES, D. J. (2002). The fluctuation theorem. *Advances in Physics*, 51(7):1529–1585.
- [Everson - 1986] EVERSON, R. M. (1986). Chaotic dynamics of a bouncing ball. *Physica D*, 19(3):355–383.
- [Falcón et Falcon - 2009] FALCÓN, C. et FALCON, E. (2009). Fluctuations of energy flux in a simple dissipative out-of-equilibrium system. *Physical Review E*, 79(4).
- [Falcon *et al.* - 2006] FALCON, E., AUMAITRE, S., EVESQUE, P., PALENCIA, F., LECOUTRE-CHABOT, C., FAUVE, S., BEYSENS, D. et GARRABOS, Y. (2006). Collision statistics in a dilute granular gas fluidized by vibrations in low gravity. *Europhysics Letters*, 74(5):830–836.
- [Falcon *et al.* - 2008] FALCON, E., AUMAITRE, S., FALCÓN, C., LAROCHE, C. et FAUVE, S. (2008). Fluctuations of energy flux in wave turbulence. *Physical Review Letters*, 100(6).
- [Falcon *et al.* - 1999] FALCON, E., FAUVE, S. et LAROCHE, C. (1999). Cluster formation, pressure and density measurements in a granular medium fluidized by vibrations. *European Physical Journal B*, 9(2):183–186.
- [Falcon *et al.* - 2001] FALCON, É., FAUVE, S. et LAROCHE, C. (2001). Experimental study of a granular gas fluidized by vibrations. *In Granular Gases*, pages 244–253. Springer.
- [Falcon *et al.* - 1998] FALCON, E., LAROCHE, C., FAUVE, S. et COSTE, C. (1998). Behavior of one inelastic ball bouncing repeatedly off the ground. *European Physical Journal B*, 3(1):45–57.
- [Feitosa et Menon - 2004] FEITOSA, K. et MENON, N. (2004). Fluidized granular medium as an instance of the fluctuation theorem. *Physical Review Letters*, 92(16).

- [Fodor *et al.* - 2014] FODOR, É., KANAZAWA, K., HAYAKAWA, H., VISCO, P. et van WIJLAND, F. (2014). Energetics of active fluctuations in living cells. *Physical Review E*, 90(4):042724.
- [Gabay et Toulouse - 1981] GABAY, M. et TOULOUSE, G. (1981). Coexistence of spin-glass and ferromagnetic orderings. *Physical Review Letters*, 47(3):201.
- [Gallavotti - 1997] GALLAVOTTI, G. (1997). Chaotic principle : some applications to developed turbulence. *Journal of statistical physics*, 86(5-6):907–934.
- [Gallavotti et Cohen - 1995] GALLAVOTTI, G. et COHEN, E. G. D. (1995). Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical-mechanics. *Physical Review Letters*, 74(14):2694–2697.
- [Garcia-Cid *et al.* - 2015] GARCIA-CID, A., GUTIERREZ, P., FALCÓN, C., AUMAITRE, S. et FALCON, E. (2015). Statistics of injected power on a bouncing ball subjected to a randomly vibrating piston. *Physical Review E*, 92(3).
- [Gardiner - 1985] GARDINER, C. (1985). *Stochastic Methods*. Springer.
- [Garnier et Ciliberto - 2005] GARNIER, N. et CILIBERTO, S. (2005). Nonequilibrium fluctuations in a resistor. *Physical Review E*, 71(6).
- [Gaspard - 2004] GASPARD, P. (2004). Time-reversed dynamical entropy and irreversibility in markovian random processes. *Journal of Statistical Physics*, 117(3-4):599–615.
- [Gilbert - 2004] GILBERT, T. (2004). Entropy fluctuations in shell models of turbulence. *Europhysics Letters*, 67(2):172–178.
- [Géminard et Bertin - 2010] GÉMINARD, J.-C. et BERTIN, E. (2010). Aging of the frictional properties induced by temperature variations. *Physical Review E*, 82(5).
- [Géminard et Laroche - 2003] GÉMINARD, J. C. et LAROCHE, C. (2003). Energy of a single bead bouncing on a vibrating plate : Experiments and numerical simulations. *Physical Review E*, 68(3).
- [Géminard et Laroche - 2004] GÉMINARD, J. C. et LAROCHE, C. (2004). Pressure measurement in two-dimensional horizontal granular gases. *Physical Review E*, 70(2).
- [Gnoli *et al.* - 2014] GNOLI, A., PUGLISI, A., SARRACINO, A. et VULPIANI, A. (2014). Nonequilibrium brownian motion beyond the effective temperature. *Plos One*, 9(4).
- [Gnoli *et al.* - 2013] GNOLI, A., PUGLISI, A. et TOUCHETTE, H. (2013). Granular brownian motion with dry friction. *EPL (Europhysics Letters)*, 102(1):14002.
- [Goldburg *et al.* - 2001] GOLDBURG, W. I., GOLDSCHMIDT, Y. Y. et KELLAY, H. (2001). Fluctuation and dissipation in liquid-crystal electroconvection. *Physical review letters*, 87(24):245502.
- [Goldhirsch - 2003] GOLDHIRSCH, I. (2003). Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35:267–293.
- [Gradenigo *et al.* - 2015] GRADENIGO, G., FERRERO, E. E., BERTIN, E. et BARRAT, J.-L. (2015). Edwards thermodynamics for a driven athermal system with dry friction. *Physical Review Letters*, 115(14).
- [Green - 1954] GREEN, M. S. (1954). Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. ii. irreversible processes in fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 22(3):398–413.

- [Grenard *et al.* - 2008] GRENARD, V., GARNIER, N. et NAERT, A. (2008). The fluctuation–dissipation relation on a melde string in a turbulent flow ; considerations on a ‘dynamical temperature’. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2008(09):L09003.
- [Grossman *et al.* - 1997] GROSSMAN, E., ZHOU, T. et BEN-NAIM, E. (1997). Towards granular hydrodynamics in two dimensions. *Physical Review E*, 55(4):4200.
- [Hayakawa - 2005] HAYAKAWA, H. (2005). Langevin equation with coulomb friction. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 205(1-4):48–56.
- [Henrique *et al.* - 2000] HENRIQUE, C., BATROUNI, G. et BIDEAU, D. (2000). Diffusion as a mixing mechanism in granular materials. *Physical Review E*, 63(1):011304.
- [Holmes - 1982] HOLMES, P. J. (1982). The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2):173–189.
- [Huang - 2005] HUANG, K. (2005). *Lectures on statistical physics and protein folding*. World Scientific.
- [Huntley - 1998] HUNTLEY, J. M. (1998). Scaling laws for a two-dimensional vibro-fluidized granular material. *Physical Review E*, 58(4):5168–5170.
- [Jaeger *et al.* - 1996] JAEGER, H. M., NAGEL, S. R. et BEHRINGER, R. P. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68(4):1259–1273.
- [Javier Brey et Khalil - 2010] JAVIER BREY, J. et KHALIL, N. (2010). Critical behavior of two freely evolving granular gases separated by an adiabatic piston. *Physical Review E*, 82(5).
- [Kanazawa *et al.* - 2015] KANAZAWA, K., SANO, T. G., SAGAWA, T. et HAYAKAWA, H. (2015). Asymptotic derivation of langevin-like equation with non-gaussian noise and its analytical solution. *Journal of Statistical Physics*, 160(5):1294–1335.
- [Knaebel *et al.* - 2000] KNAEBEL, A., BELLOUR, M., MUNCH, J.-P., VIASNOFF, V., LEQUEUX, F. et HARDEN, J. (2000). Aging behavior of laponite clay particle suspensions. *EPL (Europhysics Letters)*, 52(1):73.
- [Kolmogorov - 1941] KOLMOGOROV, A. N. (1941). Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *In Akademiia Nauk SSSR Doklady*, volume 32, page 16.
- [Kowalik *et al.* - 1988] KOWALIK, Z. J., FRANASZEK, M. et PIERANSKI, P. (1988). Self-reanimating chaos in the bouncing-ball system. *Physical Review A*, 37(10):4016–4022.
- [Kubo - 1966] KUBO, R. (1966). Fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, 29:255.
- [Kubo *et al.* - 1957] KUBO, R., YOKOTA, M. et NAKAJIMA, S. (1957). Statistical-mechanical theory of irreversible processes. ii. response to thermal disturbance. *Journal of the Physical Society of Japan*, 12(11):1203–1211.
- [Kumaran - 1998] KUMARAN, V. (1998). Temperature of a granular material "fluidized" by external vibrations. *Physical Review E*, 57(5):5660–5664.
- [Kurchan - 1998] KURCHAN, J. (1998). Fluctuation theorem for stochastic dynamics. *Journal of Physics a-Mathematical and General*, 31(16):3719–3729.

- [L. Landau - 1990] L. LANDAU, E. Lifchitz, L. P. (1990). *Physique théorique - vol. 10. Cinétique physique*. Mir.
- [Labbe *et al.* - 1996] LABBE, R., PINTON, J. F. et FAUVE, S. (1996). Power fluctuations in turbulent swirling flows. *Journal De Physique Ii*, 6(7):1099–1110.
- [Lebowitz et Spohn - 1999] LEBOWITZ, J. L. et SPOHN, H. (1999). A gallavotti-cohen-type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 95(1-2):333–365.
- [Lecomte et Naert - 2014] LECOMTE, C. E. et NAERT, A. (2014). Experimental study of energy transport between two granular gas thermostats. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*.
- [Loeb - 1961] LOEB, L. B. (1961). *The kinetic theory of gases*. Dover Phoenix.
- [Losert *et al.* - 1999] LOSERT, W., COOPER, D. G. W., DELOUR, J., KUDROLLI, A. et GOLLUB, J. P. (1999). Velocity statistics in excited granular media. *Chaos*, 9(3):682–690.
- [Luck et Mehta - 1993] LUCK, J. M. et MEHTA, A. (1993). Bouncing ball with a finite restitution - chattering, locking, and chaos. *Physical Review E*, 48(5):3988–3997.
- [Majumdar et Kearney - 2007] MAJUMDAR, S. N. et KEARNEY, M. J. (2007). Inelastic collapse of a ball bouncing on a randomly vibrating platform. *Physical Review E*, 76(3).
- [Makse et Kurchan - 2002] MAKSE, H. A. et KURCHAN, J. (2002). Testing the thermodynamic approach to granular matter with a numerical model of a decisive experiment. *Nature*, 415(6872):614–617.
- [Marchetti *et al.* - 2013] MARCHETTI, M. C., JOANNY, J. F., RAMASWAMY, S., LIVERPOOL, T. B., PROST, J., RAO, M. et SIMHA, R. A. (2013). Hydrodynamics of soft active matter. *Reviews of Modern Physics*, 85(3).
- [McNamara et Barrat - 1997] MCNAMARA, S. et BARRAT, J.-L. (1997). Energy flux into a fluidized granular medium at a vibrating wall. *Physical Review E*, 55(6):7767.
- [McNamara et Falcon - 2005] MCNAMARA, S. et FALCON, E. (2005). Simulations of vibrated granular medium with impact-velocity-dependent restitution coefficient. *Physical Review E*, 71(3):031302.
- [McNamara et Luding - 1998] MCNAMARA, S. et LUDING, S. (1998). Energy flows in vibrated granular media. *Physical Review E*, 58(1):813.
- [Mehta - 2007] MEHTA, A. (2007). *Granular physics*. Cambridge University Press.
- [Mézard et Parisi - 2000] MÉZARD, M. et PARISI, G. (2000). Statistical physics of structural glasses. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 12(29):6655.
- [Monin et Yaglom - 1971] MONIN, A. et YAGLOM, A. (1971). *Statistical fluid mechanics*, vol. 1, 769 pp.
- [Moon *et al.* - 2001] MOON, S. J., SHATTUCK, M. D. et SWIFT, J. B. (2001). Velocity distributions and correlations in homogeneously heated granular media. *Physical Review E*, 64(3).
- [Mounier et Naert - 2012] MOUNIER, A. et NAERT, A. (2012). The hatano-sasa equality : Transitions between steady states in a granular gas. *Epl*, 100(3).

- [Naert - 2012] NAERT, A. (2012). Experimental study of work exchange with a granular gas : The viewpoint of the fluctuation theorem. *Epl*, 97(2).
- [Olafsen et Urbach - 1998] OLAFSEN, J. S. et URBACH, J. S. (1998). Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer. *Physical Review Letters*, 81(20):4369–4372.
- [Onsager - 1931a] ONSAGER, L. (1931a). Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Physical Review*, 37(4):405.
- [Onsager - 1931b] ONSAGER, L. (1931b). Reciprocal relations in irreversible processes. ii. *Physical Review*, 38(12):2265.
- [Pagonabarraga et al. - 2002] PAGONABARRAGA, I., TRIZAC, E., van NOIJE, T. P. C. et ERNST, M. H. (2002). Randomly driven granular fluids : Collisional statistics and short scale structure. *Physical Review E*, 65(1).
- [Peng et Ohta - 1998] PENG, G. et OHTA, T. (1998). Steady state properties of a driven granular medium. *Physical Review E*, 58(4):4737.
- [Pérez-Aparicio et al. - 2015] PÉREZ-APARICIO, R., CRAUSTE-THIBIERGE, C., COTTINET, D., TANASE, M., METZ, P., BELLON, L., NAERT, A. et CILIBERTO, S. (2015). Simultaneous and accurate measurement of the dielectric constant at many frequencies spanning a wide range. *Review of Scientific Instruments*, 86(4):044702.
- [Pieranski - 1983] PIERANSKI, P. (1983). Jumping particle model - period doubling cascade in an experimental system. *Journal De Physique*, 44(5):573–578.
- [Pieranski et al. - 1985] PIERANSKI, P., KOWALIK, Z. et FRANASZEK, M. (1985). Jumping particle model - a study of the phase-space of a non-linear dynamical system below its transition to chaos (+). *Journal De Physique*, 46(5):681–686.
- [Prost et al. - 2009] PROST, J., JOANNY, J. F. et PARRONDO, J. M. R. (2009). Generalized fluctuation-dissipation theorem for steady-state systems. *Physical Review Letters*, 103(9).
- [Puglisi et al. - 1998] PUGLISI, A., LORETO, V., MARCONI, U. M. B., PETRI, A. et VULPIANI, A. (1998). Clustering and non-gaussian behavior in granular matter. *Physical Review Letters*, 81(18):3848–3851.
- [Reed - 1985] REED, J. (1985). Energy-losses due to elastic wave-propagation during an elastic impact. *Journal of Physics D-Applied Physics*, 18(12):2329–2337.
- [Reid et al. - 2005] REID, J., SEVICK, E. M. et EVANS, D. (2005). A unified description of two theorems in non-equilibrium statistical mechanics : The fluctuation theorem and the work relation. *EPL (Europhysics Letters)*, 72(5):726.
- [Risken - 1996] RISKEN, H. (1996). *The Fokker-Plank Equation - Methods of solution and applications*. Springer.
- [Robert et Sommeria - 1991] ROBERT, R. et SOMMERIA, J. (1991). Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 229:291–310.
- [Rouyer et Menon - 2000] ROUYER, F. et MENON, N. (2000). Velocity fluctuations in a homogeneous 2d granular gas in steady state. *Physical Review Letters*, 85(17):3676–3679.
- [Savard et al. - 2009] SAVARD, M., TREMBLAY-DARVEAU, C. et GERVAIS, G. (2009). Flow conductance of a single nanohole. *Physical Review Letters*, 103(10).

- [Schuler *et al.* - 2005] SCHULER, S., SPECK, T., TIETZ, C., WRACHTRUP, J. et SEIFERT, U. (2005). Experimental test of the fluctuation theorem for a driven two-level system with time-dependent rates. *Physical Review Letters*, 94(18).
- [Searles et Evans - 2000] SEARLES, D. J. et EVANS, D. J. (2000). The fluctuation theorem and green–kubo relations. *The Journal of Chemical Physics*, 112(22):9727–9735.
- [Seifert - 2012] SEIFERT, U. (2012). Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines. *Reports on Progress in Physics*, 75(12).
- [Serero *et al.* - 2006] SERERO, D., GOLDBIRSCHE, I., NOSKOWICZ, S. H. et TAN, M. L. (2006). Hydrodynamics of granular gases and granular gas mixtures. *Journal of Fluid Mechanics*, 554:237–258.
- [Shang *et al.* - 2005] SHANG, X.-D., TONG, P. et XIA, K.-Q. (2005). Test of steady-state fluctuation theorem in turbulent rayleigh–bénard convection. *Physical Review E*, 72(1):015301.
- [Smith *et al.* - 1981] SMITH, P. A., SPENCER, C. D. et JONES, D. E. (1981). Microcomputer listens to the coefficient of restitution. *American Journal of Physics*, 49(2):136–140.
- [Sondergaard *et al.* - 1990] SONDERGAARD, R., CHANEY, K. et BRENNEN, C. E. (1990). Measurements of solid spheres bouncing off flat plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 57(3):694–699.
- [Stensgaard et Laegsgaard - 2001] STENSGAARD, I. et LAEGSGAARD, E. (2001). Listening to the coefficient of restitution-revisited. *American Journal of Physics*, 69(3):301–305.
- [Thornton *et al.* - 2013] THORNTON, C., CUMMINS, S. J. et CLEARY, P. W. (2013). An investigation of the comparative behaviour of alternative contact force models during inelastic collisions. *Powder Technology*, 233:30–46.
- [Tillett - 1954] TILLET, J. P. A. (1954). A study of the impact on spheres of plates. *Proceedings of the Physical Society of London Section B*, 67(417):677–688.
- [Touchette *et al.* - 2012] TOUCHETTE, H., PRELLBERG, T. et JUST, W. (2012). Exact power spectra of brownian motion with solid friction. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(39):395002.
- [Tufillaro et Albano - 1986] TUFILLARO, N. B. et ALBANO, A. M. (1986). Chaotic dynamics of a bouncing ball. *American Journal of Physics*, 54(10):939–944.
- [Van der Weele - 2008] VAN DER WEELE, K. (2008). Granular gas dynamics : how maxwell’s demon rules in a non-equilibrium system. *Contemporary Physics*, 49(3):157–178.
- [Van Noije et Ernst - 1998] VAN NOIJE, T. et ERNST, M. (1998). Velocity distributions in homogeneously cooling and heated granular fluids. *arXiv preprint cond-mat/9803042*.
- [Van Noije *et al.* - 1999] VAN NOIJE, T., ERNST, M., TRIZAC, E. et PAGONABARRAGA, I. (1999). Randomly driven granular fluids : Large-scale structure. *Physical Review E*, 59(4):4326.
- [Viot *et al.* - 2011] VIOT, P., BURDEAU, A. et TALBOT, J. (2011). *Strong ratchet effects for heterogeneous granular particles in the Brownian limit*, volume 1332 de *AIP Conference Proceedings*, pages 235–236.

- [Visco *et al.* - 2005] VISCO, P., PUGLISI, A., BARRAT, A., TRIZAC, E. et van WIJLAND, F. (2005). Injected power and entropy flow in a heated granular gas. *Europhysics Letters*, 72(1):55–61.
- [Visco *et al.* - 2006] VISCO, P., PUGLISI, A., BARRAT, A., TRIZAC, E. et van WIJLAND, F. (2006). Fluctuations of power injection in randomly driven granular gases. *Journal of Statistical Physics*, 125(3):533–568.
- [Vogel et Linz - 2011] VOGEL, S. et LINZ, S. J. (2011). Regular and chaotic dynamics in bouncing ball models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(3):869–884.
- [W. Ebeling - 2005] W. EBELING, I. M. S. (2005). *Statistical Thermodynamics and Stochastic Theory of Nonequilibrium Systems*. World Scientific.
- [W. H. Press - 2007] W. H. PRESS, S. A. Teukolsky, W. T. V. B. P. F. (2007). *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- [Wang *et al.* - 2002] WANG, G. M., SEVICK, E. M., MITTAG, E., SEARLES, D. J. et EVANS, D. J. (2002). Experimental demonstration of violations of the second law of thermodynamics for small systems and short time scales. *Physical Review Letters*, 89(5).
- [Warr *et al.* - 1996] WARR, S., COOKE, W., BALL, R. C. et HUNTLEY, J. M. (1996). Probability distribution functions for a single-particle vibrating in one dimension : Experimental study and theoretical analysis. *Physica A*, 231(4):551–574.
- [Warr et Huntley - 1995] WARR, S. et HUNTLEY, J. M. (1995). Energy input and scaling laws for a single-particle vibrating in one-dimension. *Physical Review E*, 52(5):5596–5601.
- [Westerweel *et al.* - 2009] WESTERWEEL, J., FUKUSHIMA, C., PEDERSEN, J. M. et HUNT, J. (2009). Momentum and scalar transport at the turbulent/non-turbulent interface of a jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 631:199–230.
- [Williams et MacKintosh - 1996] WILLIAMS, D. et MACKINTOSH, F. (1996). Driven granular media in one dimension : Correlations and equation of state. *Physical Review E*, 54(1):R9.
- [Wright *et al.* - 2008] WRIGHT, H. S., SWIFT, M. R. et KING, P. J. (2008). The horizontal stability of a ball bouncing upon a vertically vibrated concave surface. *European Physical Letter*, 81(1).
- [Zamponi - 2007] ZAMPONI, F. (2007). Is it possible to experimentally verify the fluctuation relation? a review of theoretical motivations and numerical evidence. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*.

