

MASTER SCIENCES DE LA MATIÈRE  
*École Normale Supérieure de Lyon*  
*Université Claude Bernard Lyon I*

Stage 2011–2012  
David Chateau  
M1 Physique

---

## Frottement solide anisotrope et fractures

---

**Résumé** : Pour déterminer une direction de fracturation, il existe des critères qui demandent confirmation, en particulier lorsque la fracture se propage dans un milieu anisotrope. Notre objectif a été au cours de ce stage de mettre en oeuvre une expérience originale qui simplifie le problème initial afin de tester un de ces critères.

Plus précisément, nous avons étudié la friction solide d'un patin forcé à se déplacer selon une trajectoire fermée sur une surface anisotrope. Nous analysons ses trajectoires en regard des propriétés frictionnelles, avant de discuter la compatibilité du critère testé avec un principe de minimisation.

**Mots clefs** : *Anisotropie, Frottement solide, Fractures*

Stage encadré par :

**M. Jean-Christophe Gémard**, Directeur de Recherche CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon

Jean-Christophe.Geminard@ens-lyon.fr / tél. (+33) 4 72 72 83 75

Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon

46 Allée d'Italie

69007 Lyon



27 juillet 2012

# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier les personnes suivantes :

- M. Jean-Christophe Géminard, pour m'avoir proposé ce stage et m'avoir toujours aidé avec sympathie et pédagogie dans la résolution des problèmes rencontrés.

- M. Denis Le Tourneau, pour avoir eu la patience de réaliser en atelier les travaux dont nous avons besoin.

- Mme Valérie Vidal et M. Baptiste Blanc, pour m'avoir accueilli avec sympathie dans leur salle de travail, ainsi que pour leurs échanges intéressants et amicaux.

Et bien sûr, plus largement, le personnel du laboratoire, toujours disponible et de bonne humeur.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Les Fractures</b>	<b>1</b>
2.1	Généralités . . . . .	1
2.2	Différentes hypothèses prédictives . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>2</b>
3.1	Description . . . . .	2
3.2	Intérêts . . . . .	4
3.3	Calibration . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Méthode expérimentale</b>	<b>5</b>
4.1	Acquisition . . . . .	5
4.2	Traitement d'image . . . . .	6
4.3	Traitement des données . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Analyse théorique</b>	<b>7</b>
5.1	Rappels . . . . .	7
5.2	Cas d'une friction isotrope . . . . .	7
5.3	Analyse du système . . . . .	7
5.4	Reconstruction des trajectoires . . . . .	8
5.5	Prédictions . . . . .	9
5.6	Principe de minimisation . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Resultats</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Simulations</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Analogie avec un cristal</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>

## 1 Introduction

Ce stage, et plus largement cette expérience, s'inscrit dans la suite de précédentes études portant sur les problèmes de fractures des matériaux, et en particulier s'inspire de la thèse de M. Victor ROMERO.[1] Ce stage reprend également l'idée d'une expérience proposée alors dans le cadre d'un TP de L3 de l'ENS, ayant alors mis en évidence d'autres phénomènes que ceux qui nous intéresseront ici.[2]

A l'heure actuelle, les travaux menés sur la dynamique des matériaux permettent de déterminer dans quelle direction et sur quelle distance une fracture va se propager dans un milieu anisotrope, sous réserve d'admettre des principes qu'il nous faut tester. Notre objectif avec cette expérience a donc été de tester certains de ces postulats.

Ainsi, nous exposerons dans une première partie quelques brèves notions générales sur les fractures. Dans un second temps, nous détaillerons le dispositif expérimental ainsi que l'analyse théorique qui peut en être faite. Enfin, les résultats obtenus seront discutés dans la dernière partie de ce rapport.

## 2 Les Fractures

### 2.1 Généralités

Une fracture est une rupture dans la continuité physique initiale d'un matériau. Cette rupture est causée par des contraintes extérieures qui ont pour effet de déformer le matériau. Si le matériau est ductile, alors celui-ci va se déformer pour absorber l'énergie des contraintes. Au contraire, lorsque le matériau est fragile, il va subir une légère déformation élastique pour tenter d'absorber l'énergie des contraintes, avant de casser si la contrainte est trop élevée. En notant alors  $U$  l'énergie interne du milieu considéré,  $W$  l'énergie apportée par les contraintes extérieures,  $E_e$  l'énergie élastique emmagasinée dans le matériau et  $E_s$  l'énergie de surface nécessaire à la création d'une fracture, on obtient le bilan énergétique suivant :

$$U = U_e + U_s - W \quad (2.1)$$

On peut noter qu'il y a trois modes possibles lors de la propagation d'une fracture, en distinguant comment se comportent les surfaces de fractures au niveau de sa formation (fig 2.1). Cependant, une analogie de notre expérience avec les différents modes présentés n'est pas possible, en raison de la dimensionnalité inférieure de notre « fracture ». Pour information il existe :

- Le mode 1, appelé « Ouverture » qui consiste à écarter les surfaces de fractures des deux parties du matériau symétriquement.
- Le mode 2, appelé « Cisaillement dans le plan » ou « Cisaillement » qui consiste à faire coulisser les surfaces de fractures des deux parties du matériau l'une par rapport à l'autre selon l'axe de propagation de la fracture.
- Le mode 3, appelé « Cisaillement hors du plan » ou « Vissage » qui consiste à faire coulisser les surfaces de fractures des deux parties du matériau l'une par rapport à l'autre selon un axe orthogonal à la direction de propagation de la fracture.

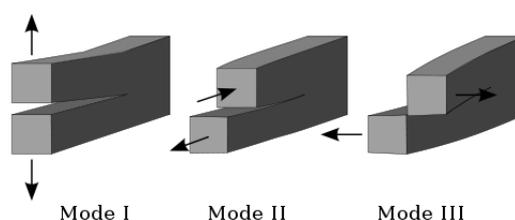


FIGURE 2.1 – Propagation d'une fracture : 3 modes possibles. (Illustration Wikipedia)

## 2.2 Différentes hypothèses prédictives

Il existe un critère - le critère de Griffith[3] - qui traduit la conservation de l'énergie et donne la condition de propagation de la fracture. Cependant, ce critère n'impose pas de direction particulière. En effet, considérons que la fracture se propage de façon quasistatique : le système doit alors être dans un état d'équilibre en permanence, donc son énergie doit être minimale et constante vis à vis de l'évolution du système. A partir de l'équation 2.1, en posant

$$\Pi = W - U_e \quad (2.2)$$

et en considérant qu'il y a création d'une aire  $dA$  au niveau de la fracture, on obtient

$$\frac{dU}{dA} = \frac{dU_s}{dA} - \frac{d\Pi}{dA} = 0 \quad (2.3)$$

et l'énergie transférée dans la fracture est

$$\frac{dU_s}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} \quad (2.4)$$

Au bout du compte, ce critère nous donne une seule équation qui relie les variables direction et longueur du saut de la fracture, mais ne donne en aucun cas la direction que va choisir de suivre la fracture.

On trouve alors dans la littérature [1] trois critères souvent cités pour répondre à cette question :

- ▷ Critère de la contrainte ouvrante maximale :  
La force est constamment égale à la force seuil nécessaire au début de propagation d'une fracture.
- ▷ Critère du maximum d'énergie dissipée :  
Localement, le système maximise sa dissipation d'énergie.
- ▷ Critère de symétrie locale :  
La fracture évolue de façon à supprimer le mode 2.

Le but de ce stage est de tester sur notre expérience la validité de la première hypothèse de nature cinématique, et de montrer son équivalence avec la seconde qui est de nature énergétique.

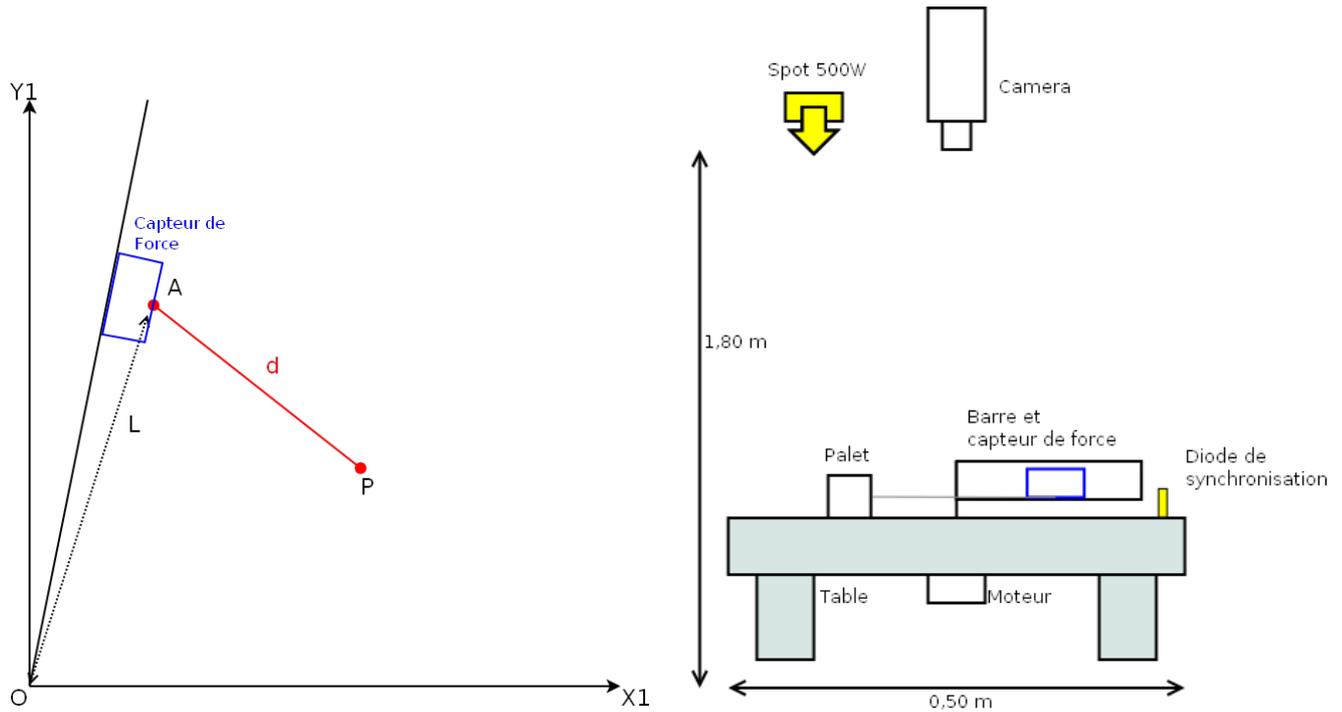
## 3 Dispositif expérimental

### 3.1 Description

Le système s'articule autour d'une table horizontale de couleur blanche, qui correspondra au plan d'étude du mouvement. Sur cette table, un axe central motorisé entraîne un bras à vitesse angulaire constante  $\omega = \dot{\theta}$ . On fixe sur ce bras, à une distance  $L$  du centre, un capteur de force auquel on attache un fil de longueur  $d$ , lui-même lié à un palet de masse  $m$ . La palet circulaire de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est tiré par un fil attaché en son bord afin que sa rotation suive celle du bras qui l'entraîne. Le dispositif est filmé par une caméra CCD d'une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels située à 1,80 mètres de haut à l'aplomb du centre du système avec une fréquence de 30 images par seconde. De plus, un éclairage important est mis en oeuvre pour aider la détection par contraste de pastilles elliptiques mates noires lors du traitement d'image (fig 3.1).

La table peut-être penchée pour introduire une anisotropie effective de mode 1 ou peut-être recouverte d'une planche de bois claire afin d'induire une anisotropie de friction de mode 2 de quelques pourcents. Les fibres du bois et la pente sont alors orientées selon l'axe d'un des bords de la table. Il a également été soudé un interrupteur inverseur pour dérouler le fil du capteur de force embarqué, qui fini par atteindre une torsion importante au bout d'une vingtaine de tours. L'interrupteur permet alors de changer le signe de la tension appliquée au moteur, et donc d'inverser son sens de rotation

afin d'annuler la torsion accumulée par le fil lors des acquisitions, qui ont toujours lieu dans le sens trigonométrique. Il a également fallu installer une carte d'acquisition pour enregistrer le signal du capteur de force sur l'ordinateur. Enfin, on utilise une diode placée en bord de table dont on enregistre la tension au cours du temps, grâce à la même carte d'acquisition que celle utilisée pour le capteur de force. Ceci nous permet de synchroniser la vidéo et le signal du capteur de force : en effet, une chute de tension correspond alors à l'extinction de la diode sur la vidéo. Une alimentation réglable est utilisée pour alimenter le moteur et une alimentation d'ordinateur est utilisée pour alimenter le capteur et la diode, afin d'avoir une tension fixe dans le temps. Deux photographies sont données pour illustration (fig 3.2).



(a) Vue de dessus - un axe central motorisé  $O$  entraîne un bras à vitesse angulaire constante sur lequel on fixe au point  $A$  situé à une distance  $L$  du centre un capteur de force, auquel on attache un fil de longueur  $d$ , lui-même lié à un palet  $P$  de masse  $m$ .  
 (b) Vue de côté - Le dispositif est filmé par une caméra CCD à l'aplomb du centre du système et éclairé par un spot de 500 W.

FIGURE 3.1 – Schémas de l'expérience et notations.

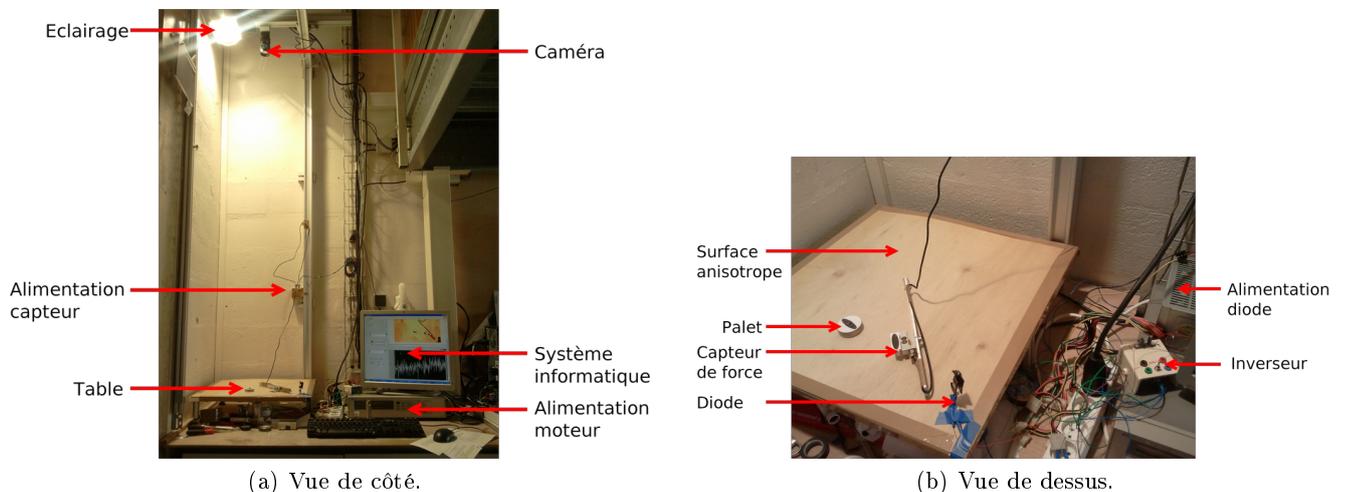


FIGURE 3.2 – Photographies de l'expérience.

### 3.2 Intérêts

Ce montage permet une bonne analogie avec le problème initial. La contrainte élastique est modélisée par un ressort placé sur le lien reliant la barre et le palet, ou par un simple fil. On remarque que l'élasticité ne comporte alors plus aucune anisotropie par rapport au problème initial. Cela permet de s'affranchir de l'anisotropie de l'élasticité du matériau et de ne garder comme seul paramètre que l'anisotropie de la force de friction. La fracture, elle, est analogue au frottement solide ayant lieu lors du déplacement du patin. En effet, l'énergie dissipée est proportionnelle à la distance parcourue. Enfin, la contrainte extérieure correspond à la force de traction du fil entraîné à vitesse angulaire constante par la barre.

On peut alors observer différents régimes selon les paramètres d'élasticité et de friction. Même si ce n'est pas l'objet de cet exposé, nous avons pu les observer lors de tests. Il en résulte une vitesse critique de rotation[2]

$$\omega_{lim} = \frac{2(\mu_s - \mu)g}{\pi L} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire,  $\mu_s$  et  $\mu$  les coefficients de frottement statique et dynamique,  $g$  la pesanteur,  $L$  la distance du centre au point d'ancrage,  $k$  la raideur du ressort et  $m$  la masse du palet.

Ainsi, on obtient 3 régimes différents :

- ▷ Un régime de stick-slip pour  $\omega < \omega_{lim}$
- ▷ Un régime oscillant pour  $\omega = \omega_{lim}$
- ▷ Un régime continu pour  $\omega > \omega_{lim}$

Par la suite, nous nous sommes toujours placés dans le cas du régime continu en remplaçant le ressort par un fil afin de satisfaire au mieux à l'hypothèse quasi-statique.

Pour ce qui est de la fracture, il faut bien comprendre que, contrairement à ce que l'on pourrait penser, le déplacement ne se fait pas dans la direction de la force appliquée par le fil à cause de l'anisotropie de friction. En effet, en augmentant la force appliquée dans une direction de référence, on atteint la force seuil dans une direction  $\epsilon \neq 0$ , ce qui est représenté sur le schéma suivant (fig 3.3).

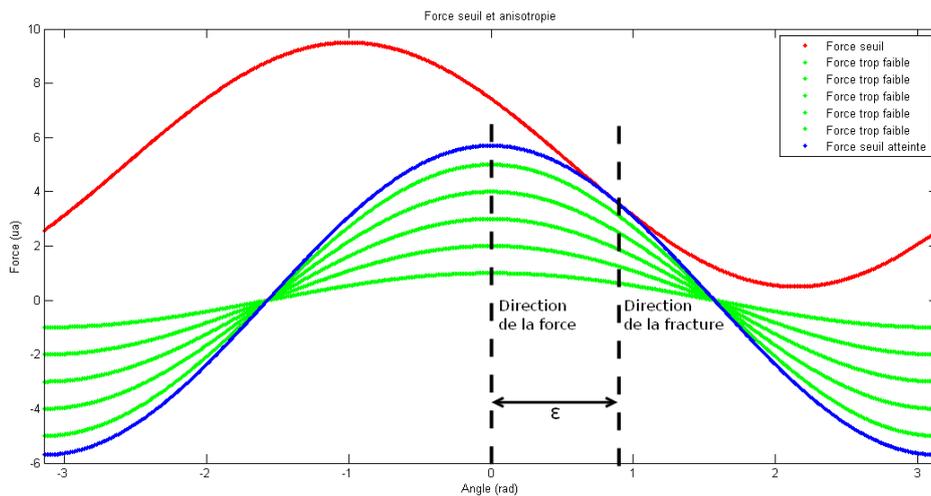
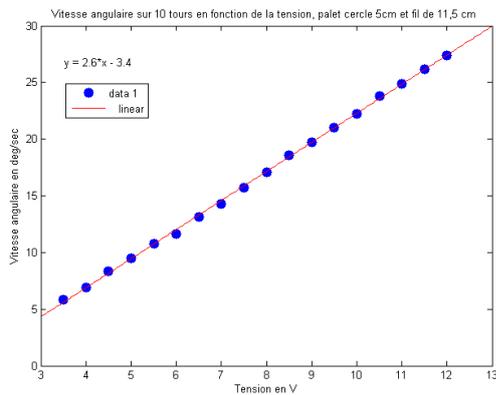


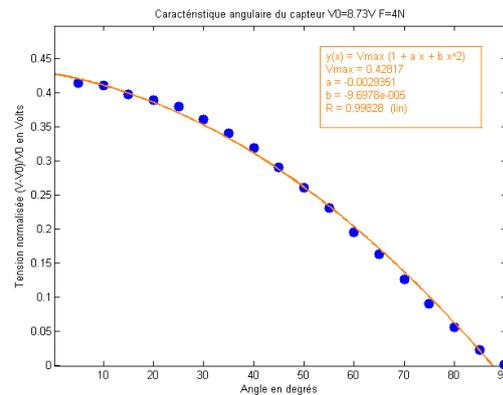
FIGURE 3.3 – L'anisotropie de friction induit un décalage d'un angle  $\epsilon$  entre la direction de la force et la direction de la fracture.

### 3.3 Calibration

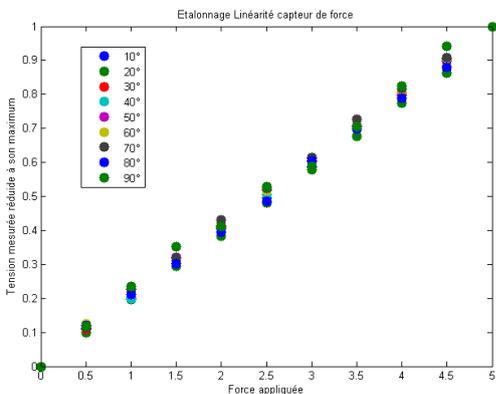
Le réglage de l'horizontalité du système est fait à l'aide d'un niveau à bulle, et l'alignement de l'axe de la caméra ainsi que son centrage sont effectués avec un simple fil à plomb. On calibre ensuite la vitesse de rotation en fonction de la tension appliquée au moteur pas à pas (fig 3.4a), en vérifiant qu'elle évolue linéairement. Par la suite, la majorité des expériences se déroulent à une vitesse d'un tour toutes les 30 secondes. Nous étalonnons la réponse du capteur en fonction de l'angle et en fonction de la force appliquée (fig 3.4b). En particulier, on vérifie que la relation entre la tension et la force reste linéaire, et cela quel que soit l'angle sous lequel on exerce la force (fig 3.4c). Enfin, on teste l'alignement en mesurant l'excentricité de la trajectoire du point  $A$  : on obtient bien une excentricité nulle à un pourcent près (fig 3.4d). On notera qu'une précision de  $10^{-2}$  sur l'excentricité correspond à une précision de  $10^{-4}$  sur les points de la trajectoire.



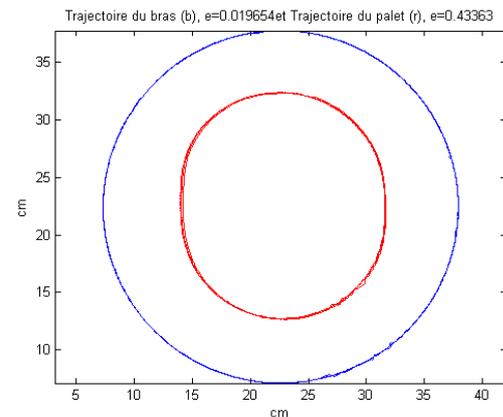
(a) Linéarité de la vitesse de rotation du moteur en fonction de la tension de commande



(b) Réponse du capteur en fonction de l'angle



(c) Linéarité de la réponse du capteur en fonction de la force appliquée à tout angle



(d) Mesure de l'ellipticité des trajectoires

FIGURE 3.4 – Calibrations

## 4 Méthode expérimentale

### 4.1 Acquisition

Pour repérer les points caractéristiques de la trajectoire au cours du temps, on fixe des ellipses mates aux endroits souhaités. Cette forme a pour nous l'avantage d'indiquer à la fois une position et une direction lors de la détection. On lance alors l'acquisition avec un programme Labview précédemment

créé lors d'un autre TP, et adapté pour l'occasion. Les signaux électriques de la diode et du capteur de force sont directement enregistrés dans un fichier texte, alors que le signal vidéo nécessite un traitement a posteriori afin de récupérer les informations qui nous intéressent (cf Annexe 3 - 9).

## 4.2 Traitement d'image

Le traitement de la vidéo est effectué avec une macro du logiciel ImageJ créée pendant le stage (cf Annexe 1 - 9). Pour chaque ellipse, on obtient la mesure de la position et de l'angle qu'elle fait avec un bord de la table, choisi comme axe de référence. Cette référence correspond à l'axe des abscisses des schémas du dispositif. On donne au programme le nombre de points à repérer, les coordonnées de ces points sur la première image, l'emplacement et le nom du fichier vidéo, ainsi que le nombre d'images de la vidéo. On peut également changer le niveau du seuil de détection, le rayon de la zone de recherche, ainsi que l'aire minimale et maximale que doit avoir une ellipse pour être détectée. Le programme fait alors le travail suivant, en boucle sur chaque image : (fig 4.1)

- ▷ Ouverture de l'image numéro k de la vidéo.
- ▷ Conversion en échelle de gris.
- ▷ Application du seuil de détection.
- ▷ Conversion en binaire.
- ▷ Abrasion puis extension (fonction Open) des zones détectées pour enlever le bruit.
- ▷ Création d'une zone de recherche circulaire autour de la position précédente de l'ellipse recherchée.
- ▷ Mesure de la position et de l'angle de cette ellipse.
- ▷ Fermeture de l'image.

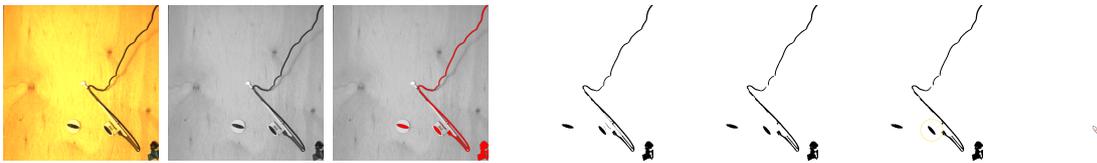


FIGURE 4.1 – Illustration des différentes étapes du traitement d'image

De plus, le programme vérifie le nombre de points repérés sur chaque image et indique un message d'erreur si nécessaire, en indiquant le numéro de l'image posant problème, ce qui permet de trouver rapidement la cause de l'échec de la détection. A la fin de la boucle sur les images, les résultats sont enregistrés dans un tableau réorganisé par rapport à celui du logiciel. Tant que le support reste clair, cette phase ne pose que peu de problèmes. Le principal défaut de cette méthode est le biais induit par le passage du patin sous le fil d'alimentation du capteur de force. Cependant, ces points sont connus et peuvent être ignorés. De plus, cette perturbation ne concerne qu'une faible partie de la trajectoire. On notera que l'ordinateur ne doit pas effectuer d'autres tâches pendant l'acquisition, au risque d'avoir une chute du nombre d'images enregistrées par seconde, ce qui conduit à une erreur de synchronisation au mieux, et un échec de la détection au pire.

## 4.3 Traitement des données

On utilise pour le traitement des données des programmes Matlab créés pendant le stage, dont un exemple est donné en annexe (cf Annexe 2 - 9). Le programme permet de calculer la vitesse et les différents angles utiles au tracé des graphiques, ainsi qu'à synchroniser les différents signaux. On utilise également une fonction nommée « `Ellipse_fit` » et une boîte à outils nommée « `Ezyfit` » pour effectuer l'interpolation des données avec un modèle. Ces deux fonctions ont été trouvées sur internet et se basent sur la méthode des moindres carrés.

## 5 Analyse théorique

### 5.1 Rappels

#### Lois de Coulomb sur le frottement solide

Soit  $\vec{v}_g$  la vitesse de glissement entre deux solides en contact,  $\vec{R}_t$  la réaction tangentielle et  $\vec{R}_n$  la réaction normale,  $\mu_s$  le coefficient de frottement statique et  $\mu$  le coefficient de frottement dynamique.

- ▷ Si  $\vec{v}_g = \vec{0}$ , on a  $\|\vec{R}_t\| \leq \mu_s \|\vec{R}_n\|$  où  $\mu_s$  est indépendant de la surface de contact et indépendant de  $\|\vec{R}_n\|$ .
- ▷ Si  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ , on a  $\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_n\|$  avec  $\vec{R}_t$  colinéaire et de sens opposé à  $\vec{v}_g$ . De plus,  $\mu$  est indépendant de  $\vec{v}_g$ .

C'est à dire que  $\vec{R}_t \times \vec{v}_g = \vec{0}$  et  $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_g < 0$ . On notera enfin que  $\mu \leq \mu_s$ .

### 5.2 Cas d'une friction isotrope

Dans le cas d'une surface isotrope, le système présente à priori une symétrie de révolution, on a donc des trajectoires circulaires pour le bras et le palet, respectivement de rayons  $L$  et  $R$ . De plus, le palet doit se déplacer en direction de la force de traction, alors tangente à sa trajectoire (fig 5.1).

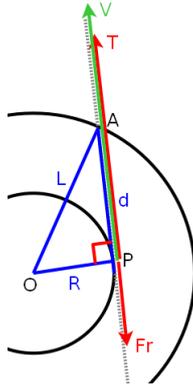


FIGURE 5.1 – Trajectoires et Forces

On a donc,

$$L^2 = R^2 + d^2 \quad (5.1)$$

donc

$$R = \sqrt{L^2 - d^2} \quad (5.2)$$

On voit donc que

$$d \leq L \quad (5.3)$$

sinon le lien  $AP$  s'enroule autour de l'axe en  $O$ .

### 5.3 Analyse du système

Une première question a été de regarder la rotation propre du palet si on le traîne par son centre. En effet, si le coefficient de friction dépend de la vitesse et diminue légèrement avec elle, on pourrait s'attendre à un frottement plus élevé à l'intérieur de la trajectoire qu'à l'extérieur. Ceci pourrait engendrer une rotation du patin sur lui-même différente selon la vitesse du patin. Cependant, un tel effet n'a pas été observé, la plage de vitesse étant relativement faible. Nous avons seulement observé une diffusion rotationnelle au cours du temps, de façon indépendante de la vitesse. Nous avons ainsi pu

par la suite considérer le palet comme un point matériel, ainsi que le coefficient de friction indépendant de la vitesse. De plus, afin de supprimer la rotation propre du palet et de toujours présenter la même face du palet dans le sens du déplacement, nous avons attaché le fil au bord du palet, en s'assurant que le couple ainsi exercé était négligeable. Ainsi, sa période de rotation est égale à sa période de révolution. On note de plus qu'il faut moins d'un demi-tour au palet pour atteindre son régime stationnaire, et que l'acquisition commence après avoir effectué un tour, et se poursuit sur cinq tours afin de s'assurer de la périodicité de la trajectoire. L'analyse détaillée du cas isotrope est donné en annexe (cf Annexe 4 - 9).

#### 5.4 Reconstruction des trajectoires

Pour reconstruire les trajectoires de façon numérique, on pose  $l = d/L$  et on prend  $L$  comme unité de longueur,  $l$  variant alors entre 0 et 1. On note  $\epsilon$  l'angle entre la force et la vitesse. La vitesse est dans la direction  $\theta$  et on définit l'angle  $\varphi$  comme indiqué sur le schéma (fig. 5.2).

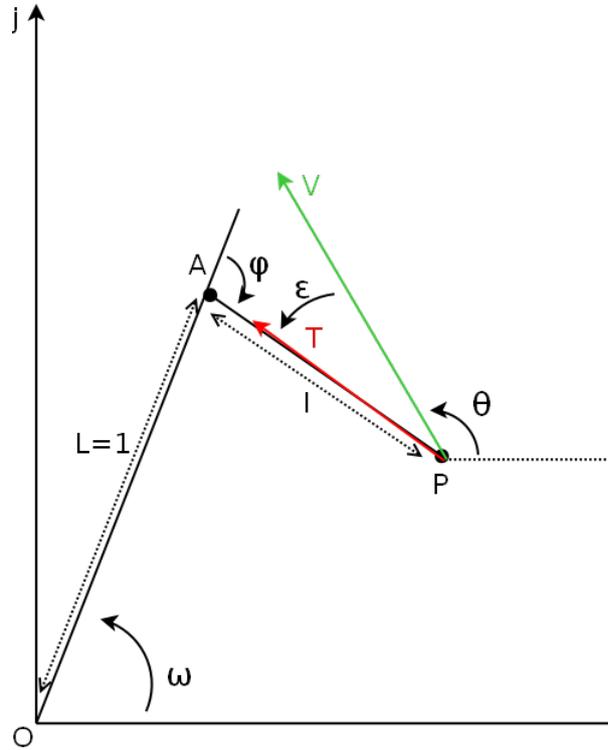


FIGURE 5.2 – Paramétrisation pour la reconstruction numérique

On a :

$$\vec{OA} = \vec{u}_r \quad (5.4)$$

$$\vec{AP} = l(\cos \varphi \vec{u}_r + \sin \varphi \vec{u}_\omega) \quad (5.5)$$

$$\vec{u}_r = \cos \omega \vec{i} + \sin \omega \vec{j} \quad (5.6)$$

$$\vec{u}_\omega = -\sin \omega \vec{i} + \cos \omega \vec{j} \quad (5.7)$$

$$\vec{OP} = (1 + l \cos \varphi) \vec{u}_r + l \sin \varphi \vec{u}_\omega \quad (5.8)$$

On considère  $F$  normalisé à  $mg$  définie par

$$\vec{F} = F(\cos \varphi \vec{u}_r + \sin \varphi \vec{u}_\omega) \quad (5.9)$$

On a donc d'après le postulat de la force seuil :

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{t} &= \mu(\theta) \\ \vec{F} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial \mu}{\partial \theta}(\theta) \end{cases} \quad (5.10)$$

et donc

$$\tan \epsilon = \frac{d}{d\theta} (\ln(\mu)) \quad (5.11)$$

De plus,

$$\cos \theta = \vec{t} \cdot \vec{i} \quad (5.12)$$

$$\sin \theta = \vec{t} \cdot \vec{j} \quad (5.13)$$

Par dérivation de  $\vec{OP}$  par rapport à  $\varphi$ , on obtient la tangente et la normale à la trajectoire :

$$\vec{t} = \frac{[1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi] \vec{u}_\omega - l \sin \varphi (1 + \varphi') \vec{u}_r}{\sqrt{(1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi (1 + \varphi')^2}} \quad (5.14)$$

$$\vec{n} = \frac{[1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi] \vec{u}_r + l \sin \varphi (1 + \varphi') \vec{u}_\omega}{\sqrt{(1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi (1 + \varphi')^2}} \quad (5.15)$$

Et par simple produit scalaire, on obtient les quantités recherchées :

$$\vec{F} \cdot \vec{t} = \frac{F \sin \varphi}{\sqrt{(1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi (1 + \varphi')^2}} \quad (5.16)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{-F [\cos \varphi + l(1 + \varphi')]}{\sqrt{(1 + l(1 + \varphi') \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi (1 + \varphi')^2}} \quad (5.17)$$

Donc, les trajectoires doivent répondre à l'équation suivante :

$$- \left[ \frac{\cos \varphi + l(1 + \varphi')}{\sin \varphi} \right] = \frac{d}{d\theta} (\ln \mu) \quad (5.18)$$

## 5.5 Prédiction

▷ Pour le mode 0 : Si on suppose que le support est isotrope - c'est à dire une anisotropie de mode 0 -, alors la force est constante et les trajectoires circulaires. On retrouve l'angle droit prévu par la symétrie du système, sa mesure est en effet de  $89 \pm 2^\circ$ . De plus, l'équation 5.18 se réduit alors à

$$\cos \varphi = -l \quad (5.19)$$

▷ Pour le mode 1 : Si on suppose que l'anisotropie est de mode 1, ce qu'on réalise en penchant une surface isotrope d'un angle  $\alpha$ , on s'attend à une périodicité de  $2\pi$  et on a :

$$dW = \mu(\theta) dl \quad (5.20)$$

$$= \mu \cos \alpha dl - \sin \alpha \cos \theta dl \quad (5.21)$$

$$= (\mu \cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta) dl \quad (5.22)$$

$$= \mu \cos \alpha \left[ 1 - \frac{\sin \alpha}{\mu \cos \alpha} \cos \theta \right] dl \quad (5.23)$$

$$= \mu \cos \alpha \left[ 1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \cos \theta \right] dl \quad (5.24)$$

d'où en posant

$$\mu(\theta) = \mu_0(1 + \epsilon(\alpha) \cos \theta) \quad (5.25)$$

et

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 - \epsilon' \cos(\theta - \theta_0)) \quad (5.26)$$

On obtient par identification que

$$\mu_0 = \mu \cos \alpha \quad (5.27)$$

et

$$\epsilon = \frac{\tan \alpha}{\mu} \quad (5.28)$$

ainsi que les lois suivantes données par Mathematica :

$$\epsilon' = l \epsilon \quad (5.29)$$

et

$$\theta_0 = \text{Arctan} \left( \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}} \right) \quad (5.30)$$

▷ Pour le mode 2 : Si on suppose que l'anisotropie est de mode 2, ce qu'on réalise en utilisant une planche de bois comme surface, on s'attend à une périodicité de  $\pi$  et on a :

$$\mu(\theta) = \mu_0(1 + \epsilon \cos 2\theta) = \mu_0(1 - \epsilon + 2\epsilon \cos^2 \theta) \quad (5.31)$$

$$\mu'(\theta) = 2\mu_0 \sin \theta \cos \theta \quad (5.32)$$

$$\frac{d \ln \mu}{d\theta} = - \frac{2\epsilon \sin \theta \cos \theta}{1 - \epsilon + 2\epsilon \cos^2 \theta} \quad (5.33)$$

A partir de cette dernière équation et de l'équation 5.18, Mathematica permet de prévoir le comportement du système, et en particulier l'évolution des trajectoires du patin en fonction de la longueur de fil. Ainsi, comme pour le mode 1, nous avons des prédictions sur l'anisotropie de la trajectoire, ainsi que sur son angle par rapport à une direction de la plaque. Il suffit pour cela de la supposer de la forme suivante :

$$\rho(\theta) = \rho_0 \{ 1 - \epsilon' \cos [2(\theta - \theta_0)] \} \quad (5.34)$$

On obtient alors les lois :

$$\epsilon' = \epsilon \frac{2l}{\sqrt{1 + 3l^2}} \quad (5.35)$$

et

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{Arctan} \left( \frac{\sqrt{1 - l^2}}{2l} \right) \quad (5.36)$$

## 5.6 Principe de minimisation

De façon générale, on a le bilan énergétique suivant

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = dE_l + \mu(\theta) dl' \quad (5.37)$$

en notant  $dW$  le travail élémentaire,  $\vec{F}$  la force extérieure appliquée par l'opérateur,  $dE_l$  la variation d'énergie élastique,  $\mu(\theta)$  le coefficient de friction dynamique dans la direction  $\theta$ ,  $dl$  la longueur sur laquelle on tire le fil et  $dl'$  la longueur de déplacement du patin. Donc,

$$dE_l = dW - \mu(\theta) dl' \quad (5.38)$$

Or par conservation de l'énergie,

$$F \cos \theta = \mu \quad (5.39)$$

et de façon géométrique,

$$dl' = \frac{dl}{\cos \theta} \quad (5.40)$$

Donc le taux d'énergie dissipée  $E_{RR}$  est

$$E_{RR} = \left. \frac{dE_l}{dl'} \right|_F = \cos \theta \left. \frac{dE_l}{dl} \right|_F = F \cos \theta - \mu(\theta) \quad (5.41)$$

D'où, par maximisation de la friction[3],

$$\left. \frac{dE_{RR}}{d\theta} \right|_F = 0 \Rightarrow -F \sin \theta - \mu' = 0 \quad (5.42)$$

Or, le long de la trajectoire on a

$$F \cos \theta = \mu \quad (5.43)$$

Donc

$$\mu \tan \theta = -\mu' \quad (5.44)$$

Ce principe de maximisation de l'énergie dissipée par friction est donc équivalent à avoir égalité et tangence de la force seuil, puisqu'on retrouve la même équation :

$$\tan \theta = -\frac{d}{d\theta} (\ln(\mu)) \quad (5.45)$$

## 6 Resultats

Nous avons étudié la dépendance de l'anisotropie des trajectoires en fonction de la géométrie du système. Nous avons exploré l'espace des paramètres et avons observé une dépendance des résultats en fonction du nombre sans dimension  $l/L$ , conformément à ce qui est prévu par la théorie.

Pour le mode 0 : On peut tester l'équation 5.19 sur un enregistrement. On a par mesure directe :

$$L = 15.0 \pm 0.5 \text{ cm} \quad (6.1)$$

$$l = 10.3 \pm 0.5 \text{ cm} \quad (6.2)$$

Donc

$$\frac{l}{L} = 0.69 \pm 0.06 \quad (6.3)$$

Et

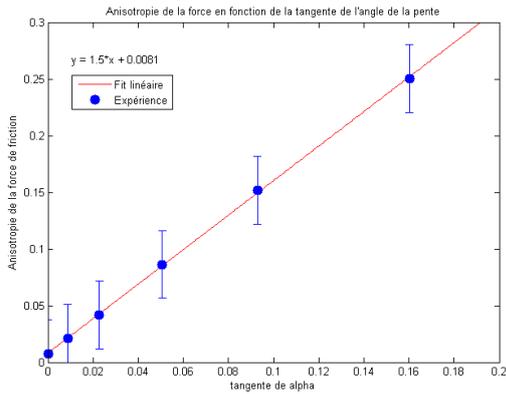
$$\varphi = 141 \pm 3^\circ \quad (6.4)$$

D'où

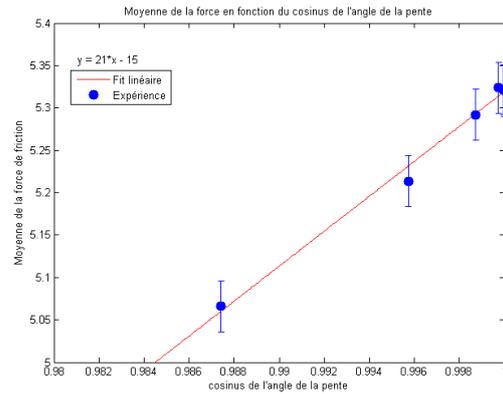
$$\cos \varphi = -0.78 \pm 0.04 \tag{6.5}$$

Les mesures sont donc compatibles, et le système vérifie bien l'équation 5.18 dans le cas d'une friction isotrope.

Voici maintenant les résultats obtenus pour le mode 1 : Les quatres lois prédemment exposées (eqs. 5.27,5.28,5.29,5.30) sont vérifiées (fig 6.1) (fig 6.2).

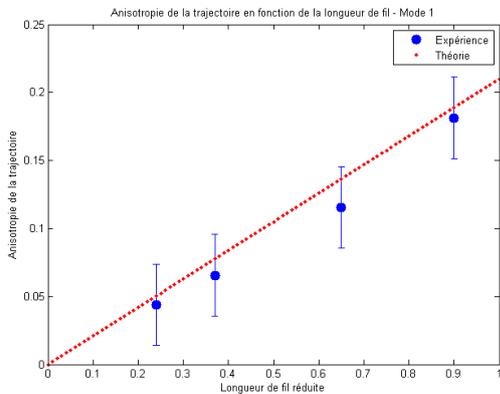


(a) Anisotropie de la force en fonction de la pente

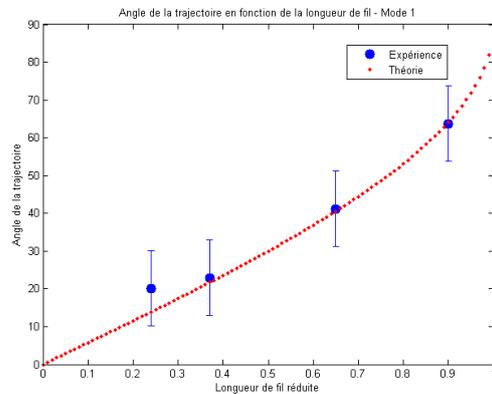


(b) Coefficient de frottement moyen en fonction de la pente

FIGURE 6.1 – Simulation d'une anisotropie de mode 1



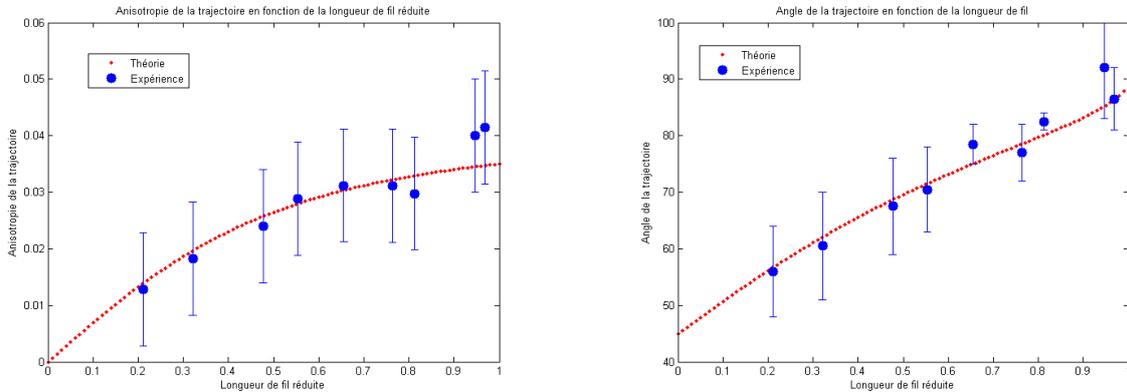
(a) Anisotropie de la trajectoire en fonction de la longueur de fil



(b) Angle de la trajectoire en fonction de la longueur de fil

FIGURE 6.2 – Caractéristiques des trajectoires du mode 1

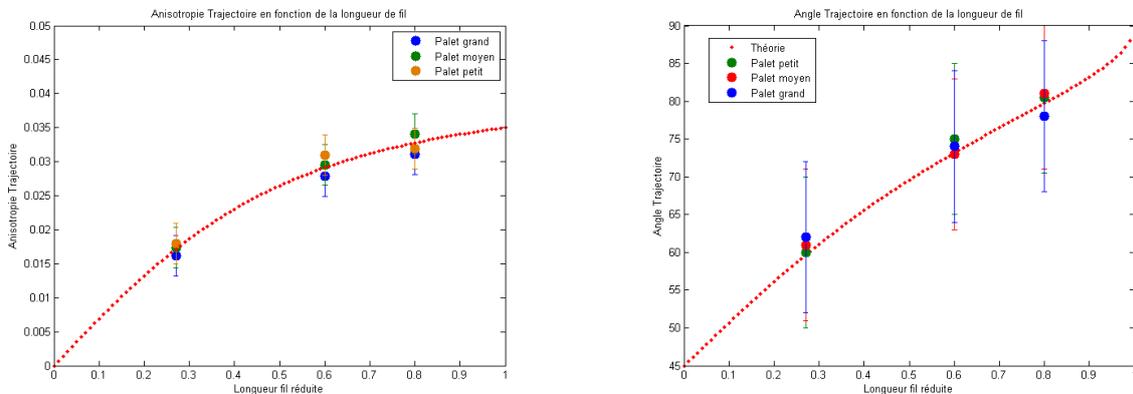
Et voici enfin les résultats pour le mode 2 : La loi sur l'anisotropie (eq. 5.35) est bien vérifiée, ainsi que celle sur l'angle (eq. 5.36) malgré une sensibilité plus faible (fig 6.3).



(a) Anisotropie de la trajectoire en fonction de la longueur de fil (b) Angle de la trajectoire en fonction de la longueur de fil

FIGURE 6.3 – Caractéristiques des trajectoires du mode 2

Enfin, nous avons vérifié qu'il n'y avait pas de dépendance des résultats avec l'aire de la surface du palet utilisé, ce qui confirme notre hypothèse du point matériel a posteriori (fig 6.4).



(a) Anisotropie Trajectoire

(b) Angle Trajectoire

FIGURE 6.4 – Palets de différentes surfaces

## 7 Simulations

A partir de l'équation 5.18 et grâce à un programme écrit par M. Géminard, Mathematica est capable de tracer les trajectoires calculées numériquement, et de nous donner la solution analytique au premier ordre en  $\epsilon$ . Cette solution s'écrit, pour le mode 2 :

$$\varphi(\theta) = -\text{Arccos}(-l) + \epsilon \left\{ \left[ a e^{-\frac{\sqrt{1-l^2}\theta}{l}} + \frac{4l(-2+3l^2)\sqrt{1-l^2}}{1+3l^2} \cos(2\theta) + \frac{2(1-7l^2+6l^4)}{1+3l^2} \sin(2\theta) \right] \right\} \quad (7.1)$$

où  $a$  est une constante dépendant de la condition initiale. On remarque que l'angle caractéristique du régime transitoire est

$$\tau = \frac{l}{\sqrt{1-l^2}} \quad (7.2)$$

Cet angle est d'autant plus grand que la longueur du fil est proche de 1 (fig. 7.1).

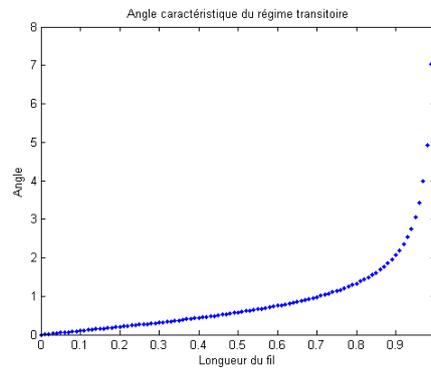


FIGURE 7.1 – Angle caractéristique du régime transitoire

Nous pouvons comparer les trajectoires analytiques au premier ordre, desquelles on a déduit les lois vérifiées expérimentalement, et les trajectoires résolues de façon purement numériques. On observe alors qu'à faible anisotropie, il y a un excellent accord entre les deux trajectoires qui se superposent. En revanche, lorsque l'anisotropie devient plus élevée, la trajectoire approximée au premier ordre s'écarte de la trajectoire numérique et n'est plus valable. On remarque alors l'apparition d'une asymétrie et de points anguleux sur les trajectoires numériques, caractéristiques non données par l'approximation au premier ordre (fig. 7.2). Enfin, si on se place à trop forte anisotropie, une instabilité numérique apparaît.

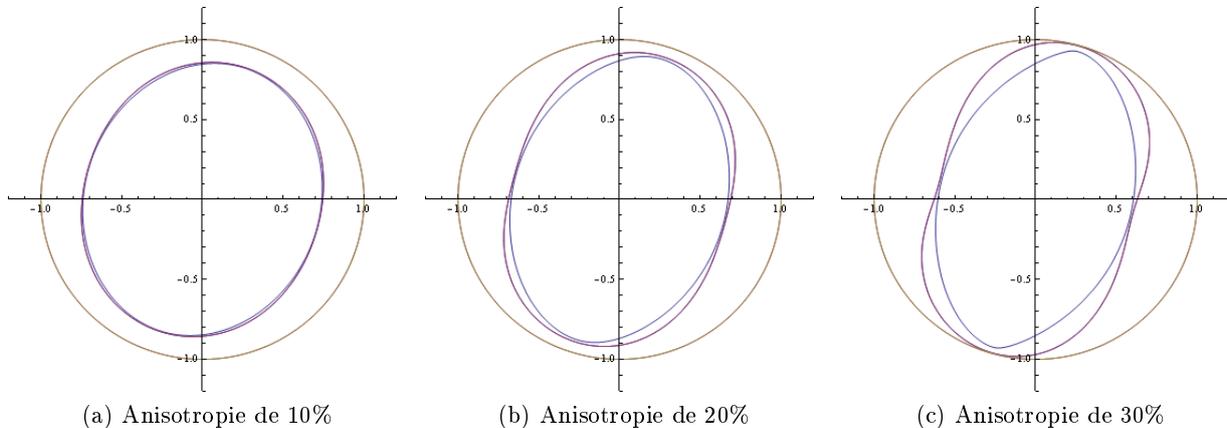


FIGURE 7.2 – Comparaison de la trajectoire analytique (en mauve) et numérique (en bleu).

Enfin, on retrouve en faisant varier la longueur de fil le comportement attendu (fig. 7.3) :

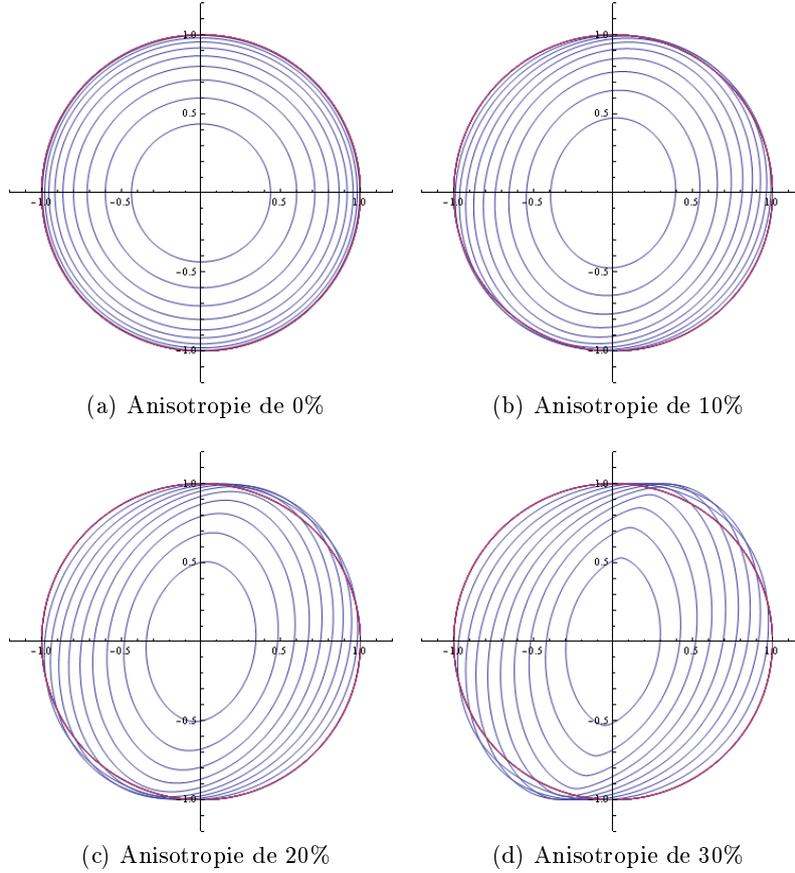


FIGURE 7.3 – Evolution des trajectoires numériques en fonction de l’anisotropie et de la longueur de fil. On retrouve une déformation forte et une rotation importante à courte longueur de fil.

Les simulations sont donc en accord avec notre expérience.

## 8 Analogie avec un cristal

Notre expérience permet une analogie avec le cas d’un cristal. Si l’on considère une surface  $R(\theta)$  soumise à une différence de pression  $\Delta P$  et une tension de surface  $\gamma(\theta)$ , on obtient par minimisation du lagrangien à volume constant l’équation suivante :

$$\frac{\gamma + \gamma''}{R} = \Delta P \quad (8.1)$$

où  $\gamma + \gamma''$  est la raideur de surface et  $R$  le rayon de courbure. Si l’on suppose que  $\gamma$  est de la forme

$$\gamma = \gamma_0(1 + \epsilon \cos(2\theta)) \quad (8.2)$$

Alors

$$\gamma + \gamma'' = \gamma_0(1 - 3\epsilon \cos(2\theta))$$

et la raideur devient négative pour  $\epsilon > \frac{1}{3}$ . On remarque que c’est pour cette même valeur qu’apparaît l’instabilité numérique dans notre simulation, ce qui nous encourage à tenter une analogie entre les deux systèmes, la tension de surface  $\gamma$  étant alors l’analogie du coefficient de friction  $\mu$ . Un approfondissement de ce travail pourrait consister en une analyse plus poussée de cette analogie.

## 9 Conclusion

Nous avons donc élaboré une expérience originale permettant d'étudier le frottement solide sur une surface anisotrope. Nous avons mis au point un algorithme de détection du mouvement du système par traitement d'images, synchronisé avec un capteur de force embarqué. Nous avons observé les différents régimes de stick-slip, et vérifié que l'on pouvait considérer notre solide comme un point matériel. Nous avons montré que le principe de maximisation de la force de friction est équivalent à la condition d'égalité et de tangence de la force seuil de façon théorique. Ce dernier critère nous a permis de faire des prédictions numériques sur la forme des trajectoires, que nous avons vérifiées expérimentalement sur des anisotropies de mode 1 et 2. Nous pouvons donc dire qu'à priori le critère de Griffith ainsi que les deux postulats énoncés ci-dessus sont vérifiés, même si une mesure plus précise serait souhaitable. Notre système se comporte donc bien en suivant ces règles, qui n'ont pourtant pas de fondement théorique. Un travail futur pourrait constituer en la revérification de ce postulat sur différentes surfaces, ainsi que l'étude d'anisotropies d'ordres plus élevés, et sans se limiter au cas linéarisé. Enfin, un article est en cours d'écriture pour être soumis prochainement.

## Références

- [1] Victor ROMERO. *Spiraling Cracks in Thin Sheets*. PhD thesis, 2010. 1, 2.2
- [2] Anaïs Abramian et Clara Dussaux. Projet expérimental : Le phénomène de stick-slip. 2012. 1, 3.2
- [3] Wikipedia. Fracture mechanics. 2.2, 5.6

## Annexes

### **Annexe 1 - Macro ImageJ**

Ce programme n'est pas le seul à avoir été mis au point, mais c'est le plus pertinent concernant la détection des trajectoires.

### **Annexe 2 - Programme Matlab**

Ce programme n'est ni le seul à avoir été mis au point, ni le plus complexe, mais c'est un bon exemple de l'esprit des programmes matlab utilisés.

### **Annexe 3 - Diagramme programme Labview**

### **Annexe 4 - Analyse théorique du cas isotrope**

# Annexe 1 - Macro ImageJ

```
o
//// debut programme
print("Lancement Macro TrackSlip");
timebegin=getTime();
//// parametres
nb0=1; // image debut
nb=2736; // nb images
nbpts=2; // nb points a trouver par images
fich="C:\\Documents and Settings\\chaine\\Desktop\\JC\\StickSlip\\0628\\acquis02"; // fichier bureau
// fich="D:\\Documents\\Travail\\ENS\\Stage M1\\0626\\test01"; // fichier maison
seuil=100; // seuil threshold
aireliminf=500;
airelimsup=1000;
//// positions initiales
x0=newArray(nbpts);
y0=newArray(nbpts);
rd=80; // rayon detection
x0[0]=580;
y0[0]=450;
x0[1]=430;
y0[1]=520;
//////////////////////////////////// Ce qui suit est automatique //////////////////////////////////////
//// effacement mesures en memoire
run("Clear Results");
//// choix de mesure
run("Set Measurements...", "centroid fit limit redirect=None decimal=2");
//// definition du fichier video et resultats
video=fich+".avi";
resultats=fich+".xls";
//// calcul des 1 pourcents d'images pour indication future
if((nb-nb0+1)>10){
decile=(nb-nb0+1);
do {
decile=decile-1;
} while (decile%100!=0);
}
decile=decile/100+1;
//// debut boucle sur images
for (k=nb0; k<nb+1; k++){
//print(""+k+"/"+nb+"");
res0=nResults;
//// Ouverture image
run("AVI...", "select=[video] first=k last=k");
run("8-bit");
a=getTitle();
//// Variation de seuil pour images mechantes
if(k==765000){
seuil=76;
}
//// calibration echelle
//run("Set Scale...", "distance=346 known=215 pixel=1 unit=mm global");
//// creation ROI
roiManager("Reset");
for(i=0; i<nbpts; i++){
makeOval(x0[i]-rd/2, y0[i]-rd/2, rd, rd);
roiManager("Add");
}
//// declenchement sur noir
setThreshold(0, seuil);
//// Conversion en binaire
run("Make Binary");
run("Open");
//// mesure positions et MAJ ROI
for(i=0; i<nbpts; i++){
roiManager("Select", i);
run("Analyze Particles...", "size=aireliminf-airelimsup circularity=0.00-1.00 show=Outlines display include summarize");
run("Close");
x0[i]=getResult("X");
y0[i]=getResult("Y");
}
selectWindow(a);
run("Close");
//// Vérification nombre de résultats de l'image
nresim=(nResults-res0);
if (nresim==nbpts) {
} else {
print("Mauvais nombre de résultats sur image '+k+' : '+nresim+' pour '+nbpts');
}
//// Indication d'avancement par pourcent
if(k==nb0){
pourcentage=0;
}
if(k%(decile)==0){
pourcentage=pourcentage+1;
print("image "+k+" sur "+(nb-nb0+1)+" soit "+pourcentage+" pourcents");
}
if(k==nb){
pourcentage=100;
print("image "+k+" sur "+(nb-nb0+1)+" soit "+pourcentage+" pourcents");
}
//// fin de la boucle sur les images
}
//// Vérification nombre de résultats totaux
nres=nResults/(nb-nb0+1);
if (nres==nbpts) {
print("Bon nombre total de résultats par image : '+nres+' pour '+nbpts');
} else {
print("Mauvais nombre total de résultats par image : '+nres+' pour '+nbpts');
}
```

```

}
//// Mise en memoire des resultats
t=newArray(nb-nb0+1);
x=newArray((nb-nb0+1)*nbpts);
y=newArray((nb-nb0+1)*nbpts);
a=newArray((nb-nb0+1)*nbpts);
for(p=0; p<(nb-nb0+1)*nbpts; p++){
x[p]=getResult("X", p);
y[p]=getResult("Y", p);
a[p]=getResult("Angle", p);
}
//// Reecriture propre des resultats avec le temps + offset angle + angle fil + controle offsets
I.J.deleteRows(0, (nb-nb0)*nbpts+1);
updateResults();
run("Set Measurements...", "redirect=None decimal=3");
offseta=newArray(nbpts);
anglefil=newArray(nb-nb0+1);
for(p=0; p<nb-nb0; p++){
setResult("T", p, p*1/30);
if (p==0) {
offsetanglefil=-atan2(y[p*nbpts+1]-y[p*nbpts+0],x[p*nbpts+0]-x[p*nbpts+1])*180/PI;
}
anglefil[p]=atan2(y[p*nbpts+1]-y[p*nbpts+0],x[p*nbpts+0]-x[p*nbpts+1])*180/PI+offsetanglefil;
if (p!=0){
if (anglefil[p]-anglefil[p-1]<-150) {
offsetanglefil=offsetanglefil+360;
anglefil[p]=anglefil[p]+360;
}
}
for(i=0; i<nbpts; i++){
if (p==0) {
offseta[i]=-a[p*nbpts+i];
}
a[p*nbpts+i]=a[p*nbpts+i]+offseta[i];
setResult("X"+i, p, x[p*nbpts+i]);
setResult("Y"+i, p, y[p*nbpts+i]);
setResult("A"+i, p, a[p*nbpts+i]);
if (p!=0){
if (a[p*nbpts+i]-a[(p-1)*nbpts+i]<-150) {
offseta[i]=offseta[i]+180;
a[p*nbpts+i]=a[p*nbpts+i]+180;
setResult("A"+i, p, a[p*nbpts+i]);
}
}
}
//// Controle des offset (desactivé)
//if (a[p*nbpts+i]-anglefil[p]>150) {
//offseta[i]=offseta[i]-180;
//a[p*nbpts+i]=a[p*nbpts+i]-180;
//setResult("A"+i, p, a[p*nbpts+i]);
//print("correction a image "+p);
//}
//if (a[p*nbpts+i]-anglefil[p]<-300) {
//offsetanglefil=offsetanglefil-360;
//anglefil[p]=anglefil[p]-360;
//setResult("AF", p, anglefil[p]);
//print("correction fil image "+p);
//}
}
}
setResult("AF", p, anglefil[p]);
}
updateResults();
//// Enregistrement fichier résultats (PB AU BUREAU ?!)
run("Input/Output...", "jpeg=75 gif=-1 file=.txt use_file copy_column copy_row save_column save_row");
selectWindow("Results");
saveAs("Results", "resultats");
//// Informations de Fin de programme
timeend=getTime();
time=(timeend-timebegin)/1000;
print(nb-nb0+1+" images");
print(time+" secondes");
//// fin programme
print("Fin Macro TrackSlip");

```

## Annexe 2 - Programme Matlab

```
clear all
close all
clf
clc
%% Parametres
%repertoire='D:\Documents\Travail\ENS\Stage M1\0605';
%repmatlab='D:\Documents\Travail\ENS\Stage M1\Programmes\Matlab';
repmatlab='C:\Documents and Settings\chaine\Desktop\JC\StickSlip\Programmes\Matlab';
repertoire='C:\Documents and Settings\chaine\Desktop\JC\StickSlip\0626';
fichier='test03';
rayonpalet=2.5; % rayon palet en cm
angleattache=12; % angle barre - point d'attache en degres
V0=9.24; % Tension à vide du capteur en V
%% Debut programme
disp('Debut programme exploitation');
%% Chargement fichier donnees
cd(repertoire);
addpath(repmatlab);
M=importdata([fichier '.txt']);
M=M.data;
[nbpts,nbmes]=size(M);
Mforce=importdata([fichier '-force.txt']);
[nbptsforce,nbmesforce]=size(Mforce);
%% Preallocation
%% Definition des variables
scale=19/300; %cm/px
X1=M(:,3)*scale;
Y1=M(:,4)*scale;
X2=M(:,6)*scale;
Y2=M(:,7)*scale;
I=M(:,1);
T=M(:,2);
AB=M(:,5);
AF=M(:,9);
AP=M(:,8);
A=M(:,9)-M(:,8);
dt=1/30;
Tforce=Mforce(:,1);
tensioncapteurbrut=Mforce(:,2);
%% Redimension temporelle du vecteur tension capteur
for i=1 :nbpts
clear tensioncapteurx
for j=1 :nbptsforce
if j==1
k=1;
end
if i==1
if (Tforce(j)<=T(i+1))
tensioncapteurx(k)=tensioncapteurbrut(j);
k=k+1;
else
tensioncapteurx(k)=V0;
end
elseif i==nbpts
if (Tforce(j)>=T(i-1))
tensioncapteurx(k)=tensioncapteurbrut(j);
k=k+1;
else
tensioncapteurx(k)=tensioncapteur(i-1);
end
else
if (Tforce(j)<=T(i+1) && Tforce(j)>=T(i-1))
tensioncapteurx(k)=tensioncapteurbrut(j);
k=k+1;
else
tensioncapteurx(k)=tensioncapteur(i-1);
end
end
end
tensioncapteur(i)=mean(tensioncapteurx);
end
%% fit des ellipses
cd(repmatlab);
[a1, b1, xc1, yc1, phi1] = ellipse_fit(X1, Y1);
[a2, b2, xc2, yc2, phi2] = ellipse_fit(X2, Y2);
e1=sqrt(1-(b1/a1)^2);
e2=sqrt(1-(b2/a2)^2);
cd(repertoire);
%% Construction des rayons et angles de la position par rapport au centre
R1=sqrt((X1-xc1).^2+(Y1-yc1).^2);
R2=sqrt((X2-xc2).^2+(Y2-yc2).^2);
theta1=atan2((Y1-yc1),(X1-xc1));
theta2=atan2((Y2-yc2),(X2-xc2));
%% Calcul distance bras palet
l2=(X2-X1).^2+(Y2-Y1).^2;
l=sqrt(l2);
meanl=mean(l);
%% Construction des vitesses
for k=2 :(nbpts-1)
V1X(k)=(X1(k+1)-X1(k-1))/(2*dt);
V1Y(k)=(Y1(k+1)-Y1(k-1))/(2*dt);
V2X(k)=(X2(k+1)-X2(k-1))/(2*dt);
V2Y(k)=(Y2(k+1)-Y2(k-1))/(2*dt);
VA(k)=(A(k+1)-A(k-1))/(2*dt);
end
V1X(2)=V1X(1);
V1Y(2)=V1Y(1);
V2X(2)=V2X(1);
```

```

V2Y(2)=V2Y(1);
VA(2)=VA(1);
V1X(nbpts)=V1X(nbpts-1);
V1Y(nbpts)=V1Y(nbpts-1);
V2X(nbpts)=V2X(nbpts-1);
V2Y(nbpts)=V2Y(nbpts-1);
VA(nbpts)=VA(nbpts-1);
for k=1 :nbpts
V1=sqrt(V1X.^2+V1Y.^2);
V2=sqrt(V2X.^2+V2Y.^2);
end
V1X=V1X';
V1Y=V1Y';
V2X=V2X';
V2Y=V2Y';
V1=V1';
V2=V2';

%% Construction angle beta (fil-barre)
betaNUM=(X2-X1).*(X1-xc1)+(Y2-Y1).*(Y1-yc1);
betaDEN=sqrt((X2-X1).^2+(Y2-Y1).^2).*sqrt((X1-xc1).^2+(Y1-yc1).^2);
beta=acos(betaNUM./betaDEN).*(180/pi);
%% Construction angle gamma (normale capteurbarre - fil)
gamNUM=(X1-xc1).*(X2-X1)+(Y1-yc1).*(Y2-Y1);
gamDEN=sqrt((X1-xc1).^2+(Y1-yc1).^2).*sqrt((X2-X1).^2+(Y2-Y1).^2);
gam=acos(gamNUM./gamDEN).*(180/pi);
gamma=angleattache+gam-90;
%% Construction epsilon (tensionfil,vitesepalet)
epsNUM=(X2-X1).*V2X+(Y2-Y1).*V2Y;
epsDEN=sqrt((X2-X1).^2+(Y2-Y1).^2).*sqrt(V2X.^2+V2Y.^2);
eps=180-acos(epsNUM./epsDEN).*(180/pi);
%% Construction angle rayonpalet-fil
anglerfNUM=(X2-xc1).*(X2-X1)+(Y2-yc1).*(Y2-Y1);
anglerfDEN=sqrt((X2-xc1).^2+(Y2-yc1).^2).*sqrt((X2-X1).^2+(Y2-Y1).^2);
anglerf=acos(anglerfNUM./anglerfDEN).*(180/pi);
%% Construction angle rayonpalet-vitesse
anglervNUM=(X2-xc1).*V2X+(Y2-yc1).*V2Y;
anglervDEN=sqrt((X2-xc1).^2+(Y2-yc1).^2).*sqrt(V2X.^2+V2Y.^2);
anglerv=acos(anglervNUM./anglervDEN).*(180./pi);
%% construction reponse capteur
reponsecapteurangle=(1-0.0029.*gamma-9.7.*10^(-5).*gamma.^2);
reponsecapteurangle=reponsecapteurangle';
reponsecapteurforce=0.97*10/V0;
forcetension=-(tensioncapteur-V0);
forcenewton=(forcetension./reponsecapteurangle)*reponsecapteurforce;
%% fit avec fourrier
fita = ezfit(theta2,R2,'r0a*(1+f2a*sin(2*x+p2a)+f4a*sin(4*x+p2a)+f6a*sin(6*x+p2a)); r0a=8.7; f2a=0.03; f4a=0.03; f6a=0.03; p2a=1;');
f2a=fita.m(1);
f4a=fita.m(2);
f6a=fita.m(3);
p2a=fita.m(4);
r0a=fita.m(5);
fitb = ezfit(theta2,forcenewton,'f0b*(1+f2b*sin(2*x+p2b)+f4b*sin(4*x+p2b)+f6b*sin(6*x+p2b)); f0b=0.6; f2b=0.03; f4b=0.03; f6b=0.03; p2b=1;');
f2b=fitb.m(1);
f4b=fitb.m(2);
f6b=fitb.m(3);
p2b=fitb.m(4);
f0b=fitb.m(5);
%% tracage
figure(1);
subplot(4,2,1);
plot(X1,Y1,'b');
hold on
plot(X2,Y2,'r');
hold on
%plot(X1,Y1,'g');
hold off
title(['Trajectoire du bras (b), e=',num2str(e1),'et Trajectoire du palet (r), e=',num2str(e2)]);
xlabel('cm');
ylabel('cm');
axis equal
subplot(4,2,2);
plot(1,AF,'b');
hold on
plot(1,AP,'r');
hold on
plot(1,AB,'g');
title('Angle fil et palet et barre en fonction du temps/image');
xlabel('Temps');
ylabel('Angles');
hold off
axis('tight')
subplot(4,2,3);
plot(T,A);
title('Angle fil-palet en fonction du temps');
xlabel('Temps en sec');
ylabel('Angle en degres');
axis('tight')
subplot(4,2,4);
plot(T,l);
title('Distance bras-palet en fonction du temps');
xlabel('Temps en sec');
ylabel('Distance en pixels');
axis('tight')
subplot(4,2,5);
plot(T,anglerf,'b');
hold on
plot(T,anglerv,'r');
title('Angles rf(b) et rv(r) en fonction du temps');
xlabel('Temps');
ylabel('Angles');

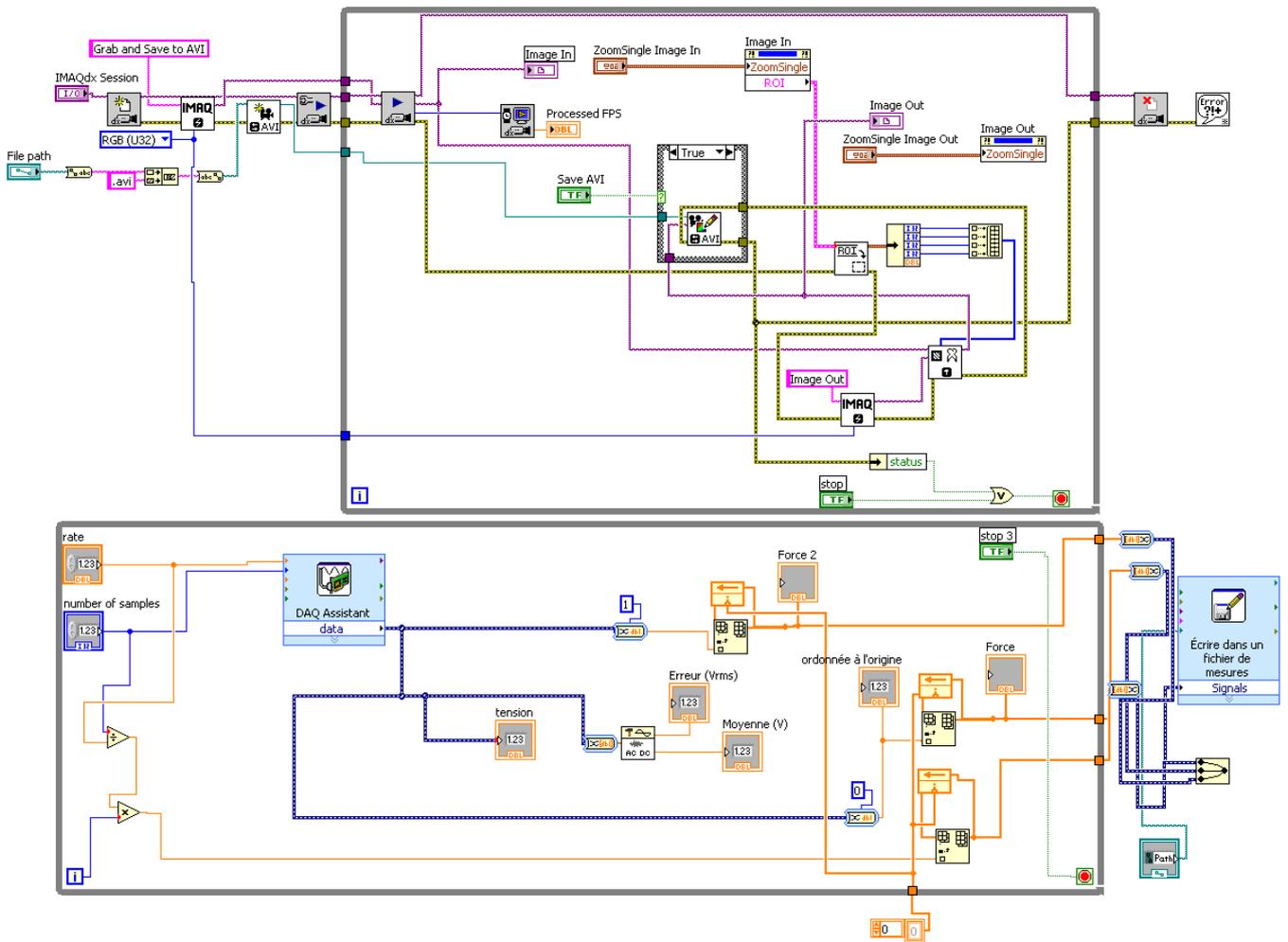
```

```

hold off
axis('tight')
subplot(4,2,6);
plot(T,V1,'b');
hold on
plot(T,V2,'r');
title('Vitesse barre et Palet en fonction du temps');
xlabel('Temps');
ylabel('Vitesse');
hold off
axis('tight')
subplot(4,2,7);
plot(T,beta);
title('Angle beta (fil-barre) en fonction du temps');
xlabel('Temps');
ylabel('Angle en degres');
axis('tight')
subplot(4,2,8);
plot(T,eps);
title('Angle epsilon (fil-vitesse) en fonction du temps');
xlabel('Temps');
ylabel('Angle en degres');
axis('tight')
figure(2)
plot(I,AF,'b');
hold on
plot(I,AP,'r');
hold on
plot(I,AB,'g');
title('Angle fil et palet et barre en fonction du temps/image');
legend('AF','AP','AB','Location','NorthWest');
xlabel('Temps/images');
ylabel('Angles');
hold off
axis('tight')
figure(3);
plot(X1,Y1,'b');
hold on
plot(X2,Y2,'r');
title(['Trajectoire du bras (b), e=',num2str(e1),'et Trajectoire du palet (r), e=',num2str(e2)]);
xlabel('cm');
ylabel('cm');
axis equal
hold off
figure(4);
plot(theta2,R2,'b. ');
showfit('r0*(1+f2*sin(2*x+p2)+f4*sin(4*x+p2)+f6*sin(6*x+p2))',[0.03 0.03 0.03 1 8.7]);
title(['Trajectoire polaire, e=',num2str(e2)]);
xlabel('rad');
ylabel('cm');
axis tight
figure(5);
plot(theta2,forcenewton,'b. ');
showfit('f0b*(1+f2b*sin(2*x+p2b)+f4b*sin(4*x+p2b)+f6b*sin(6*x+p2b))',[0.6 0.03 0.03 0.03 1]);
title('Force polaire');
xlabel('rad');
ylabel('N');
axis tight
figure(6);
plot(theta2,forcenewton,'b. ');
showfit('f0b*(1+f2b*sin(2*x+p2b))*sin(2*x+pp2b)+f4b*sin(4*x+p2b)+f6b*sin(6*x+p2b))',[0.6 0.03 0.03 0.03 1 1]);
title('Force polaire');
xlabel('rad');
ylabel('N');
axis tight
%% Fin programme
disp('Fin programme exploitation');

```

# Annexe 3 - Diagramme programme Labview



## Annexe 4 - Analyse théorique du cas isotrope

Soit  $R_1 = (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1)$  le référentiel lié au laboratoire,  $R_u = (P, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$  le référentiel lié au palet, tournant à la vitesse constante  $\omega = \dot{\theta}$  (fig 9.1). On suppose que l'angle  $\epsilon$  est constant, ce qui revient à se placer dans le cas isotrope. On suppose  $\mu$  indépendant de la vitesse. On calculera les couples par rapport au point  $P$ , centre de masse du palet. Le troisième axe, commun à toutes les bases, sera noté  $\vec{z}$ .

On a donc

$$\vec{\Omega}_{R_u/R_1} = \omega \vec{z} \quad (9.1)$$

et

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

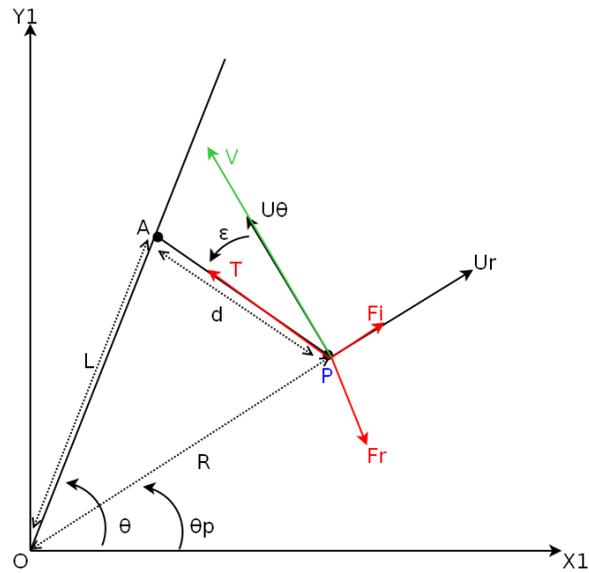


FIGURE 9.1 – Paramétrisation du problème

Au point  $P$  centre de masse du palet, on a :

$$\vec{v}(P/R_1) = \vec{v}_{ie}(P/R_1) = R\omega \vec{U}_\theta \quad (9.3)$$

et

$$\vec{a}(P/R_1) = \vec{a}_{ie}(P/R_1) = -R\omega^2 \vec{U}_r \quad (9.4)$$

Faisons le bilan des forces dans  $R_u$  au point  $P$  centre de masse du palet :

Tension du fil :

$$\vec{T} = -T \sin \epsilon \vec{U}_r + T \cos \epsilon \vec{U}_\theta \quad (9.5)$$

Force de frottement :

$$\vec{F}_r = -\mu mg \vec{U}_\theta \quad (9.6)$$

Force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = mr\omega^2 \vec{U}_r \quad (9.7)$$

Donc finalement,

$$\begin{cases} T \cos \epsilon = \mu mg \\ T \sin \epsilon = mR\omega^2 \end{cases} \quad (9.8)$$

soit au premier ordre en  $\epsilon$ ,

$$\begin{cases} T = \mu mg \\ T\epsilon = mR\omega^2 \end{cases} \quad (9.9)$$

Comme

$$\epsilon \simeq \frac{R\omega^2}{\mu g} \sim \frac{0,2 * (0,6)^2}{0,1 * 10} = 3,6 \cdot 10^{-2} = 4^\circ \quad (9.10)$$

et que l'approximation constitue ici une borne supérieure, on a bien

$$\epsilon \ll 1 \quad (9.11)$$

En ce qui concerne les trajectoires, on a

$$L^2 = R^2 + d^2 + 2Rd \cos(\pi - \epsilon) \quad (9.12)$$

soit

$$L^2 = R^2 + d^2 + 2Rd \sin \epsilon \quad (9.13)$$

Et au premier ordre,

$$L^2 = R^2 + d^2 + 2Rd\epsilon \quad (9.14)$$

donc

$$R = \sqrt{L^2 - d^2 \left(1 - \frac{2R\epsilon}{d}\right)} \quad (9.15)$$

donc pour que le fil ne s'enroule pas autour de l'axe, il faut :

$$d\sqrt{1 - \frac{2R\epsilon}{d}} < L \quad (9.16)$$

Or

$$\frac{R\epsilon}{d} \simeq \frac{0,2 * 0,04}{0,05} = 1,6 \cdot 10^{-1} \ll 1 \quad (9.17)$$

car l'approximation constitue une borne supérieure.

Donc au premier ordre on a

$$d - R\epsilon < L \quad (9.18)$$