

---

# Instabilité horizontale d'une bille sur une surface sphérique vibrée verticalement

---

## Résumé :

Durant ce stage nous avons étudié une instabilité qui se déclenche lorsque l'on fait rebondir une bille sur un plateau vibré présentant une courbure. La bille a des oscillations perpendiculaires à l'axe de vibration, qui s'amplifient jusqu'à atteindre un régime permanent. Nous avons étudié ce phénomène pour des billes d'innox de rayon différent, sur un plateau de courbure sphérique fixée. Nous avons également tenté de faire un modèle de loi de choc qui permette d'expliquer cette amplification.

**Mots clefs :** *Rebond d'une balle , plateau vibré, loi de choc*

Stage encadré par :

**Jean-Christophe Géminard**

jean-christophe.geminard@ens-lyon.fr

Tél : +33 (0) 4 72 72 88 65

Fax : +33 (0) 4 72 72 80 80

*Laboratoire de Physique - ENS de Lyon - CNRS  
46, Allée d'Italie  
69364 Lyon cedex 07  
FRANCE.*

**Nicolas Taberlet**

nicolas.taberlet@ens-lyon.fr

Tél : +33 (0) 4 72 72 85 32

*Laboratoire de Physique - ENS de Lyon - CNRS  
46, Allée d'Italie  
69364 Lyon cedex 07  
FRANCE.*

# Remerciements

Merci à tous ceux qui m'ont aidé.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction au problème</b>	<b>3</b>
1.1	Le problème de la bille rebondissante . . . . .	3
1.2	La découverte d'une instabilité . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Méthodes et dispositif de mesure</b>	<b>4</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	4
2.2	Problèmes expérimentaux . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Observations et résultats</b>	<b>7</b>
3.1	Première exploration du phénomène . . . . .	7
3.2	Rayon d'exploration $r$ . . . . .	8
3.3	Modulation de la phase et du temps de vol . . . . .	11
3.4	Fréquences . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Modélisation du problème et résolution numérique</b>	<b>14</b>
4.1	Modélisation simple . . . . .	14
4.1.1	Modèle de réflexion parfaite . . . . .	14
4.1.2	Modèle de non glissement . . . . .	15
4.2	Couplage entre les mouvements suivant $x$ et $z$ . . . . .	16
<b>A</b>	<b>Traitement d'images</b>	<b>19</b>
<b>B</b>	<b>Vérification dans le cas classique</b>	<b>19</b>
<b>C</b>	<b>Rayon d'exploration</b>	<b>20</b>
<b>D</b>	<b>Précession de l'ellipse</b>	<b>20</b>
<b>E</b>	<b>Modèle de glissement avec frottement</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction au problème

## 1.1 Le problème de la bille rebondissante

Nous nous intéressons dans ce stage à une bille qui rebondit sur un plateau. Classiquement on décrit un choc d'une bille sur un plateau, en utilisant la loi suivante :  $V_d = -eV_a$ , où  $V_d$  et  $V_a$  correspondent à la vitesse de la bille respectivement avant le choc et après le choc sur le plateau et  $e$  est le coefficient de restitution en vitesse de la bille (compris entre 0 et 1). Ici le plateau est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$  par le biais d'un pot vibrant. La loi de choc est alors la même, sauf que l'on considère les vitesses relatives de départ et d'arrivée de la bille :

$$(V_d - V_p) = -e(V_a - V_p) \quad (1)$$

$V_p$  correspond à la vitesse du plateau que l'on suppose constante au cours du choc.

Cette expérience, réalisée pour la première fois à l'université Pierre et Marie Curie, a déjà été largement étudié pour sa richesse de comportements ([1]). En effet, suivant les paramètres, la bille peut avoir différents types de rebonds. Le cas le plus simple est celui où la bille rebondit en phase avec le plateau (FIG. 1).

Elle peut également avoir des sauts deux fois plus long. De nombreux autres modes de rebond existent et lorsque l'amplitude de vibration devient assez grande, les temps de vol présentent des aspects chaotiques [2].

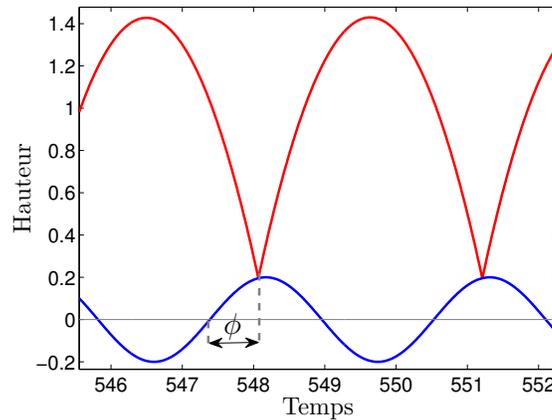


FIGURE 1 – Trajectoire du mode 1 : la bille rebondit en phase avec le plateau. La trajectoire de la bille est en rouge.  $\phi$  est définie comme la phase du mouvement du plateau au moment du choc.

Dans le mode 1, le temps de vol de la bille est toujours le même et correspond à la période du plateau. La phase  $\phi$  du plateau au moment du choc est alors toujours la même.

Dans ce cas, comme la trajectoire de la bille est parabolique entre deux chocs, et la bille mettant un temps  $\frac{T}{2}$  pour tomber sur le plateau, sa vitesse au moment du choc est  $V_a^1 = -\frac{gT}{2}$ . On sait alors par symétrie que sa vitesse de départ est l'opposée de la vitesse au moment d'arrivée. En utilisant la loi de choc (1), on obtient une condition sur la vitesse du plateau dans le mode 1 :

$$V_p = Af \sin(\phi) = \frac{1}{4\pi} \frac{g(1-e)}{f(1+e)} \quad (2)$$

## 1.2 La découverte d'une instabilité

Pour réaliser le type d'expérience décrit précédemment, on utilise en général un plateau incurvé pour stabiliser la bille dans l'axe de la vibration. Cependant, lors de manipulations préliminaires au stage<sup>1</sup>, nous avons remarqué que lorsque certaines billes rebondissaient dans ce type de plateau, un mouvement perpendiculaire à l'axe de vibration naissait spontanément, ce mouvement pouvant aller jusqu'à faire sortir la bille du plateau.

Nous avons donc voulu en savoir plus et avons utilisé une lentille sphérique assez large pour pouvoir étudier ce phénomène<sup>2</sup> (FIG. 2).

1. À la base, l'objectif du stage était d'étudier le retour à l'équilibre d'un système dissipatif entretenu.

2. Le fait de prendre une lentille n'a rien à voir avec les propriétés optiques de celle-ci.

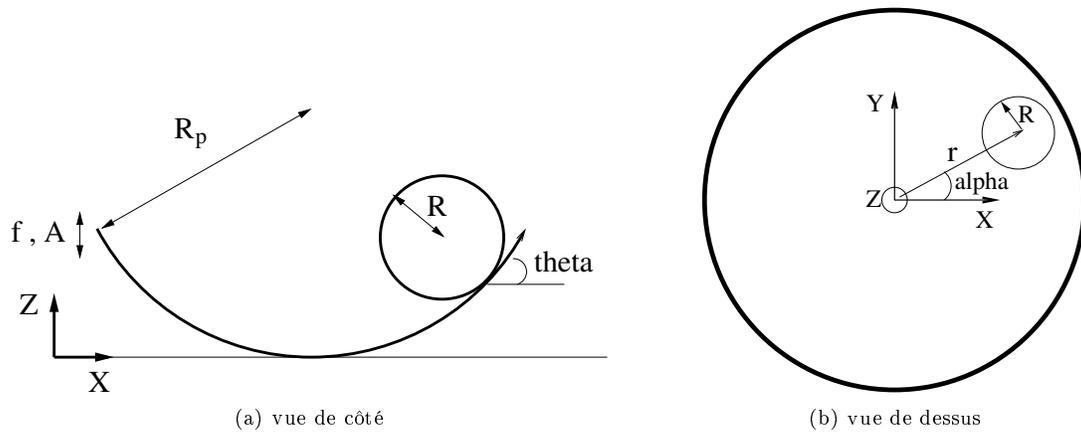


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience. La lentille de rayon de courbure  $R_p$  vibre à une fréquence  $f$  et une amplitude  $A$ . La bille en inox a un rayon de courbure  $R$ . L'angle entre la normale et la tangente au point de contact est  $\theta$ .

## 2 Méthodes et dispositif de mesure

### 2.1 Dispositif expérimental

Pour étudier au mieux ce phénomène, nous avons tout d'abord voulu créer un support qui permette d'isoler l'expérience des bruits et perturbations extérieurs et qui autorise un réglage facile de la verticalité de l'axe de vibration.

Nous avons construit une boîte que nous avons tapissée de mousse afin d'isoler l'expérience des autres bruits, mais aussi les expérimentateurs du bruit de l'expérience ( voir FIG. 3 ). Nous avons ajouté des pieds réglables afin d'ajuster la verticalité, et nous avons lesté le système avec des poids pour ne pas être gênés par les vibrations de l'ensemble. Cependant celles-ci n'ont pas été totalement éliminées de la plage de fréquence à laquelle on travaille, et elles peuvent interférer avec les mesures. Une barre transversale a été ajoutée pour faciliter la fixation d'appareils de mesure.

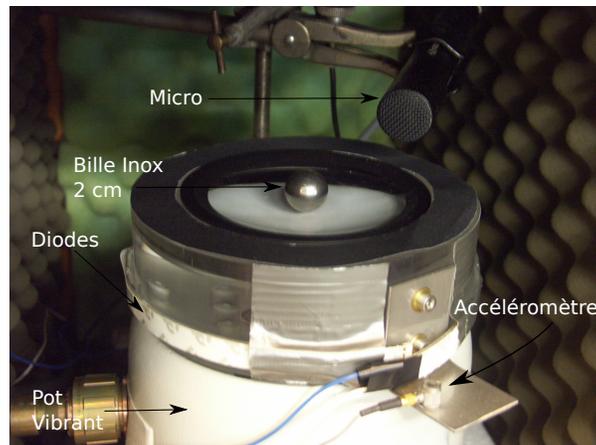


FIGURE 3 – Photo du montage légendée. Le capteur de déplacement est placé symétriquement au capteur d'accélération.

Afin de repérer les instants de chocs de la bille sur le plateau, nous avons utilisé un micro placé près du plateau. La mousse isolante permet également d'atténuer les réflexions sonores sur les parois de la boîte et d'obtenir des pics propres correspondant aux instants de choc.

Un accéléromètre a été placé sur le plateau. Un capteur de déplacement inductif a également été ajouté pour avoir directement la position du plateau.

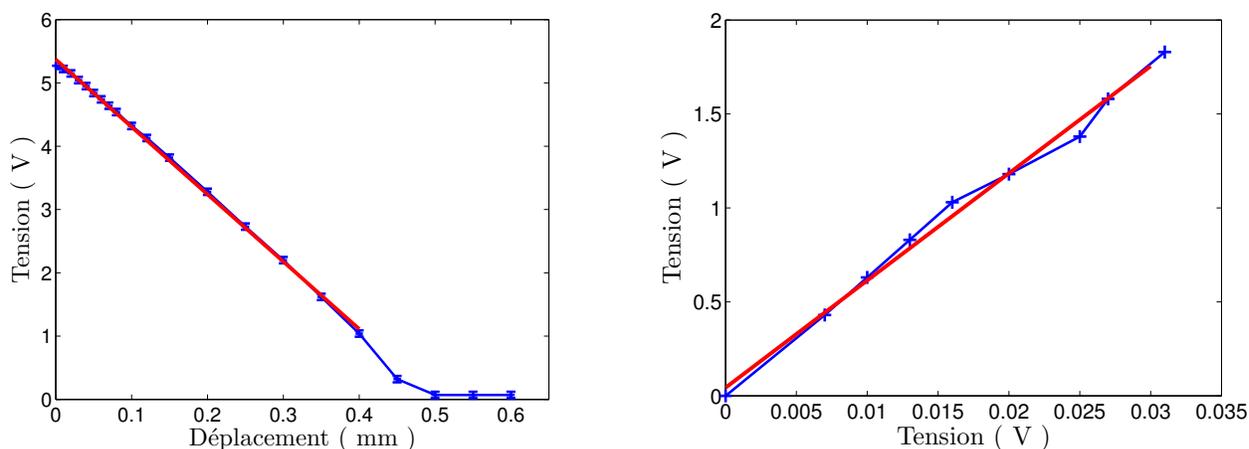
Pour l'enregistrement vidéo, compte-tenu de l'encombrement, nous ne pouvions pas utiliser une caméra trop grosse. Nous avons alors opté pour une caméra peu performante de type webcam que nous avons fixée en haut de la boîte. Cependant les mouvements de la bille dans la lentille étant relativement lents ( de l'ordre du  $\text{cm s}^{-1}$  ), cette caméra résout bien les mouvements latéraux.

Afin de bien repérer la bille et de faciliter le traitement sous ImageJ, nous avons éclairé la bille par en dessous pour avoir à la camera un objet noir sur fond blanc ( voir annexe A ).

Les différents capteurs sont reliés à une carte d'acquisition pilotée par le logiciel Labview , sauf pour la caméra. Les acquisitions et premiers traitements se font également grâce au logiciel Labview.

### Calibrages et estimation des coefficients

Le capteur de déplacement est un capteur inductif à courant de Foucault. Pour le calibrer, on mesure la tension délivrée par le capteur en fonction de l'éloignement de la lamelle conductrice. On utilise la même lamelle pour le calibrage que durant l'expérience. Le capteur de déplacement étant très sensible, on éloigne la lamelle du capteur à l'aide d'un banc d'optique et d'une platine de translation qui nous permet d'effectuer des déplacements de l'ordre du micron(FIG. 4).



(a) Tension mesurée par le capteur de déplacement en fonction de l'éloignement de la lamelle. On trouve un coefficient de 10.9 Volt/mm  
 (b) Tension du capteur de position en fonction de la tension de l'accéléromètre. On a un calibrage de l'accéléromètre de 124.5 mV/g

FIGURE 4 – Calibrage des capteurs de déplacement et d'accélération.

Nous avons ensuite calibré l'accéléromètre par rapport au capteur de déplacement. Pour cela, nous avons mesuré la tension pic à pic de l'accéléromètre et du capteur inductif pour plusieurs amplitudes du plateau, à une fréquence fixée ici à 20 Hz.

### Caractérisation des paramètres du problème

Grâce au micro qui nous donne les temps de vol entre deux chocs, nous pouvons facilement mesurer le coefficient de restitution des différentes billes utilisées. Pour cela on laisse juste tomber la bille sur le plateau sans le faire vibrer, et on mesure les instants des différents chocs.

Si on considère que le coefficient de restitution est indépendant de la vitesse, à chaque choc on a :  $V_{n+1} = -e \times V_n$  donc  $V_n = -e^n \times V_0$ . Et comme le temps de vol est tel que  $T_{vol}^{n \rightarrow n+1} = \frac{V_n}{g}$ , on obtient le coefficient de restitution  $e$  en prenant le logarithme des temps de vol en fonction du temps (FIG. 5).

Nous avons également mesuré le rayon de courbure de la lentille de deux façons différentes. La première consiste à éclairer la lentille de dessus, et à prendre en photo l'ombre d'un diamètre du cercle sous un certain angle. Un post traitement permet de connaître la courbure de la ligne d'ombre obtenue et ainsi d'en déduire la courbure de la lentille. Cette méthode donne  $R = 14.5$  cm. Une autre méthode consiste à mesurer la profondeur de la lentille sur différents points d'un diamètre à l'aide d'un pied à coulisse. Cette méthode donne  $R = 11.9$  cm.

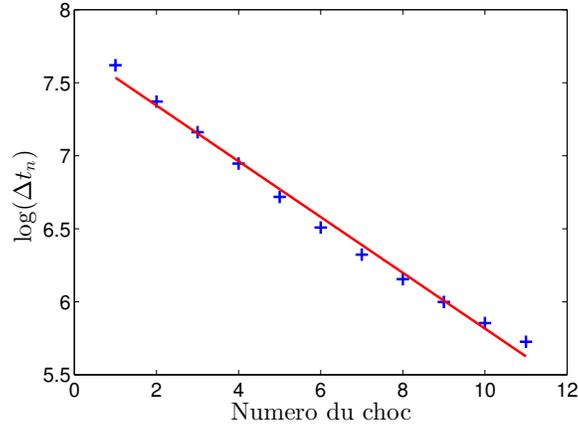


FIGURE 5 – Logarithme du temps de vol en fonction du choc pour la bille de 20 mm. La pente de la droite donne un coefficient de restitution  $e = 0.81$ .

### Remarque

Pour certaines billes, la courbe obtenue n'était pas parfaitement linéaire, signe que le coefficient de restitution dépend un peu de la vitesse. Dans ces cas-là, nous n'avons pris en compte que les derniers points de la courbe. En effet pour réaliser le type de courbe précédent, nous avons lâché la bille de quelques centimètres de haut pour avoir le plus de points possible. Cependant dans l'expérience, les hauteurs de vol sont plus faibles, de l'ordre du millimètre.

## 2.2 Problèmes expérimentaux

Comme dans tous ces types d'expériences, le réglage de la verticalité est essentiel mais également difficile. Les pieds du dispositif permettent un réglage assez précis de la verticalité. Cependant, le sol n'étant pas parfaitement horizontale, les réglages devaient être refaits si le dispositif venait à se translater légèrement.

Le débattement du capteur de déplacement que nous avons est faible comparé à la course typique du pot utilisé ( de l'ordre du centimètre ). Nous avons pourtant essayé quelques mesures à faibles amplitudes et grandes fréquences. La difficulté était alors de régler le capteur pour que, au repos, la tension affichée soit d'environ 3 Volts, ce qui permet une mesure de déplacement d'environ  $\frac{1}{2}mm$  de part et d'autre de la position d'équilibre. La sensibilité du capteur est telle que lorsque l'on ferme la porte de la boîte, la tension varie d'environ 0.5 Volt.

Un autre problème était dû à l'utilisation du capteur d'accélération. Comme celui-ci est accroché au plateau, lorsque la bille tape sur le plateau, la vibration est transmise jusqu'au capteur et le signal est alors inutilisable. Pour résoudre cette difficulté, nous avons pris la valeur de l'amplitude en sortie de la carte, et mesuré le déphasage entre celle envoyée et la réponse du pot. Puis connaissant les instants de chocs et le déphasage, on obtient l'amplitude de vibration du pot au moment du choc, et donc l'accélération.

L'éclairage aussi a été une source de problèmes. Nous avons d'abord pensé utiliser des diodes situées en dessous de la lentille préalablement sablée, pour diffuser sur toute la surface de la lentille. Mais les diodes étaient encore trop focalisées pour permettre un éclairage homogène. Finalement nous avons opté pour un ruban de LED fixé sur tout le tour de la lentille. Mais le ruban de diodes n'a pas permis d'avoir un éclairage totalement uniforme. Pour de grandes explorations dans la lentille, un croissant de lumière blanc apparaît sur le dessus de la bille, ce qui entraîne un décalage de la position du centre de masse lors de l'analyse de particules avec ImageJ ( voir annexe A ).

Une autre source de souci provient des décalages entre les acquisitions des capteurs d'accélération et de déplacements, et le capteur de son. Pour pallier ce problème, nous avons pris un micro utilisable avec la carte d'acquisition Labview et ne présentant pas de dérive par rapport aux autres instruments.

Un autre problème important est le décalage entre la caméra et les autres capteurs. Il est dû entre autres au temps que met la caméra à transférer les images enregistrées vers l'ordinateur. A cause de cela nous n'avons pas pu comparer les temps de vol avec l'évolution du rayon d'exploration  $r$  ( voir FIG. 2 ), du moins sur des temps longs.

Un moyen de régler ce problème aurait été de prendre une autre caméra, plus performante. La difficulté résidant dans la fixation de la caméra.

### 3 Observations et résultats

Avant de commencer les mesures sur cette instabilité, nous nous sommes d'abord assurés que nous mesurons les bonnes grandeurs. Nous avons alors testé notre dispositif expérimental en retrouvant la loi (2) dans le cas classique de rebonds verticaux ( voir annexe B ).

#### 3.1 Première exploration du phénomène

Une première phase de défrichage du phénomène est de rigueur. Ce système présentant déjà de nombreux paramètres ( fréquence et amplitude de vibration, coefficient de restitution de la bille, courbure de la lentille...), nous avons décidé de faire toutes nos mesures pour le mode 1 de rebond.

Le premier élément remarquable est que le phénomène de mouvement spontané suivant les directions  $x$  et  $y$  de la lentille semble à première vue ne pas apparaître pour toutes les billes. En effet pour une amplitude et une fréquence données, on peut observer trois comportements différents :

- Soit la bille oscille horizontalement dans la lentille. Ces oscillations croissent jusqu'à atteindre une valeur limite ou jusqu'à ce que la bille sorte de la lentille.
- Soit la bille commence à avoir des mouvements horizontaux croissants, puis se colle spontanément à la lentille et donc revient au centre de la lentille.
- Soit la bille a une exploration horizontale nulle . De plus, elle est stable par rapport à une perturbation horizontale. Son mouvement vertical est alors celui classique d'une bille qui rebondit dans le mode 1.

Évidemment ces types de régimes dépendent de l'amplitude et de la fréquence. Mais on peut remarquer que certaines billes n'ont pas d'exploration horizontale, et ce quelles que soient la fréquence d'excitation ou l'amplitude du mouvement.

En changeant de bille, on change au moins deux paramètres essentiels qui sont le coefficient de restitution  $e$  et le rayon de courbure  $r$  de la bille ( paramètre qui semble majeur dans cette étude ). On ne peut alors pas tirer de loi qualitative sur l'influence de l'un de ces deux paramètres sur les trajectoires horizontales.

#### Types de trajectoires observées

La bille oscille dans le plan avec une période qui a priori ne change pas au cours du temps.

La plupart du temps, on observe que les trajectoires ressemblent à des ellipses qui précèdent (FIG. 6).

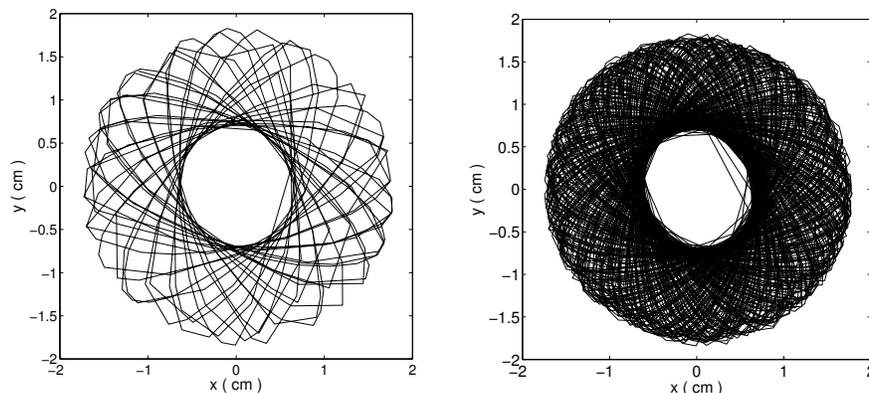


FIGURE 6 – Trajectoire de la bille de 20 mm pendant quelques secondes à gauche et pendant 2 minutes à droite. On observe que la bille parcourt des trajectoires similaires à celle d'une ellipse qui tourne.

Nous avons tout d'abord voulu savoir si la verticalité jouait beaucoup sur ces types de trajectoires. Pour cela nous avons volontairement incliné le pot d'un certain angle et regardé les trajectoires moyennes de la bille sur un long temps d'observation (FIG. 7).

On observe tout d'abord que la bille effectue toujours des oscillations elliptiques. Mais elle ne tourne plus et sa valeur moyenne n'est plus centrée en 0. La rotation de la trajectoire est alors un bon indicateur de la planéité du système.

Des trajectoires circulaires ont été observées également mais elles semblent plus rares.

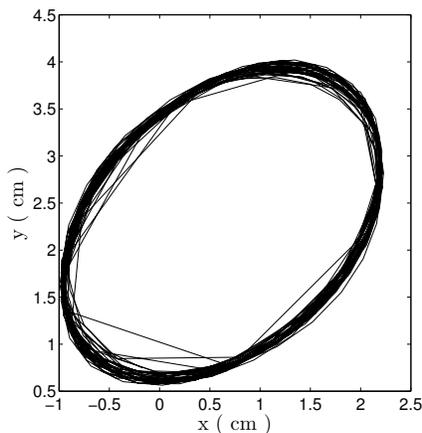


FIGURE 7 – Trajectoire en régime permanent d'une bille de 20 mm dans la lentille, inclinée volontairement de 2 degrés.

Au début de la croissance de la perturbation, on a plus généralement des oscillations dans la cuve qui sont d'abord linéaires (ou elliptiques avec une forte excentricité), puis passée une certaine amplitude, la trajectoire devient celle d'une ellipse qui se met spontanément à tourner. La vitesse de précession de ces "ellipses" semble constante.

Deux choses que l'on peut remarquer c'est qu'*a priori* les périodes de précession et d'oscillation ne dépendent pas significativement ni de la fréquence ni de l'amplitude du pot vibrant. Un test rapide a également montré qu'on a quand même une amplification des oscillations si on contraint la bille à osciller suivant une seule direction.

### 3.2 Rayon d'exploration $r$

Tout d'abord, pour découpler deux effets, nous avons étudié le rayon maximal d'exploration dans les régimes pour lesquels les billes ne s'arrêtent pas spontanément. Pour cela nous avons regardé à quelles fréquence et amplitude de vibration, la bille se collait spontanément à la lentille<sup>3</sup>.

On observe dans les deux courbes un creux vers 55 Hz (FIG. 8). Après analyse du signal de l'accéléromètre, on s'aperçoit qu'au moment du choc, la tension de l'accéléromètre subit un pic, puis des oscillations autour de ce pic qui peuvent durer jusqu'au prochain choc. On peut supposer que le creux qui apparaît dans les deux diagrammes précédents est dû à la résonance du plateau qui donne un surplus d'impulsion et qui permet à la bille de rebondir à des amplitudes plus basses que dans le cas d'un plateau rigide. On veillera donc à se placer dans des gammes d'accélération où ce phénomène n'entre pas en jeu.

Maintenant que nous connaissons grossièrement les domaines de rebonds de la bille, nous avons voulu mesurer la taille des explorations en fonction des différents paramètres du problème, mais en restant dans le mode 1.

Une nouvelle difficulté apparaît : la bille n'atteint pas son amplitude maximale d'exploration après un temps bien défini. En effet, on observe expérimentalement que la bille peut rester "bloquée" dans une trajectoire sans

3. On restera toujours dans une gamme de paramètre tel que l'accélération est inférieure à  $g$ , la bille ne peut donc pas décoller spontanément.

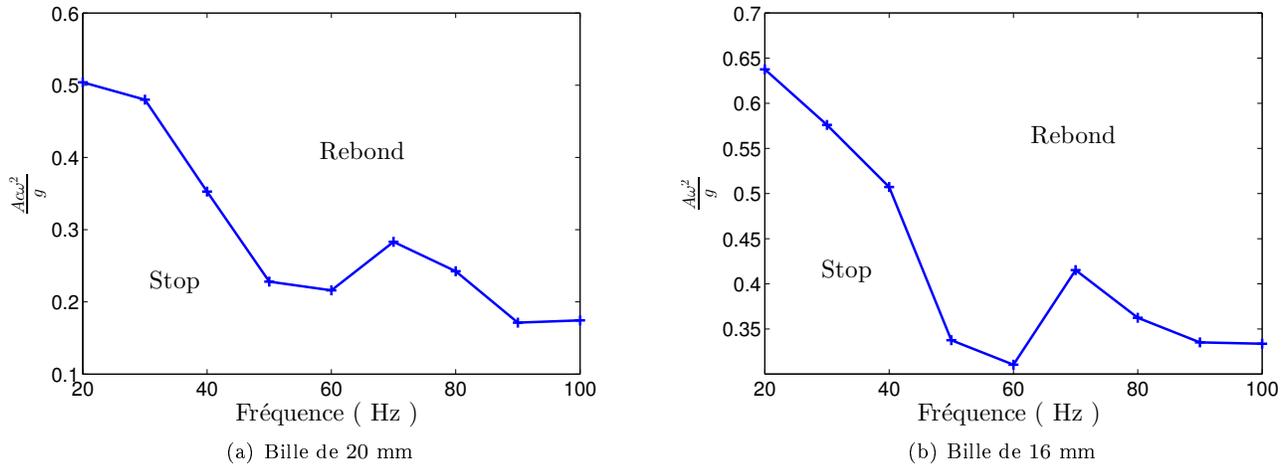


FIGURE 8 – Diagramme des phases en fonction de la fréquence et de l’amplitude du vibreur pour deux billes de rayon différent. La zone stop correspond à l’arrêt spontané de la bille durant son oscillation horizontale

atteindre son rayon maximal. Il est arrivé également que ses oscillations s’arrêtent totalement pendant un long moment avant de reprendre. Il faut alors attendre assez longtemps pour avoir la valeur "maximale" de la trajectoire observée (FIG. 9). De plus, une fois cette amplitude maximale atteinte, le rayon peut diminuer de nouveau ( voir annexe C ). Il est alors difficile de quantifier la vraie valeur maximale du rayon.

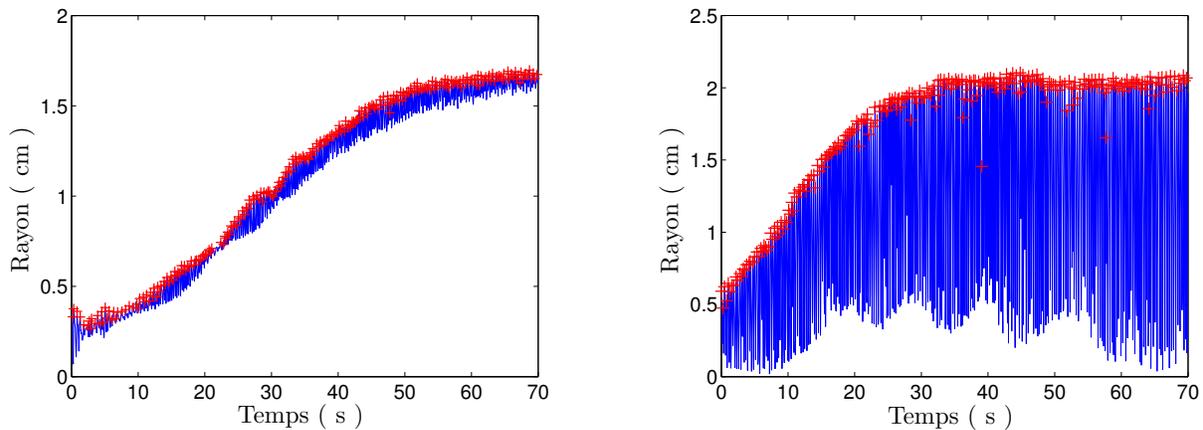


FIGURE 9 – Rayon de la trajectoire de la bille en fonction du temps durant un régime transitoire pour deux jeux de paramètres différents. Les croix rouges représentent les valeurs maximales du rayon sur une oscillation. La courbe de gauche correspond à une trajectoire quasi-circulaire.

Un autre problème concerne la définition d’un rayon maximal d’exploration. Quelle valeur prendre? Pour éliminer les problèmes précédents, nous avons moyenné les rayons maximaux de chaque oscillation ( *ie* le demi grand axe de l’ellipse instantanée ) sur une durée de l’ordre de la minute, afin d’avoir une valeur moyenne du rayon maximal.

Cependant malgré ces précautions, les valeurs obtenues varient quelque peu d’une expérience à l’autre... Néanmoins, en ayant moyenné plusieurs mesures pour chaque point, on obtient les courbes suivantes ( FIG. 10 ) :

On voit que le rayon dépend très peu, voire pas du tout de l’amplitude de vibration. Ce n’est pas très surprenant car seule la hauteur de vol est modifiée quand on change l’amplitude de vibration.

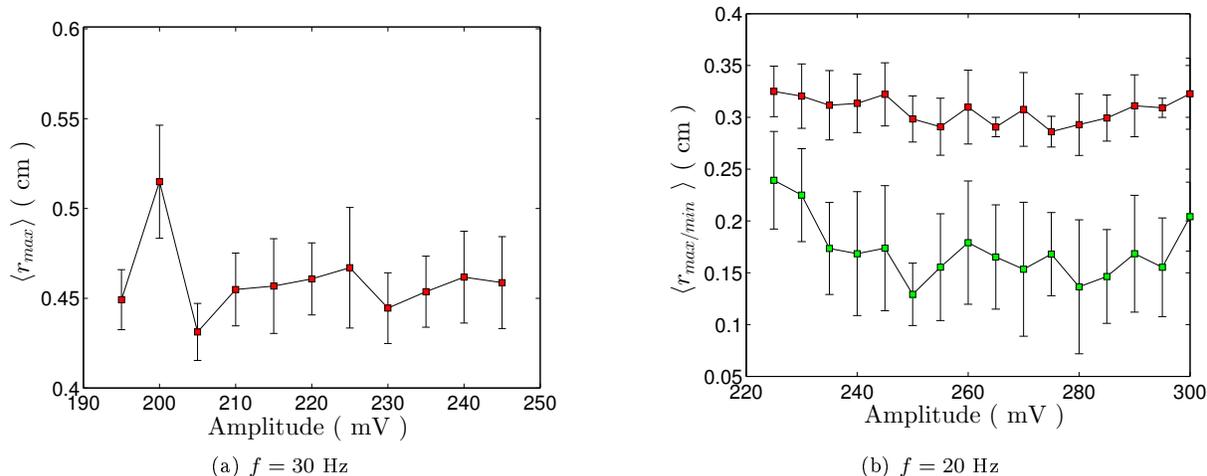


FIGURE 10 – Rayon moyen maximal ( en rouge ) et minimal ( en vert ) en fonction de l’amplitude du vibreur pour la bille de 16 mm pour deux fréquences différentes.

Nous avons fait le même test avec la fréquence (FIG. 11).

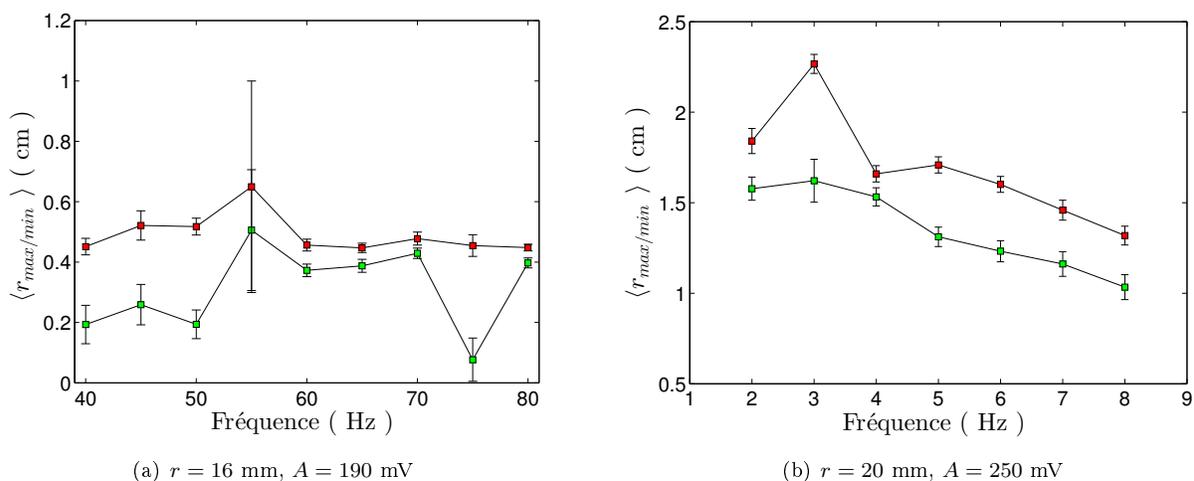


FIGURE 11 – Rayon moyen maximal ( en rouge ) et minimal ( en vert ) en fonction de la fréquence du vibreur pour deux billes différentes.

On observe que le rayon moyen d’exploration ne dépend pas de la fréquence pour la bille de 16 mm. On note une légère décroissance de l’amplitude du rayon pour la bille de 20 mm mais elle reste faible devant les variations de la fréquence.

L’amplitude et la fréquence de vibration de la bille ne semblent pas modifier significativement la trajectoire suivant  $x$  et  $y$ . Il semble alors que le temps de choc ne soit pas un paramètre important dans le problème, et que la vibration suivant  $z$  n’est alors là que pour donner à la bille l’énergie qu’elle perdrait à chaque choc.

Sur toutes les billes à disposition, seules celles de 16 mm et 20 mm disposaient d’une amplitude d’oscillation assez grande pour pouvoir faire ce genre d’étude. Les autres billes avaient des amplitudes trop faibles pour que l’on puisse les quantifier.

### 3.3 Modulation de la phase et du temps de vol

Nous nous sommes ensuite intéressés à la modulation que subissait la phase  $\phi$  du mouvement du plateau ( voir FIG. 1 ) pendant le mouvement horizontal.

En effet, nous avons dit précédemment que dans le mode 1, la phase du mouvement du plateau au moment des chocs est toujours la même. Cependant dans le cas d'un plateau courbé, lorsque la bille explore des positions éloignées du centre, le choc a lieu plus tôt, à cause de l'altitude du plateau. La bille reçoit alors moins d'impulsion et le prochain choc a lieu plus tard. Cette modulation de phase est d'autant plus importante que les explorations de la bille sont grandes. On observe de même une modulation sur le temps de vol entre deux chocs. Pour plus de simplicité, nous étudierons plutôt la modulation du temps de vol, qui est symétrique par rapport à sa valeur moyenne<sup>4</sup>.

Lors de la croissance de la perturbation, on observe une croissance de l'amplitude de la modulation jusqu'à ce que la trajectoire de la bille ait atteint un régime stationnaire ou alors que la bille s'arrête de rebondir (FIG. 12).

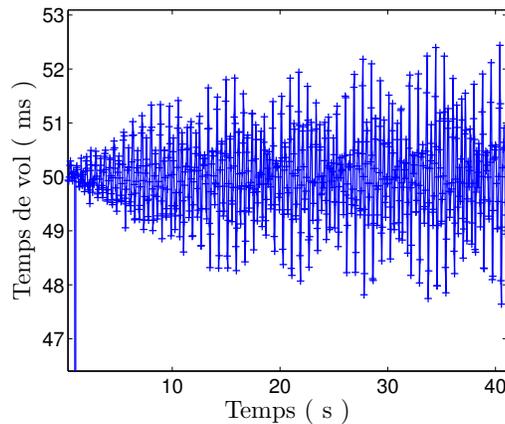


FIGURE 12 – Évolution du temps de vol au cours du temps pour un régime transitoire à une fréquence de 20 Hz et une amplitude de 150 mV.

On remarque que la modulation du temps de vol est plutôt périodique, de même période que celle des oscillations de la position.

De plus un agrandissement sur les oscillations du temps de vol permet de voir qu'il y a une dissymétrie entre le nombre de chocs pour les phases d'augmentation et de diminution. Cependant le signal est déjà modulé à cause de la trajectoire elliptique et probablement également à cause de la précession.

Pour découpler les différents effets, on essaye de lancer la bille dans une trajectoire volontairement linéaire. Cette trajectoire n'est pas "stable" dans le sens où la bille va spontanément décrire une ellipse puis se mettre à tourner. Cependant la bille a le temps de faire quelques oscillations quasi-linéaires. On obtient alors une courbe pour le temps de vol qui ne contient que la modulation due au mouvement de balancier (FIG. 13).

On observe bien une dissymétrie entre les phases de croissance et de décroissance du temps de vol. Pour comparer ces moments de croissance et de décroissance à ceux de la position de la bille, nous avons réussi à caler les dates des chocs et la position de la bille sur un temps court<sup>5</sup> (FIG. 14).

On observe alors que la croissance du temps de vol correspond à une diminution de l'amplitude. Autrement dit, la bille s'éloigne du centre en peu de chocs, puis met beaucoup de chocs à revenir en 0.

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, il y a une modulation plus complexe.

4. Un cos apparaît dans le calcul de la phase, ce qui rend la courbe de la phase plus complexe.

5. Une caméra plus performante nous aurait permis de caler les deux signaux sur un temps long et avoir des mesures plus propres.

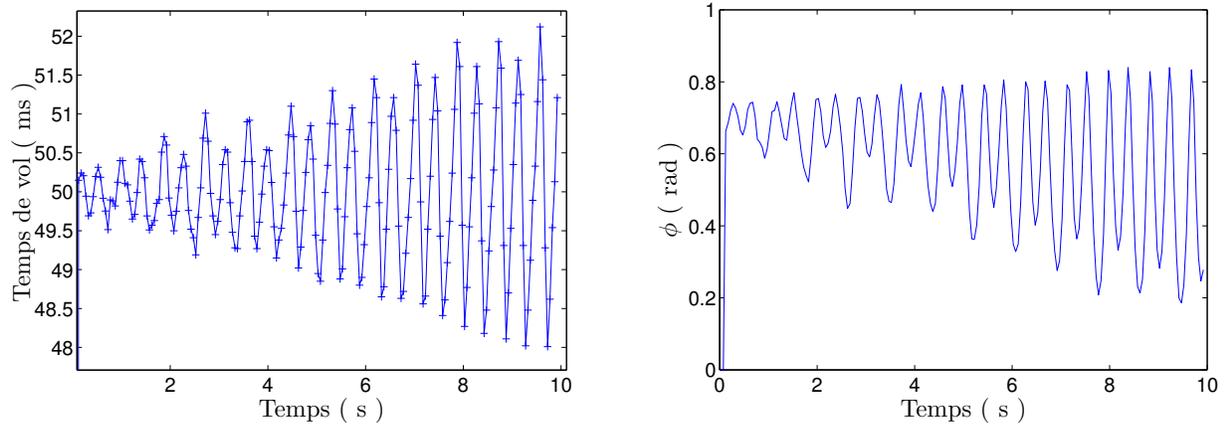


FIGURE 13 – Évolution du temps de vol et de la phase au cours du temps durant un régime transitoire à une fréquence de 20 Hz et une amplitude de 150 mV

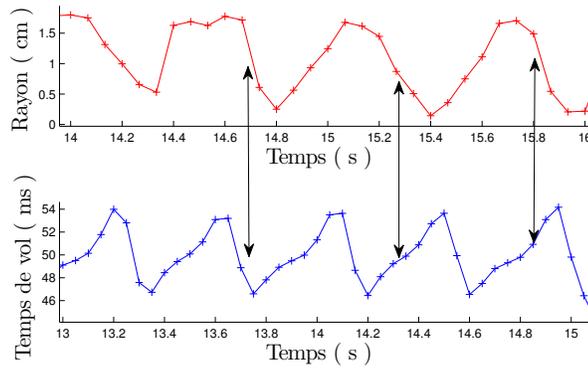


FIGURE 14 – Rayon d’exploration de la bille et temps de vol au cours du temps. Les échelles temporelles ne sont pas identiques mais les deux signaux ont été synchronisés.

### Explication de l’arrêt spontané du rebond

Cette modulation permet d’expliquer le fait que dans certains cas, la bille s’arrête spontanément de rebondir. En effet, suivant les conditions avec lesquelles la bille tape sur le plateau, son mode de rebond stationnaire peut changer. Pour des paramètres d’expériences identiques, après un régime transitoire, une bille peut atteindre un mode de rebond précis, avoir des rebonds chaotiques, ou bien s’arrêter de rebondir. Les deux conditions à prendre en compte sont la phase du plateau et la vitesse de la bille au moment du choc. Nous avons effectué une simulation numérique permettant de mettre en évidence l’importance des conditions de rebond sur le plateau. Dans cette simulation, on lâche la bille avec des conditions initiales différentes, et pour chaque lâchés, on calcule le temps de vol de la bille, une fois le régime permanent atteint.

Le diagramme réalisé numériquement ( FIG. 15 ) pour connaître le mode de la bille en fonction des conditions initiales, peut nous aider à comprendre pourquoi dans certains cas, la bille s’arrête spontanément de rebondir lorsque elle est en train d’osciller horizontalement.

En effet, à partir des temps de vol et des instants de choc, on peut remonter à la vitesse de la bille lors du choc, ainsi qu’à la phase du plateau à ce moment-là et ainsi placer des points obtenus expérimentalement à chaque choc sur le diagramme numérique précédent. Si les oscillations sont trop fortes, les conditions de chocs deviennent alors telles que la bille tombe dans le mode 0 et s’arrête de rebondir.

Nous n’avons pas pu réaliser ce genre de diagramme expérimentalement à cause du déphasage entre la caméra et les autre capteurs et ainsi confirmer notre hypothèse de l’explication des arrêts spontanés.

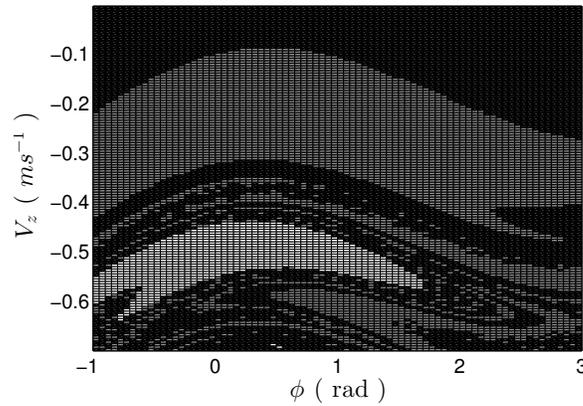


FIGURE 15 – Diagramme des différents modes de rebond de la bille en fonction des conditions de lâché pour une amplitude de vibration de 0.5 mm et une fréquence de 20 Hz pour une bille de coefficient de restitution de 0,8. La zone noire correspond au mode 0, *ie* la bille reste collée sur le plateau. Les zones foncées et claires correspondent respectivement aux modes 1 et 2 de rebond.

### 3.4 Fréquences

Nous avons également regardé la fréquence à laquelle la bille oscille dans la lentille ainsi que la fréquence de précession.

#### Oscillation de la bille

Pour mesurer avec précision la fréquence d'oscillation de la bille dans la cuve, nous avons effectué la transformée de Fourier de la position ( et également de la phase ) au cours du temps. Après plusieurs études à différentes fréquences et différentes amplitudes pour deux billes de 16 mm et 20 mm , force est de constater que la fréquence est quasiment toujours identique. Cette fréquence vaut entre 1.5 et 2 Hz.

Les autres billes dont nous disposons présentant des oscillations moins prononcées, il était difficile d'obtenir une fréquence d'oscillation précise.

La grande incertitude sur la valeur de la fréquence est due au fait que parfois, le pic dans la transformée de Fourier n'est pas bien défini, et on a plutôt affaire à une multitude de pics.

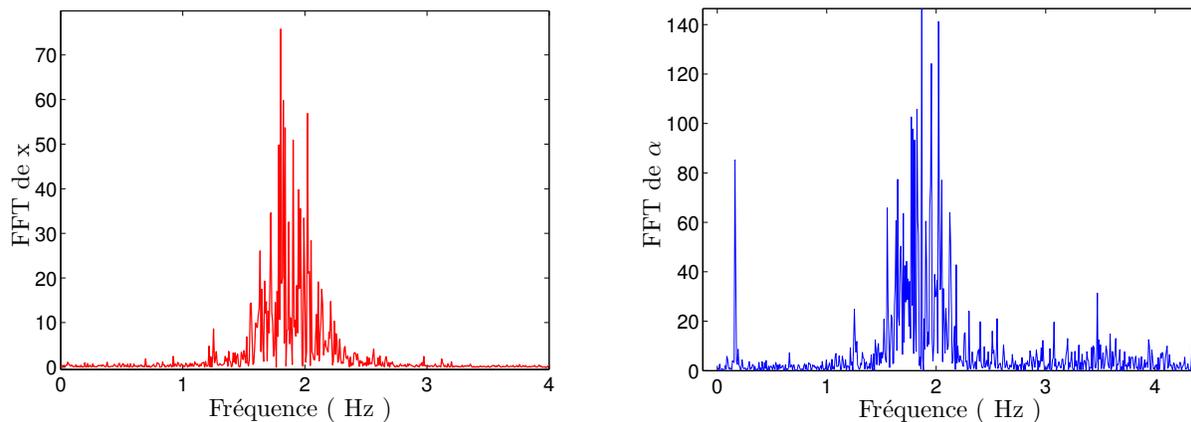


FIGURE 16 – Transformée de Fourier de la position  $x$  de la bille et de l'angle  $\alpha$  au cours du temps dans un régime établi, à une fréquence de 70 Hz et une amplitude de 130 mV pour une bille de 20 mm

## Précession de l'ellipse

On observe (FIG. 16) un pic à environ 0.1 Hz. Ce pic correspond à la vitesse de précession de l'ellipse que parcourt la bille. On peut le vérifier en traçant l'angle que fait la bille avec le repère d'origine en fonction du temps, puis en regardant la valeur de l'angle pour les valeurs maximales de la distance au centre (FIG. 17).

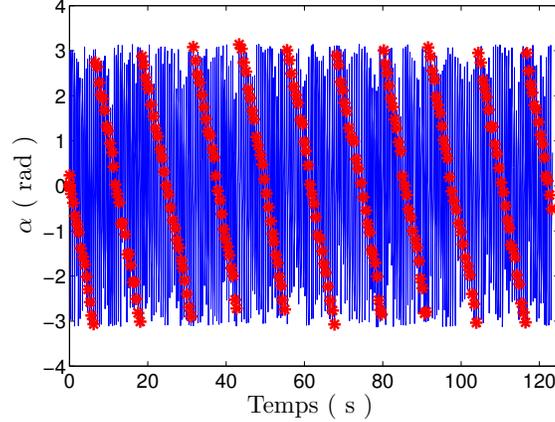


FIGURE 17 – Angle  $\alpha$  que fait la bille avec l'axe des  $x$  ( voir schéma 2 ) en fonction du temps. Les astérisques sont les valeurs des angles pour lequel le rayon est maximal.

L'angle au moment où le rayon est maximum diminue linéairement au cours du temps. L'ellipse a donc une vitesse de précession constante au cours du mouvement qui est de  $0.58 \text{ rad.s}^{-1}$  (fit linéaire en annexe D ). Cette vitesse ne dépend pas non plus de l'amplitude ou de la fréquence du pot vibrant.

On a aussi parfois observé des changements de sens dans la précession de l'ellipse ( voir figure en annexe D ).

## 4 Modélisation du problème et résolution numérique

Pour comprendre le mécanisme d'amplification, nous avons fait quelques simulations numériques en deux dimensions ( une dimension verticale  $z$  et une horizontale  $x$  ). Certes nous avons vu expérimentalement que le phénomène est en trois dimensions. Cependant nous avons effectué quelques tests en contraignant la bille suivant un seul axe horizontal et l'amplification des trajectoires se produit néanmoins, même si elle est moins importante que dans le cas où la bille n'est pas contrainte.

Nous cherchons donc à reproduire ce phénomène d'amplification dans nos simulations à deux dimensions.

### 4.1 Modélisation simple

L'objectif de cette partie est d'identifier les mécanismes qui permettent de voir émerger ce phénomène. Nous allons essayer de construire un modèle qui prenne en compte les observations expérimentales : comme les caractéristiques principales du mouvement ne dépendent ni de la fréquence ni de l'amplitude de vibration, nous allons d'abord découpler le mouvement suivant  $z$  du mouvement horizontal.

Nous allons commencer simplement en ne considérant pas la vibration du plateau. La vitesse suivant  $z$  au moment du choc sera alors supposée être celle du mode 1, *ie*  $\frac{-gT}{2}$ . On doit ensuite définir une loi de choc.

#### 4.1.1 Modèle de réflexion parfaite

Un premier modèle est de négliger la rotation de la bille et de considérer seulement une réflexion avec glissement sans frottement. On a donc la force tangentielle à la bille qui est nulle et la vitesse orthogonale qui vérifie :  $V_{\perp}^f = -V_{\perp}^i$ . Cela revient à considérer que la bille se réfléchit sur la surface sans perdre d'énergie.

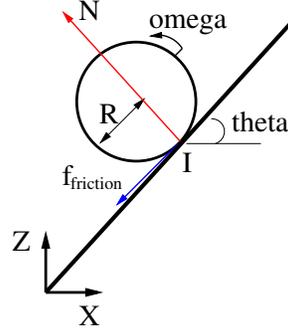


FIGURE 18 – Schéma de la bille lors d'un choc sur le plateau, avec une force normale  $N$  et une force tangentielle  $f_{friction}$ . Le point de contact entre le plateau et la bille est le point  $I$ .

On obtient donc à partir de ces conditions de réflexions :

$$V_z^f = -\cos(2\theta)V_z^i + \sin(2\theta)V_x^i \quad (3)$$

$$V_x^f = +\sin(2\theta)V_z^i + \cos(2\theta)V_x^i \quad (4)$$

Les indices  $i$  renvoient aux quantités avant le choc, et les indices  $f$  les quantités après le choc. On peut facilement vérifier que ce modèle de choc est conservatif. Ce modèle permet également de donner des oscillations qui dépendent du rayon de courbure de la lentille et de  $g$ . En effet on peut trouver analytiquement la période de ces oscillations, en considérant que  $\theta \ll R_p$  :

$$V_x^f = 2\theta V_z^i + V_x^i \iff \Delta V_x = 2 \frac{x}{R_p} V_z \quad (5)$$

En considérant que la variation de vitesse suivant  $x$  a lieu sur un temps de l'ordre du temps de vol  $T$ , on peut passer à des variables continues :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Omega^2 x \quad (6)$$

Avec  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R_p}}$ . Ce modèle permet de prévoir des oscillations sur une surface sphérique. Au vu des valeurs expérimentales, on obtient une fréquence comprise entre 1.3 Hz et 1.4 Hz, ce qui est proche de la fréquence expérimentale de  $(1.75 \pm 0.25)$  Hz.

Cependant, ce modèle ne prend pas en compte la rotation de la bille. Or quelques vidéos réalisées de côté ont montré que la bille tournait sur elle-même pendant le mouvement. Considérons donc un modèle qui prenne cette rotation en compte.

#### 4.1.2 Modèle de non glissement

Supposons que lors du choc, il y a non glissement du point de contact  $I$ . Cette condition  $\vec{V}_I = \vec{0}$  donne les équations scalaires suivantes :

$$V_x^f + R\omega^f \cos(\theta) \quad (7)$$

$$V_z^f + R\omega^f \sin(\theta) \quad (8)$$

De plus le théorème du moment cinétique nous donne :

$$J \frac{\Delta \vec{\omega}}{T_{choc}} = \vec{R} \wedge \vec{F} \quad (9)$$

Avec  $J = amR^2$ , le moment d'inertie de la sphère, et  $a$  est un facteur qui dans le cas d'une sphère vaut  $\frac{2}{5}$ . De plus, on connaît la force subie à partir des variations de vitesse que subit la bille :

$$F_x = \frac{m}{T_{choc}} \Delta V_x \quad (10)$$

$$F_z = \frac{m}{T_{choc}} \Delta V_z \quad (11)$$

Ces équations nous permettent donc de fermer le problème *ie* la détermination des valeurs  $V_x^f$  et  $\omega^f$  en fonction des valeurs initiales. On trouve :

$$(1 + a) V_x^f = -a r \omega^i \cos(\theta) + V_z^i \sin(\theta) \cos(\theta) + V_x^i \cos(\theta)^2 \quad (12)$$

On peut remplacer  $\omega^i$  et  $V_z^i$  en utilisant les relations (7) et (8), qui sont également satisfaites lors du choc précédent.

$$(1 + a) V_x^f = -a V_x^i \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta^i)} + V_z^i \sin(\theta) \cos(\theta) + V_x^i \cos(\theta)^2 \quad (13)$$

En linéarisant à l'ordre 1 et en considérant que  $\theta = \theta^i + \frac{V_x^i T_{vol}}{R_p}$ , on obtient l'équation suivante :

$$\Delta V_x (1 + a) - V_z \frac{x}{R_p} = 0 \quad (14)$$

On considère toujours que la bille a la vitesse du mode 1 dans le cas de rebond classique, *ie*  $V_z = \frac{-gT}{2}$ . En passant au cas continu, on obtient un oscillateur harmonique de pulsation  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{2R_p(1+a)}}$ .

Ce modèles permet aussi de décrire un phénomène d'oscillation avec une période qui ne dépend que de  $\sqrt{\frac{g}{R_p}}$ , mais la fréquence d'oscillation vaut environ 0.8 Hz, elle prédit donc des oscillations plus rapides que le modèle précédent.

Un troisième modèle de glissement avec frottement a été tenté, mais celui-ci n'a pas montré des oscillations à la bonne fréquence. Le détail du modèle est présent en annexe E.

## 4.2 Couplage entre les mouvements suivant $x$ et $z$

Les deux modèles précédents n'expliquent pas l'amplification des oscillations. Mais ces modèles se basent sur l'hypothèse que la vitesse du plateau au moment du choc est toujours la même, soit de  $\frac{-gT}{2}$ . Cependant, la modulation de la vitesse en  $z$  est peut être nécessaire à l'amplification des oscillations. Pour le savoir, nous avons écrit un code qui résout le mouvement suivant  $x$  et  $z$ . La vitesse suivant  $z$  n'est alors plus constante, on doit résoudre numériquement le problème complet de la bille qui rebondit sur un plateau.

De plus, les modèles précédents laissent suggérer que la rotation n'est en fait pas essentielle. Testons cette hypothèse en plus du couplage entre  $x$  et  $z$ . Prenons la loi de choc classique (1) :

$$V_{\perp}^f = -e V_{\perp}^i + (1 + e) V_p \quad (15)$$

$$V_{\parallel}^f = V_{\parallel}^i \quad (16)$$

On écrit ensuite cette loi pour les vitesse  $V_x$  et  $V_z$ , en appliquant une matrice de rotation :

$$\begin{aligned} V_z^f &= -e \cos(\theta)^2 V_z^i + \sin(\theta)^2 V_z^i + (1 + e) \cos(\theta) V_p + (1 + e) \sin(\theta) V_x^i \\ V_x^f &= \cos(\theta)^2 V_x^i - e \sin(\theta)^2 V_x^i - (1 + e) \sin(\theta) V_p + (1 + e) \sin(\theta) \cos(\theta) V_z^i \end{aligned} \quad (17)$$

La résolution de ce modèle théorique donne des oscillations à une fréquence encore une fois de  $\sqrt{\frac{g}{R_p}}$  mais sans amplification.

Le couplage et la rotation semblent alors nécessaires pour avoir des amplifications.

On écrit alors une dernière loi qui prenne en compte ces deux ingrédients. On reprend alors le modèle de non glissement décrit plus haut, en résolvant en plus le mouvement suivant  $z$ .

On considère également la force de frottement entre la bille et le plateau ( voir FIG. 18 ). On doit alors considérer le terme  $V_x + R\omega$  est en fait la vitesse tangentielle du point de contact de la bille sur le plateau. Si celle-ci est supérieure à 0, la force de frottement que subira la bille sera négative et donc son impulsion diminuera, et inversement si le terme est supérieur à 0. Il apparaît donc un *signe*( $V_x + R\omega$ ).

À l'ordre 0 en  $\theta$ , celui-ci donne :

$$\begin{aligned} V_z^f &= -eV_z^i + (1+e)V_p \\ V_x^f &= V_x^i + 2V_z^i (\mu \text{ signe}(V_x^i + R\omega) + \theta) t_{choc} \\ R \times \omega^f &= \omega^i + 5V_z^i \mu \text{ signe}(V_x^i + R\omega) t_{choc} \end{aligned} \quad (18)$$

La résolution numérique donne les courbes suivantes ( FIG. 19 ) :

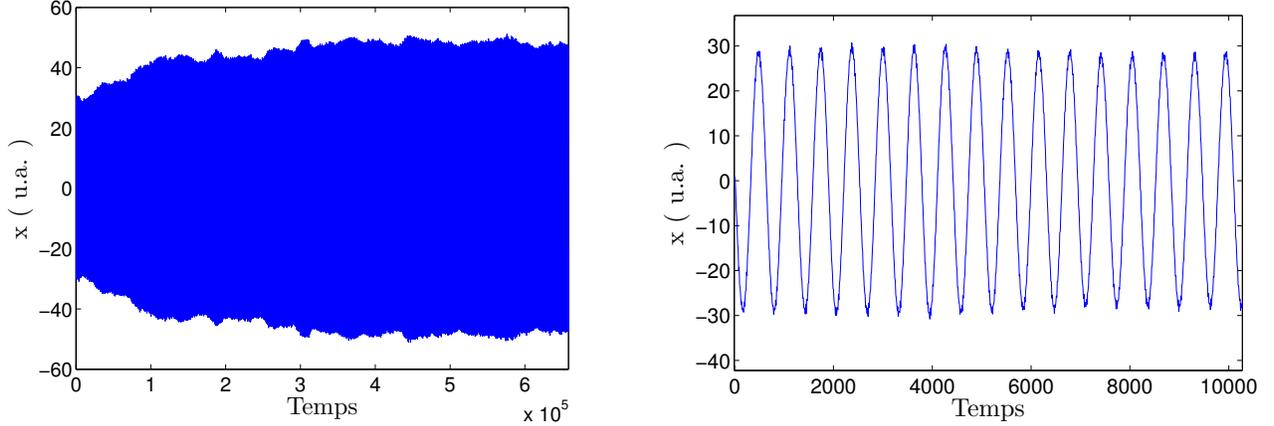


FIGURE 19 – Résolution numérique de la position de la loi de choc précédente. La figure de droite est un zoom sur les premières oscillations. La condition initiale est  $x = 1$ .

On voit bien une amplification des trajectoires (FIG. 19) , et même une saturation, phénomène qui est observé expérimentalement. De plus les oscillations donnent une fréquence qui est de  $\sqrt{\frac{g}{R_p}}$ .

Le modèle semble donc bien reproduire l'expérience... cependant le zoom de la courbe montre que l'amplification au début est très brutale. Cela peut s'expliquer par le fait qu'avec notre modèle, nous avons considéré que la bille roulait dès le début. Cette condition modifie fortement sa vitesse, alors qu'expérimentalement, la bille peut rouler pendant une phase puis glisser pendant une autre. De plus, notre modèle actuel ne montre pas de variations importantes du temps de vol, ni une dissymétrie entre le temps de montée et le temps de descente, fait qui pourrait justement être expliqué par le changement entre roulement et glissement de la bille.

## Conclusion et perspectives

En conclusion, ce travail exploratoire sur cette instabilité a permis de dégager des principes généraux sur ce phénomène. La fréquence d'oscillation et le rayon d'exploration de la bille ne semblent pas dépendre de la fréquence d'excitation du pot vibrant, ni de l'amplitude de celui-ci, le mouvement suivant  $z$  semble être découplé du mouvement d'oscillation suivant  $x$  et  $y$ .

Les modèles théoriques sont en accord avec cette conclusion puisqu'ils ont montré qu'une oscillation sur une surface sphérique de rayon de courbure  $R_p$  a une pulsation  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R_p}}$  qui est celle d'un pendule de longueur  $R_p$ .

Cependant, nos modèles ne prédisent pas précisément la bonne valeur de la fréquence d'oscillation. Un modèle plus complet devrait prendre en compte à la fois la rotation et le glissement de la bille. La fréquence de vibration semble également jouer un rôle, bien que faible, dans l'amplitude des oscillations. Il faudrait pouvoir y comparer le temps de choc, pour voir si ces deux temps sont du même ordre de grandeur et éventuellement le prendre en compte dans nos simulations.

Une autre problème a été de comprendre ces arrêts spontanés de la bille lors de la croissance de l'amplitude de son oscillation. Nous nous sommes aperçus que lors d'une oscillation dans la lentille, le temps de vol et la phase du plateau au moment du choc étaient modulés à cause de la différence de hauteur du plateau. Cette modulation affecte le rebond suivant de la bille, puisqu'elle arrive avec une hauteur différente et la phase du plateau est changée. Cette modulation est vraisemblablement responsable de l'arrêt spontané de la bille qui est souvent observé.

Avec une caméra plus performante, nous pourrions caler l'image avec les instant de choc sur un temps long et ainsi tracer la trajectoire de la bille dans le plan  $(V_z, \phi)$  pendant le régime transitoire, ce qui permettrait de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

On pourrait aussi s'intéresser à l'influence du mode dans lequel vibre la bille<sup>6</sup>. Nos modèles semblent indiquer que cela ne changera que la période des oscillations. La grande incertitude sur la fréquence d'oscillation peut d'ailleurs être due à la modulation de  $V_z$ .

Enfin l'influence du rayon de courbure de la bille semble être également très importante. Le problème étant qu'en changeant de bille, on change non seulement le rayon de courbure  $r$  mais aussi le coefficient de restitution  $e$  et la masse de la bille, même si celle-ci n'a à priori pas d'influence sur notre étude. Pour étudier l'influence de  $R$ , il faudrait concevoir des billes avec différents rayons de courbure, et un coefficient de restitution identique. Avec cela, on pourrait mettre plus facilement en évidence un seuil au delà duquel le phénomène se produit.

Personnellement, ce stage m'a permis d'apprendre à utiliser des logiciels de physique expérimentale tel que Labview et ImageJ et des logiciels de traitements des données comme Matlab. Durant ce stage, j'ai donc pu avoir un très bon aperçu de ce qu'est la recherche expérimentale et je sais à quoi m'attendre si j'entreprends une thèse expérimentale.

Je remercie encore tout le laboratoire de l'ENS pour son accueil et pour m'avoir fait découvrir ce que c'est que de travailler dans un labo. Je garderai un très bon souvenir de ce stage.

## Références

- [1] P Pieranski. Jumping particle model. period doubling cascade in an experimental system. *Journal of Physics*, 44, 1983.
- [2] A.M Tuffillaro, N.B Albano. Chaotic dynamics of a bouncing ball. *American Journal of Physics*, 54, October 1986.

---

6. Il est plus difficile d'examiner les autres modes de vibrations, car les zones de stabilités de ces modes sont plus étroites, et des faibles modulations font s'arrêter la bille.

## A Traitement d'images

Type d'images obtenues avec la webcam

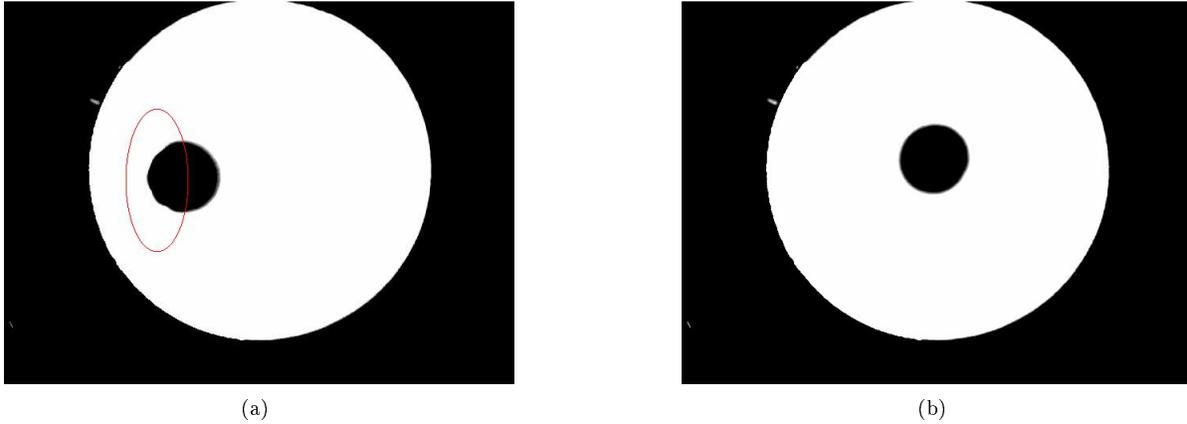


FIGURE 20 – Images obtenues avec la webcam pour la bille de 20 mm. On voit que lorsque la bille est près du bord ( figure de gauche ), un des bords de la bille est rogné à cause de l'éclairage direct du ruban de diode ( zone en rouge ).

## B Vérification dans le cas classique

On vérifie avec nos appareils de mesure que la phase  $\phi$  au moment du choc suit bien la loi suivante :

$$\cos(\phi) = \frac{\pi g}{A(2\pi f)^2} \frac{1 - e}{1 + e} \quad (19)$$

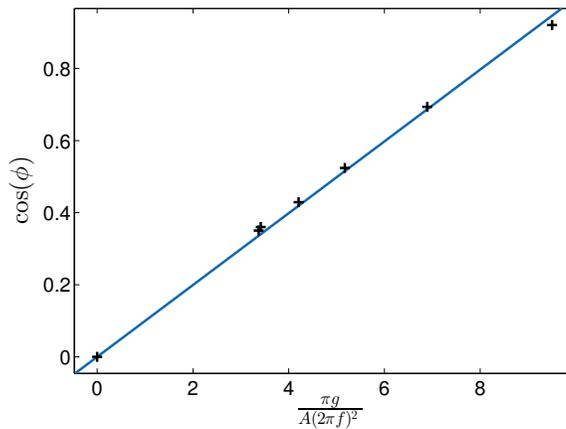


FIGURE 21 – Vérification expérimentale de la loi sur  $\phi$  en fonction de l'accélération.

La régression linéaire donne un coefficient de restitution de  $0.815 \pm 5\%$ , ce qui est cohérent avec les mesures de coefficient de restitution obtenues.

## C Rayon d'exploration

Rayons d'explorations dans le régime permanent

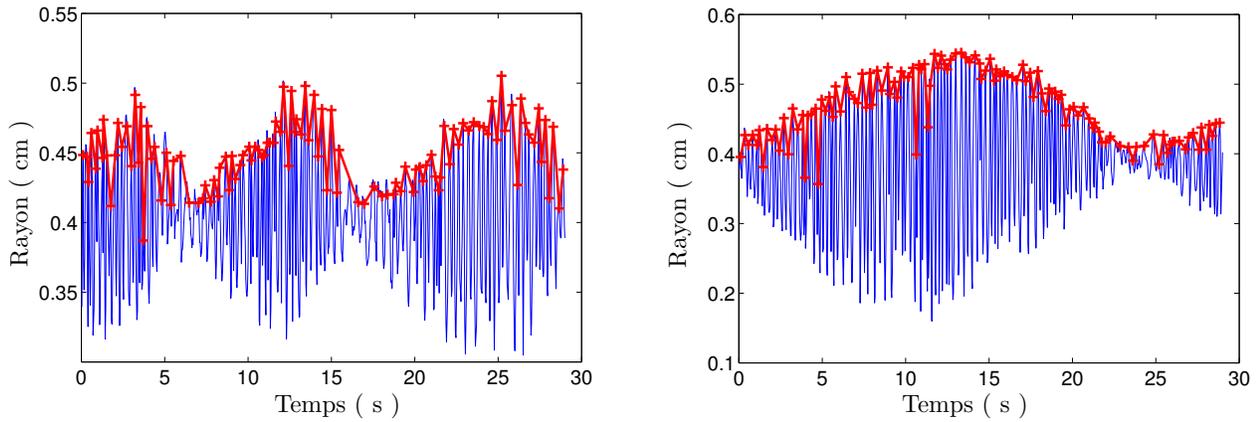


FIGURE 22 – Rayon d'exploration  $r$  de la bille de 20 mm en régime permanent, à 20 Hz pour 2 amplitudes différentes.

## D Précession de l'ellipse

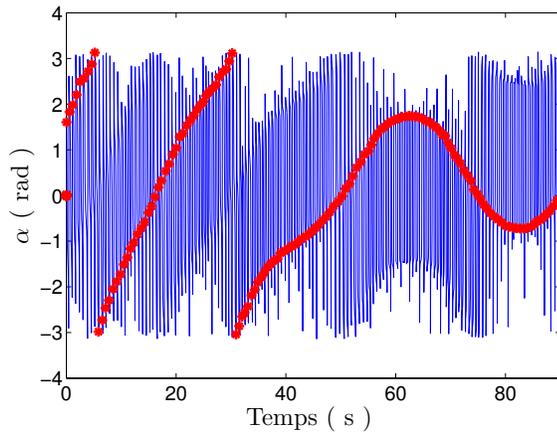


FIGURE 23 – Inversion dans le sens de rotation de l'ellipse. Figure réalisée avec la bille de 20 mm de diamètre, à 70 Hz et une amplitude de 130 mV.

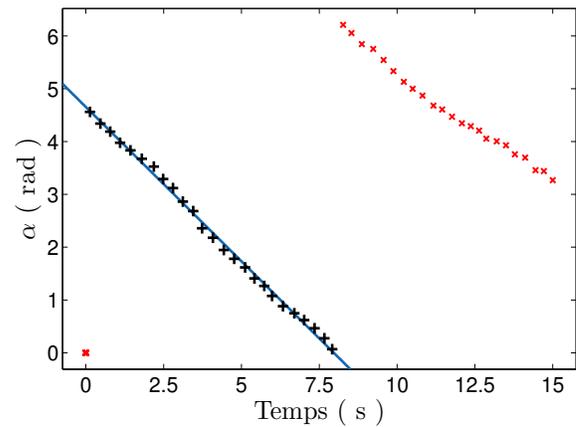


FIGURE 24 – Régression linéaire de l'angle  $\alpha$  au maximum de l'oscillation, en fonction du temps. Le coefficient de proportionnalité est de  $0.58 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , soit un tour complet de la lentille en un peu plus de 10 secondes.

## E Modèle de glissement avec frottement

Considérons maintenant un modèle plus complexe où l'on suppose que la bille glisse avec frottement pendant toute la durée du choc. On fait encore l'hypothèse que le mouvement vertical est dans le mode 1 et que la bille tombe alors avec la même vitesse de  $\frac{-gT}{2}$ .

Horizontalement, la bille glisse, et est donc soumise à une force de friction proportionnelle à la force normale :  $|f_{friction}| = \mu N$  (FIG. 18)

Dans ce cas-là, on écrit simplement le principe fondamental de la dynamique ainsi que le théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned} m \frac{\Delta V_x}{\tau} &= -\mu N \text{signe}(V_x + R\omega) + N \sin(\theta) \\ J \frac{\Delta \omega}{\tau} &= \mu N \text{signe}(V_x + R\omega) r \end{aligned} \quad (20)$$

$N$  est la force normale qui s'applique sur la bille durant le choc. Pour des raisons de simplicité, on va supposer cette force constante durant le choc<sup>7</sup>. Elle vaut donc :

$$N = 2m \frac{V_y}{\tau} = 2m \frac{g\pi}{\omega\tau} \quad (21)$$

Un adimensionnement du système nous donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu \text{signe}\left(\frac{dx}{dt} + u\right) - x \\ \frac{du}{dt} &= \frac{b}{a} \times -\mu \text{signe}\left(\frac{dx}{dt} + u\right) \end{aligned} \quad (22)$$

Avec  $b = \frac{R}{R_p}$  et  $a$  un facteur géométrique qui vaut  $\frac{2}{5}$  dans le cas d'une sphère.

Un raisonnement qualitatif montre que si on a une petite perturbation  $\epsilon$  de la position, celle-ci tend à s'accroître sous certaines conditions sur le coefficient de frottement.

Ce modèle permet bien de trouver une amplification, mais la fréquence n'est pas du même ordre de grandeur que celle de l'expérience, ce modèle ne décrit donc pas l'instabilité correctement.

---

7. En réalité elle dépend de la vitesse suivant l'axe normale, vitesse qui varie de  $-V_z$  à  $V_z$ .