Licence Science de la matière
Ecole Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage Juin-Juillet 2010
Jean-Yonnel CHASTAING
L3 Physique

Gaz granulaire 1 dimension à une particule

Résumé : *Lors de ce stage, nous avons étudié les rebonds d'une bille sur un plateau vibrant. Il s'agit d'un système dissipatif et entretenu, dans la mesure où la bille perd de l'énergie par choc inélastique et en gagne par transfert d'impulsion avec le plateau. Le montage conçu lors du stage nous a permis d'étudier les états énergétiques de la bille et ainsi que les corrélations qui existent entre les mouvements du plateau et de la bille. Nous avons pu mesurer avec précision le coefficient de restitution en vitesse* ε *de la bille avec différentes méthodes. L'étude du rôle des corrélations entre la bille et le plateau nous ont permis de faire apparaitre le rôle prépondérant de "l'effet d'ombre" présent lors de la chute de la bille. Enfin, nous avons pu accéder aux distributions de probabilité des énergies injectée et dissipée lors d'un choc.*

Mots clefs : *Gaz granulaire - Système dissipatif entretenu*

Stage encadré par :
Jean-Christophe Géminard
jean-christophe.geminard@ens-lyon.fr / tél. (33) 4 72 72 83 75

Laboratoire de Physique (U.M.R. 5672 CNRS)
46, Allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 - FRANCE.

27 juillet 2010

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Christophe Géminard qui m'a encadré durant ce stage. Grâce à sa disponibilité, son aide et sa gentillesse, j'ai pu découvrir le monde de la recherche et travailler durant ces deux mois sur un thème passionnant. Merci également à Eric Bertin qui m'a apporté des éléments de théorie et à Vincent Grenard qui m'a grandement aidé dans l'utilisation des logiciels Labview et Matlab. Enfin, je remercie toute l'équipe du laboratoire pour son accueil.

Table des matières

1 Introduction

Ce stage a été effectué dans le Laboratoire de Physique de l'ENS, au sein du groupe "Matière Molle et Systèmes Biologiques". L'expérience traite du comportement dynamique d'une bille rebondissant sur un plateau en vibration. L'objectif du stage était d'étudier un modèle simple de système dissipatif et entretenu.
Une seule bille vibrée et soumise à la gravité est un système simple qui a été très largement utilisé dans les années 1980-90, notamment pour étudier les transitions vers le chaos [1, 2]. Le problème a été abordé de nombreuses fois, essentiellement par des approches numériques [3]. Ceci a permis d'étudier des comportements non linéaires, les bifurcations des mouvements périodiques vers les mouvements chaotiques, les mécanismes de vibration.
Un ensemble de billes vibrées est un prototype de gaz dissipatif. De tels systèmes nécessitent une injection continue d'énergie pour compenser les pertes dues aux collisions entre les particules. Il est intéressant, d'un point de vue théorique, d'étudier les modifications apportées par la dissipation aux propriétés du système que l'on compare à celles d'un système classique décrit par la mécanique statistique des systèmes conservatifs : transitions de phase, distributions des vitesses des particules, etc. Dans sa réalisation expérimentale la plus simple, le gaz consiste en un ensemble de billes recouvrant partiellement (moins d'une monocouche) un plateau horizontal sujet à un mouvement de vibration vertical [4, 5].

Il n'existe cependant que peu d'études des rebonds de la bille seule prenant en considération les propriétés énergétiques ou statistiques de ses trajectoires. Il n'existe à notre connaissance que deux contributions expérimentales à ce sujet [6, 7]. Ces deux études, pour des raisons techniques, ne permettent pas d'établir clairement les corrélations existant entre les mouvements de la bille et du plateau, par exemple. Nous avons donc décidé d'étudier les trajectoires d'une bille vibrée avec pour objectif de fournir des données sur l'ensemble de la trajectoire (positions et vitesses de la bille et du plateau, instants des collisions) et ce, même dans le cas d'un mouvement quelconque du plateau. Cette étude permet de discuter, du point de vue de la physique statistique des gaz granulaires, de la qualité du "thermostat" que constitue une paroi vibrante. En outre, nous avons adopté un point de vue différent, en considérant que l'échange d'énergie lors des collisions entre la bille et le plateau se décompose en deux contributions de natures différentes :

– un apport d'énergie (par transfert d'impulsion), la quantité d'énergie que prendrait la bille dans le cas d'une collision parfaitement élastique
– une perte d'énergie (par choc inélastique), la différence entre la quantité d'énergie effectivement échangée et celle prévue dans le cas élastique.

De ce point de vue, on peut considérer que la bille constitue un prototype d'un système dissipatif et entretenu.

Lors de ce stage, nous avons conçu et mis en place un montage qui permet d'étudier avec précision le mouvement de la bille au cours du temps, en utilisant un capteur de position et un micro. Nous avons écrit un code qui permet de reconstruire les trajectoires de la bille. après un phase de mesures et d'observations, nous avons étudié les corrélations entre les mouvements de la bille et du plateau en soumettant la bille à une excitation non purement sinusoïdale. Enfin, nous avons pu accéder aux répartitions énergétiques (dissipation et gain) relatives à la bille.

2 Première approche du système

Dans un premier temps, nous avons cherché à vérifier les lois qui régissent les rebonds d'une bille libre sur un support vibrant. Ce travail a permis d'étalonner les différents capteurs utilisés et de vérifier la cohérence des résultats obtenus. Après avoir étudié les modes périodiques et l'énergie de la bille, nous avons observé les corrélations qui peuvent exister entre les mouvements du plateau et de la bille.

2.1 Montage

2.1.1 Matériel

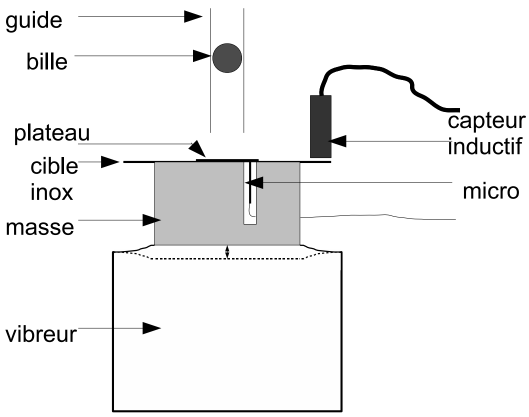

FIGURE 1 – Schéma du montage expérimental vu de côté (pas à l'échelle)

Dans notre montage (figure 1), nous avons utilisé une bille en acier de diamètre $8mm$. La taille du plateau était de $3cm$ et celle du guide de $15cm$. Pour l'excitation, nous avons utilisé un pot vibrant Brüel et Kjaer, couplé à un amplificateur de puissance et alimenté par une tension variable qui impose un mouvement sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude A au plateau en verre. Ainsi la hauteur du plateau vérifie au cours du temps (équation (a)) $h(t) = Asin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f$. Nous avons travaillé sur une gamme de fréquence $f \in [25; 100]Hz$.

Ce montage permet de respecter différentes contraintes. Tout d'abord, le plateau doit avoir un mouvement parfaitement sinusoïdal, afin de pouvoir contrôler son effet sur la bille. Cela implique que le choc de la bille ne crée pas un recul trop important sur le plateau. Dans ce but, nous avons augmenté l'inertie du plateau grâce à une masse d'environ 800 grammes, ce qui limite l'amplitude du mouvement parasite créé par le choc.

D'autre part, la bille doit être maintenue au dessus du support lors de ses chocs successifs. Pour cela, nous avons utilisé un guide métallique, dont le diamètre intérieur est légèrement supérieur à celui de la bille. Ce dispositif n'évite pas totalement les frottements, mais présente l'avantage de pouvoir utiliser un matériau rigide et plan pour le plateau vibrant (ici, du verre) qui dissipe peu d'énergie lors du choc. Une solution utilisée en général consiste à faire rebondir la bille sur une lentille.

Le vibreur a une course maximale de 6 mm et permet d'accélérer le plateau jusqu'à $5\ g$ ($49\ m.s^2$) sur une gamme de $20Hz$ à $20kHz$.

2.1.2 Capteurs

Le capteur inductif orienté vers une cible en inox permet de repérer la position du plateau. Ce type de capteur possède un champ magnétique externe, qui est modifié par la présence d'un métal. Il délivre en sortie une tension proportionnelle à la distance capteur/cible métallique avec un gain spécifique à la nature du métal. Pour l'inox, sa gamme de fonctionnement est de 1-10.5 Volts, avec un gain de $3.259 \pm 0.001 V/mm$. Ceci permet donc de mesurer des distances allant jusqu'à 3 mm environ. En pratique, l'amplificateur de puissance qui alimente le pot vibrant possède une intensité sortante limitée à 5 Ampères. La gamme d'accélération relative accessible est donc $\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \in [0;3]$. Le capteur a été étalonné en déplaçant la cible à l'aide d'une vis micrométrique, et le résultat obtenu a été recoupé avec d'autres mesures afin d'en vérifier la précision (problème de l'horizontalité de la face inférieure du capteur et de la plaque en inox).

Un micro en contact avec le plateau en verre permet de repérer les instants de chocs de la bille. Ce micro n'est sensible qu'aux très hautes fréquences (>30000 Hz), et délivre quelques charges électriques lorsqu'il perçoit un signal sonore. Nous avons donc fabriqué un amplificateur de courant (figure 2) afin de pouvoir traiter facilement le signal obtenu.

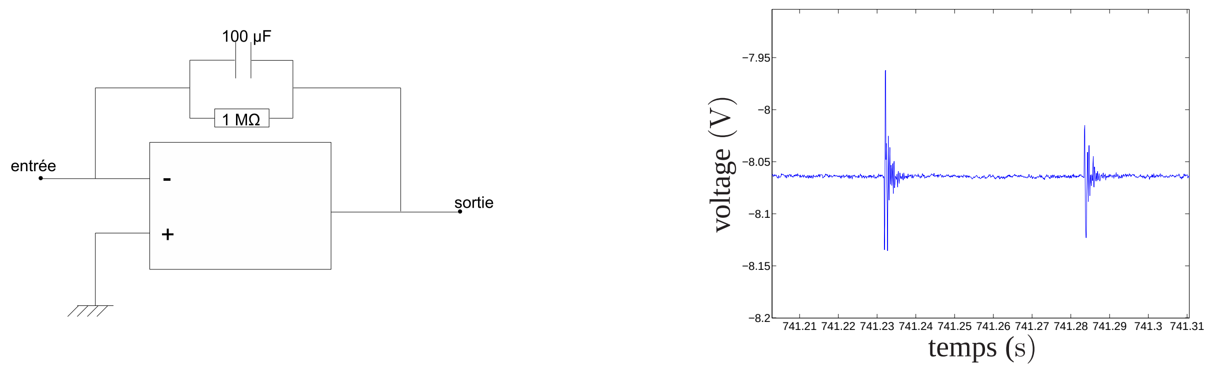

FIGURE 2 – Montage électrique amplificateur couplé au micro et signal délivré par le montage. Les pics observés sur le signal correspondent à des chocs de la bille sur le plateau.

Dans ce montage suiveur, les charges produites par le micro passent par la résistance $R = 1M\Omega$, créant ainsi une tension en sortie $V_s = R.i$ de l'ordre de 10 Volts. Afin d'éviter la présence de bruit dans le signal final, l'alimentation $\pm 15V$ de l'amplificateur opérationnel a été montée avec des condensateurs d'isolement et le montage électronique a été placé dans une boite métallique pour se prémunir du bruit électrique résiduel de 50 Hz.

Les signaux issus du capteur inductif et du micro pourront donc être utilisés pour connaître la position instantanée du plateau et les temps de chocs de la bille avec le plateau.

2.2 Théorie

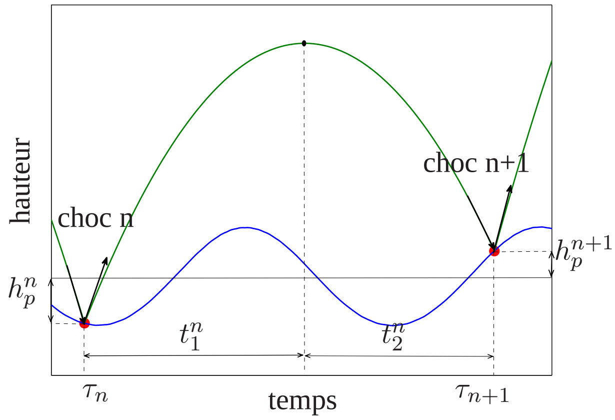

FIGURE 3 – Schéma représentatif de la trajectoire de la bille

Notre premier objectif dans cette étude était de pouvoir reconstituer la trajectoire d'une bille libre soumise à une excitation sinusoïdale. A l'instant du choc n, τ_n, la bille se trouve au contact du plateau, à la hauteur h_p^n. Ainsi, entre les chocs n et n+1 (figure 3), la bille fait un vol de durée $\Delta t_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ et la différence de hauteur entre les points de départ et d'arrivée vaut $\Delta h_n = h_p^{n+1} - h_p^n$. La conservation de l'énergie et la relation sur le temps permettent d'accéder aux temps de vol du point de départ au sommet de la parabole, t_1^n, et du sommet de la parabole au point d'arrivée, t_2^n, :

$$\frac{1}{2}g(t_1^n)^2 + h_p^n = \frac{1}{2}g(t_2^n)^2 + h_p^{n+1} \quad (b) \qquad t_1^n + t_2^n = \Delta t_n$$

On a alors $v_a^n = -gt_2^{n-1}$ et $v_d^n = gt_1^n$, respectivement les vitesses d'atterrissage et de décollage de la bille autour du choc n. On peut également obtenir l'énergie de la bille après le choc n, $E_n = mgh_p^n + \frac{1}{2}m(v_d^n)^2$. Ainsi pour le choc n, on peut accéder aux quantités suivantes : τ_n, h_p^n, v_a^n, v_d^n, E_n. Enfin, la trajectoire de la bille est alors calculée comme étant l'unique parabole de courbure $g = 9.81m/s$ qui relie les deux points des chocs n et n+1 :

$$h(t) = h_p^n + (\frac{\Delta h_n}{\Delta t_n} + \frac{g\Delta t_n}{2}) * (t - \tau_n) - \frac{g}{2} * (t - \tau_n)^2$$

Pour modéliser le choc inélastique de la bille sur le plateau, nous avons utilisé la loi de choc définie via le coefficient de restitution en vitesse ε. Ainsi, les vitesses relatives d'atterrissage et de décollage de la bille sont liées par la relation

$$v_{rd} = -\varepsilon \, v_{ra} \qquad (c)$$

Dans le cas où la bille fait un vol libre de durée $T = \frac{1}{f}$ avant de frapper à nouveau le plateau à la même hauteur, on parle de mode 1. Il s'agit d'un mode où la bille est synchronisée avec le plateau. Elle atteint donc le sommet de sa trajectoire à $\frac{T}{2}$, ce qui impose $v_d = \frac{gT}{2}$. Avec la loi de choc locale (c), on a $(v_d - v_p) = -\varepsilon \, (v_a - v_p)$ où v_p est la vitesse du plateau, et la vitesse de décollage est égale à la vitesse d'atterrissage en module $v_d = -v_a$. De plus avec le mouvement du plateau (a), $v_p = A\omega cos(\Phi)$ avec $\Phi = \omega\tau_n$. On a alors la loi

$$cos(\Phi) = \frac{\pi g}{A\omega^2}\Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big) \qquad (d)$$

Il est également possible d'étudier les corrélations qui existent entre le mouvement du plateau et celui de la bille. La relation sur l'énergie (b) conduit à l'expression suivante : $\frac{1}{2}\Big((v_d^n)^2 - (v_a^{n+1})^2\Big) = g(h_p^{n+1} - h_p^n)$. Or, si on moyenne sur tous les chocs (notation $< >$), on a $< \Delta h_p >= 0$, car la bille ne monte pas (ou ne descend pas) en moyenne. On en déduit $< (v_d)^2 >=< (v_a)^2 >$. On a la loi de choc (c) prise au choc n $v_d^n - v_p^n = -\varepsilon(v_a^n - v_p^n)$, avec v_p^n la vitesse du plateau à l'instant du choc n. Une fois prise au carré et moyennée, et en utilisant le résultat précédent, cette formule conduit à l'expression suivante :

$$< (v_a)^2 >= \frac{-2\varepsilon}{1-\varepsilon} < v_a v_p > + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < (v_p)^2 > \qquad (e)$$

En l'absence de corrélations, la bille arrivant à la vitesse v_a fixée peut frapper le plateau à n'importe quel instant, et donc avec une vitesse plateau v_p aléatoire. Le terme $< v_a v_p >$ est donc nul. Dans ce cas, la vitesse quadratique moyenne du plateau vérifie $< (v_p)^2 >= \frac{(A\omega)^2}{2}$.

2.3 Traitement des données

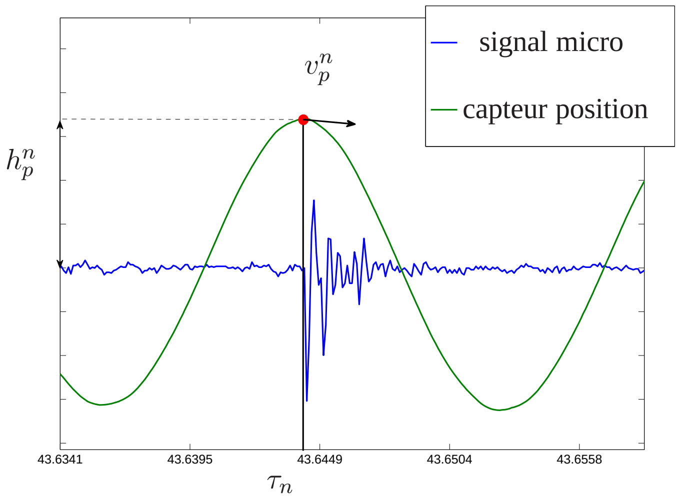

FIGURE 4 – Extraction des données à partir des signaux acquis.

L'acquisition des signaux (micro et position du plateau) a été faite via une carte NI-DAQ 'NI 6251', couplée au logiciel Labview. Ensuite, les données extraites sont traitées sous Matlab pour obtenir les informations nécessaires (figure 4). Le code Matlab utilisé repère tout d'abord les instants de chocs de la bille sur le plateau (τ_n). Avec l'utilisation d'une bille en acier et d'un plateau en verre, on observe des pics sur le signal délivré par le montage aux instants de chocs. Ces pics s'atténuent sur une durée caractéristique de 6 ms, ce qui permet de distinguer les chocs séparés d'au moins cette durée. Les instants de chocs ont été détectés via un dépassement de seuil dans le signal micro. Ce seuil est arbitraire et a été choisi de façon à détecter uniquement les pics dus au chocs et pas les pics résiduels. Ensuite, on obtient la position du plateau (h_p^n) et sa vitesse (v_p^n) par simple dérivée à l'instant du choc avec un fit local du signal acquis avec le capteur inductif. En effet, le signal était bruité et il était nécessaire de le filtrer ou de l'interpoler pour en tirer des données correctes.

La carte d'acquisition (16 bits) délivre des valeurs de tensions au μV prés. Mais c'est l'étalonnage du capteur inductif qui limite la précision des mesures de positions au μm près, soit à environ 0.2% de l'amplitude typique du mouvement du plateau. La fréquence d'échantillonnage choisie sous Labview (typiquement $5000 Hz$) limite, elle, la précision des mesures de temps à typiquement 0.2% de la période.

Il est important de noter que la trajectoire de la bille tracée sur les figures présentées dans les paragraphes suivants est calculée et non mesurée. Seuls les temps de chocs et la position du plateau sont mesurés.

2.4 Estimation du coefficient de restitution en vitesse par différentes méthodes

2.4.1 Chute sur plateau immobile

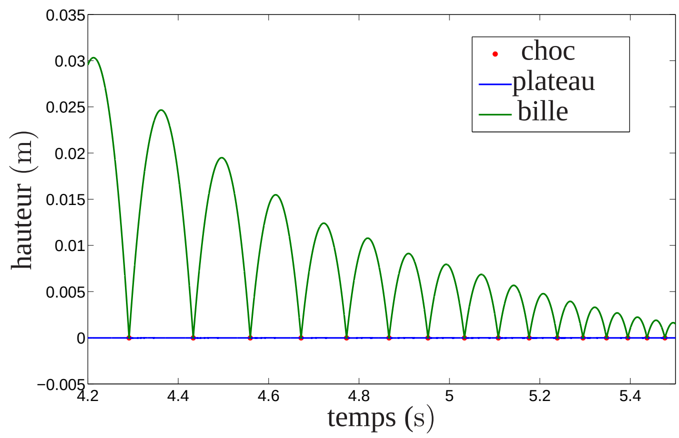

FIGURE 5 – Reconstitution de la trajectoire de la bille sur plateau immobile

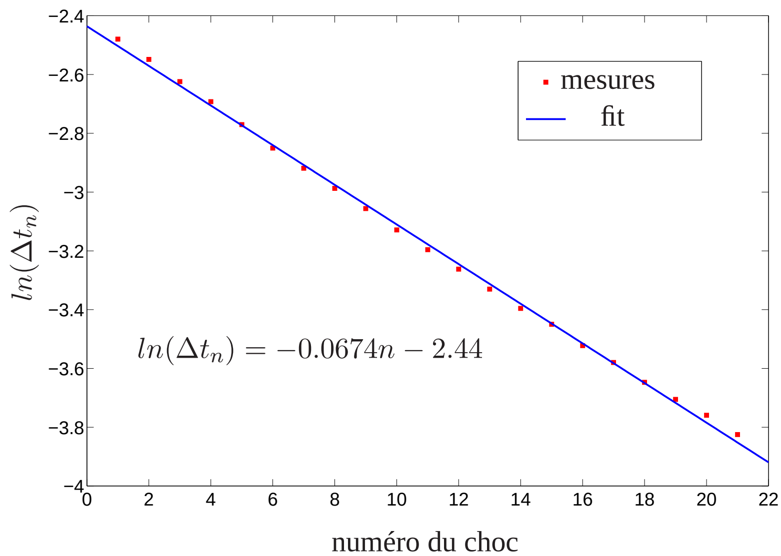

FIGURE 6 – Détermination du coefficient de restitution en vitesse par loi de choc locale

Dans un premier temps, nous avons étudié le mouvement de la bille dans le cas où le plateau est immobile. On lache la bille d'une hauteur fixée et on mesure les instants de chocs. Dans ce cas, on a $v_n = \varepsilon^n\, v_0$, v_n étant la vitesse de décollage après le choc d'indice n . Les temps de vols Δt_n étant proportionnels aux vitesses v_n, on a directement la loi $ln(\Delta t_n) = \Delta t_0 + nln(\varepsilon)$. Plusieurs mesures effectuées dans ces conditions permettent d'accéder à la trajectoire de la bille (figure 5) et à une très bonne estimation du coefficient de restitution.

On obtient donc (figure 6) $\varepsilon = 0.936 \pm 0.004$, ce qui correspond bien à un plateau relativement peu dissipatif (ε proche de 1). La précision sur cette valeur est trés grande dans la mesure où elle ne fait intervenir que des déterminations de temps de chocs. Les fluctuations observées sont principalement dues aux frottements plus ou moins importants de la bille sur le guide.

On obtient donc ainsi une première estimation du coefficient de restitution indépendante des calibrations, sinon de la période d'échantillonnage de la carte d'acquisition.

2.4.2 Etude du mode 1

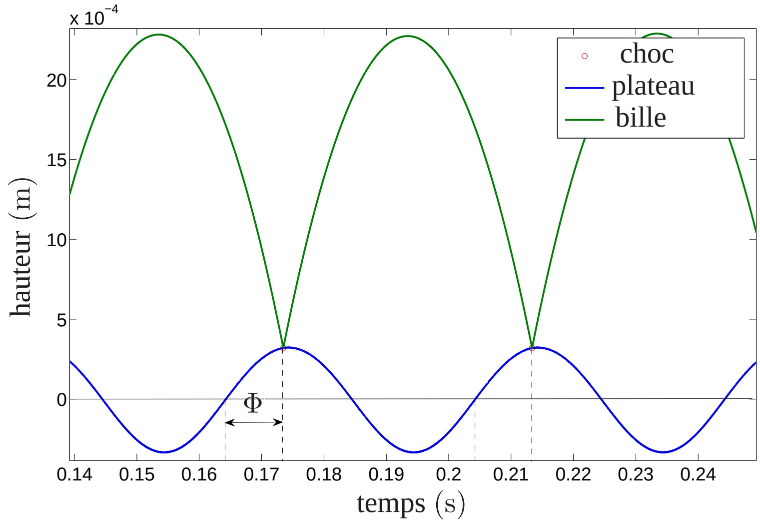

FIGURE 7 – Reconstitution de la trajectoire de la bille en mode 1, après mesure des hauteurs et des instants de chocs

Il est possible d'observer des modes synchronisés de la bille avec le plateau vibrant comme le mode 1 (la bille a un temps de vol $T = 1/f$, figure 7).

On peut alors vérifier la loi (d) donnant la phase de choc en fonction de l'accélération relative.

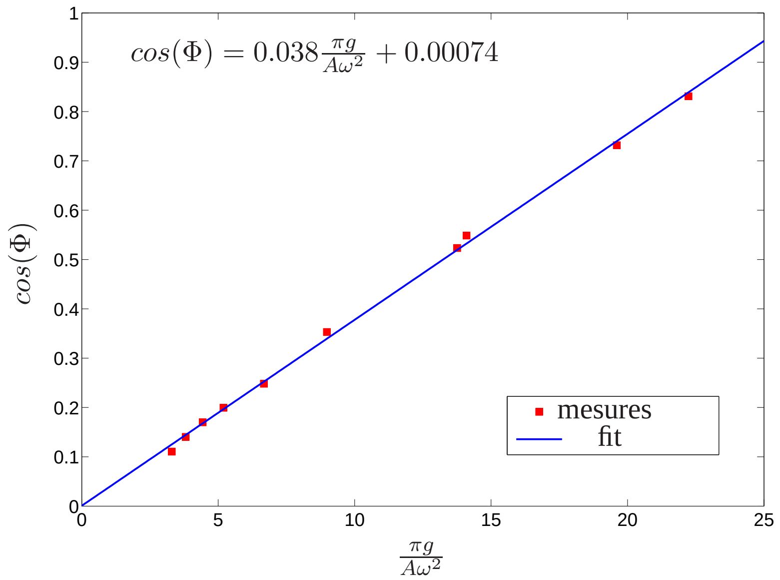

FIGURE 8 – Cosinus de la phase Φ en fonction de l'inverse de l'accélération relative $\frac{\pi}{\Gamma}$

Nous avons travaillé à fréquence fixée $f = 25Hz$ pour obtenir les résultats présentés sur la figure 8. Pour chaque point, nous avons fait une acquisition sur 10 secondes et moyenné les 250 mesures pour obtenir la phase Φ. On obtient avec ces mesures $\varepsilon = 0.93 \pm 0.01$, ce qui est bien compatible avec le résultat obtenu en 1.3.1. Pour obtenir un tel accord, il faut s'assurer que l'accélération est correctement mesurée, ce qui impose une calibration correcte du capteur de position. D'où l'intérêt de ce résultat.

Il apparait sur la figure 7 que le mode 1 est difficilement accessible pour Φ proche de 0 ou $\pi/2$. Ces deux positions limites correspondent en effet aux limites de stabilité du mode. Pour $\Phi = 0^-$, la bille n'a plus assez d'énergie et retombe sur le plateau. Pour $\Phi = \frac{\pi^+}{2}$, la bille prend trop d'énergie et il apparait des doublements de période.

2.4.3 Vérification de la loi de choc locale

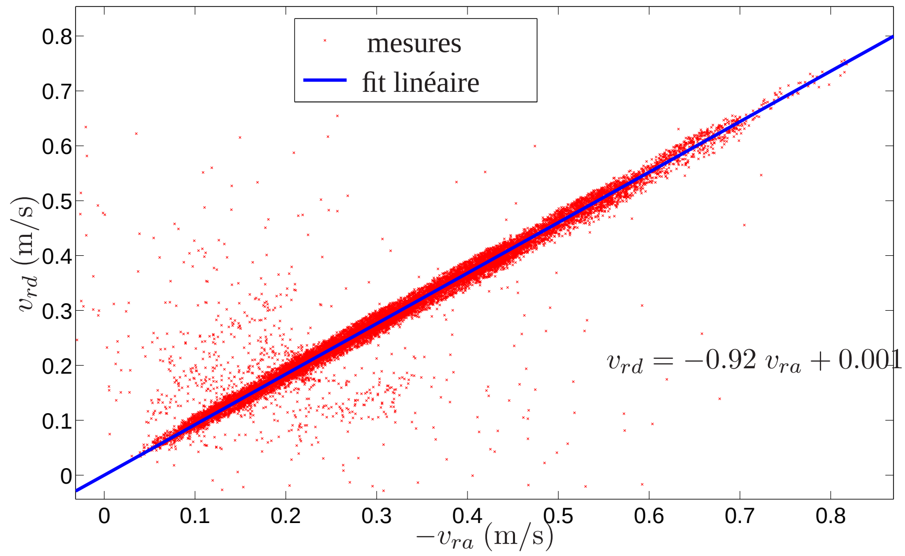

FIGURE 9 – Vitesse relative de décollage en fonction de l'opposé de la vitesse relative d'atterrissage

Afin de vérifier la validité du modèle et de tester les limites de la méthode de mesure utilisée, nous avons étudié la corrélation entre les vitesses relatives d'atterrissage v_{ra} et de décollage v_{rd}, donc la loi de choc locale (c).

Nous avons étudié une bille en régime chaotique, qui peut donc, a priori, frapper le plateau avec une phase Φ comprise aléatoirement entre 0 et 2π. La fréquence d'excitation a été fixée arbitrairement à $f = 40$ Hz, et nous avons fait 10 acquisitions de 100 secondes chacune pour 16041 chocs au total.

La régression linéaire (figure 9) conduit, selon la loi (c), à un coefficient de restitution en vitesse $\varepsilon = 0.92 \pm 0.01$. Ce résultat est compatible avec les précédents mais laisse apparaitre une petite erreur systématique assez importante. En effet, les points de mesures sont relativement écartés du fit linéaire. Cela peut provenir d'une erreur sur l'étalonnage du capteur inductif : les vitesses sont calculées à partir de la position du plateau aux instants de chocs via la trajectoire de la bille. De plus, la valeur obtenue est plus faible qu'avec les méthodes précédentes. Ici, la bille est en régime chaotique, ce qui rend les frottements sur le guide plus probables que dans le mode 1. La bille perd alors plus d'énergie que prévu par le modèle et le coefficient ε est sous-estimé.

On observe également que certains points sont totalement en dehors de la loi. Ceci peut être expliqué par des erreurs de détections des pics : lorsqu'un choc n'est pas détecté dans le signal micro, on a une mauvaise estimation des vitesses pour deux chocs consécutifs. On remarque que ces points sont présents surtout à faibles vitesses relatives, et correspondent donc à des chocs rapprochés en temps. C'est dans ces situations que les pics du signal micro sont les plus petits et rapprochés, et donc difficiles à distinguer. Il est possible de corriger cette erreur en recalculant la trajectoire de la bille entre les chocs précédant et suivant le choc "raté". Connaissant v_d^{n-1}, h_p^{n-1}, v_a^{n+1} et h_p^{n+1}, on peut retrouver les deux arcs de paraboles de courbure g qui relient ces points. Dans la suite de notre étude, nous avons cependant décidé de supprimer les points erronés dans la mesure où ils étaient en petit nombre.

2.4.4 Auto-corrélation de l'énergie

Grâce au traitement des données, il est possible d'étudier l'énergie de la bille au cours du temps afin d'observer son comportement. Bien que le régime soit chaotique, il existe toujours une corrélation entre les mouvements de la bille et du plateau. Les calculs ont été faits avec les mesures citées dans le paragraphe 2.4.3. La fréquence d'excitation était de 40 Hz pour une accélération relative $\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} = 1.83$.

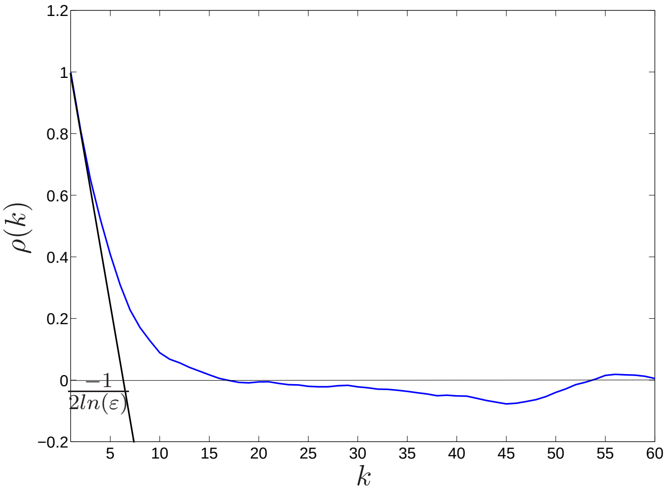

FIGURE 10 – Auto-corrélation de l'énergie de la bille acquise après chaque choc. La droite d'équation $y = 2ln(\varepsilon)k + 1$ représente la tangente à l'origine de l'auto-corrélation prévue par la théorie.

Sur la figure 10 a été tracée l'auto-corrélation de la quantité $\tilde{E}_n = E_n - < E >$, où $< E >$ désigne l'énergie moyenne de la bille. L'auto-corrélation "choc à choc" a été calculée selon la formule

$$\rho(k) = \frac{\sum_n \tilde{E}_n \tilde{E}_{n+k}}{\sum_n \tilde{E}_n \tilde{E}_n}$$

La loi de choc locale (c) prévoit une décroissance exponentielle de $\rho(k)$ selon $\rho(k) = exp(k.2ln(\varepsilon))$ (par simple récurrence sur l'indice de choc dans la loi (c)). Ce n'est pas le cas ici, ce qui met en défaut le modèle utilisé ; il existe d'autres pertes d'énergie que le choc inélastique : les frottements. Cependant, il apparait une corrélation sur 6 ± 1 chocs consécutifs, là où le modèle en prévoit $\frac{-1}{2ln(\varepsilon)} \simeq 7$. L'accord est donc très bon.

Les mesures obtenues par l'étude du mouvement de la bille dans ses différents états concordent. Nous avons donc ensuite pu étudier plus précisément les états dynamiques de la bille.

2.5 Premières observations

2.5.1 Energie

On peut accéder à la distribution en énergies (figure 11). La répartition semble suivre une loi exponentielle décroissante, mais son interprétation précise nécessite son étude pour différentes accélérations relatives Γ.

On peut également étudier la probabilité d'un gain d'énergie suite à un choc, en calculant la différence d'énergie de la bille avant et après le choc, $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$. La figure 11 montre que la loi de probabilité n'est ni centrée, ni symétrique. En moyenne la bille ne perd pas ou ne gagne pas d'énergie. Cependant, la probabilité de gagner de l'énergie est plus importante que d'en perdre (55.7% contre 44.3%). Pour compenser cela, les gains sont faibles, alors que les pertes sont fortes.

Dans les deux distributions, il apparait des pics malgré les 16041 chocs étudiés. Dans la suite de l'étude, nous essayerons de déterminer s'il s'agit de "bruit" (manque de statistiques) ou de modes de fonctionnement particuliers (modes périodiques, corrélations,...).

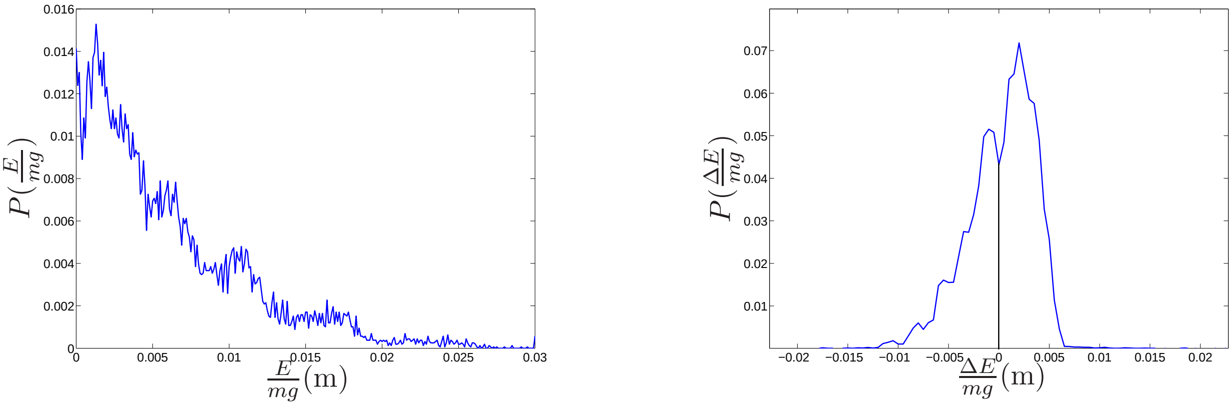

FIGURE 11 – Distribution de probabilité des "énergies" $\frac{E}{mg}$ et des gains "d'énergie" $\frac{\Delta E}{mg}$.

2.5.2 Corrélations entre plateau et bille

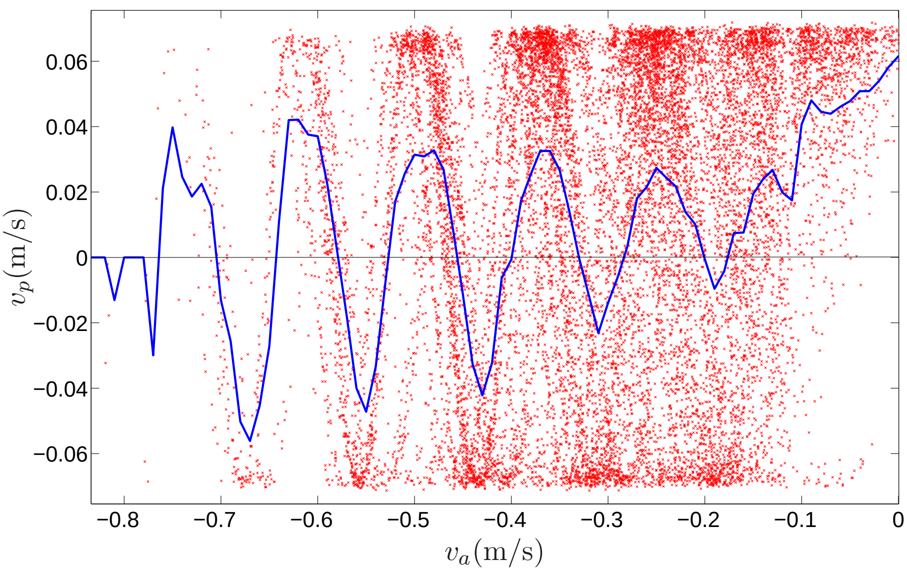

FIGURE 12 – Points (v_p,v_a) représentatifs des chocs et histogramme des vitesses plateau v_p pour une d'atterrissage v_a donnée.

Avec les données obtenues pour les 16041 chocs obtenus à $\Gamma = 1.83$ et $f = 40$ Hz, il également possible de voir s'il existe des corrélations entre la vitesse d'arrivée et la vitesse du plateau au choc, v_a^n et v_p^n. Sur la figure 12 sont placés les points représentatifs de chaque choc, ainsi que la valeur moyenne de v_p pour un intervalle $\Delta v_a = 0.01 m.s^{-1}$ de valeurs de v_a (histogramme).

En l'absence de corrélations, on pourrait s'attendre à ce que le terme $< v_a v_p >$ soit nul (formule (e)). En effet, on peut supposer qu'en régime chaotique, la bille pouvait rencontrer toutes les vitesses plateau possibles à vitesse d'arrivée donnée. Or, on observe dans l'expérience que les termes $\frac{-2\varepsilon}{1-\varepsilon} < v_a v_p >$ et $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < (v_p)^2 >$ ont la même importance relative. Il existe donc de fortes corrélations entre v_a et v_p.

Afin d'interpréter les résultats qui apparaissent sur la figure 12, il est nécessaire de considérer les différentes phases dans le mouvement du plateau. Pour une vitesse d'arrivée donnée, la bille a une probabilité plus grande de frapper le plateau lorsque celui-ci est à accélération nulle. Dans ce cas, la vitesse du plateau est extrémale. Ceci explique l'accumulation de points représentatifs des chocs correspondants à des vitesses plateau de $\pm 0.07\ m/s$. D'autre part, il existe un "effet d'ombre" (figure 13) : si la bille arrive avec une vitesse faible, elle ne peut frapper le plateau que dans une phase de montée. Ceci explique pourquoi les vitesses plateau observées pour des vitesses d'arrivée faibles ($v_a \in [-0.15; 0]\ m/s$) sont très majoritairement positives.

Enfin, on observe des oscillations de la vitesse plateau moyenne lorsque la vitesse d'arrivée augmente en valeur absolue. Ceci illustre les fortes corrélations entre la plateau et la bille. Ces oscillations sont périodiques de période $V = 0.125 m.s^{-1}$. Nous nous sommes aperçu que la période des oscillations était directement liée aux modes périodiques sous-jacents. En effet, lorsque la bille se trouve dans le mode 1, sa vitesse d'arrivée vaut nécessairement $v_a = \frac{g}{2f}$ (cf paragraphe 2.2). Ainsi à 40 Hz, $v_a = 0.123 m.s^{-1}$, soit la période V des oscillations observées. De nouvelles mesures ont montré que ces oscillations sont présentes quelque-soit la fréquence d'excitation f, et que leurs périodes correspondaient bien à la valeur $v_a = \frac{g}{2f}$.

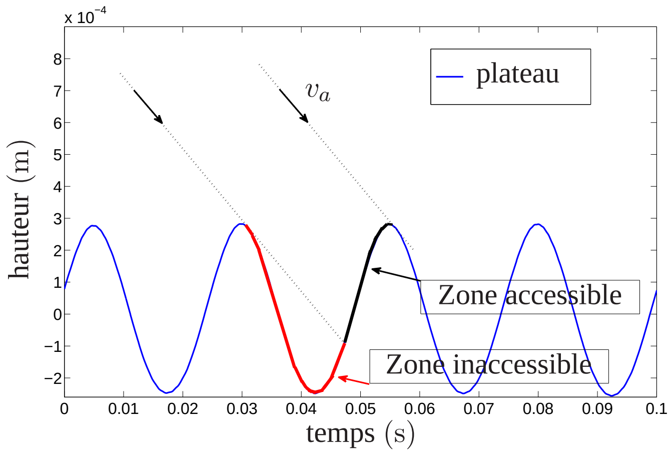

FIGURE 13 – Vitesses plateau accessibles par une bille arrivant à faible vitesse

3 Etude énergétique du système

Dans la seconde partie du stage, nous nous sommes attardés sur l'étude énergétique du système. Notre objectif était d'évaluer le rôle des corrélations entre le plateau et la bille, et d'étudier les distributions de probabilité en énergies et en gains d'énergie pour différentes formes de trajectoire du plateau.

Afin de pouvoir faire une étude plus poussée, nous avons usiné une plaque de PVC sur laquelle ont été fixés tous les objets composants le montage (pot vibrant et tiges qui maintiennent le capteur inductif et le tube guidant). Ceci nous a permis d'avoir un montage rigide (cf 14), et donc d'accéder à des accélérations élevées (jusqu'à 4 g), inaccessibles auparavant à cause des vibrations parasites. D'autre part, nous avons utilisé une plaque de verre plus épaisse pour le plateau, plus résistante mais aussi plus rigide. Nous avons donc ré-étalonné les capteurs et mesuré le nouveau coefficient de restitution $\varepsilon = 0.94$.

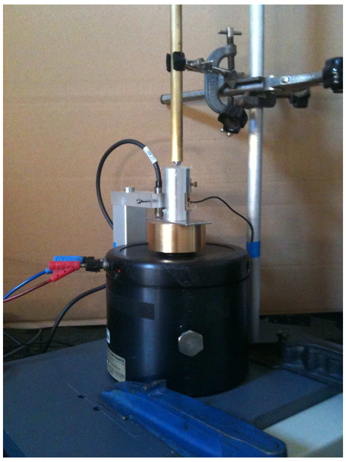

FIGURE 14 – Photo du montage expérimental

3.1 Influence des corrélations

Comme vu dans le paragraphe 2.5.2, il existe de fortes corrélations entre les mouvements du plateau et de la bille. Afin de connaitre l'influence de ces corrélations sur les répartitions énergétiques dans notre système (énergies, gains d'énergie, énergies injectées et dissipées), nous avons changé le mode d'excitation du plateau en créant de nouveaux signaux à envoyer au pot vibrant.

L'objectif était de faire disparaitre tout ou partie des corrélations qui apparaissent sur la figure 12. Pour cela, il était nécessaire de faire varier la fréquence du signal entre deux chocs consécutifs, afin que la bille frappe le plateau avec une phase Φ aléatoire. Dans un premier temps, nous avons créé un signal sinusoïdal avec une "phase glissante". Ainsi le signal envoyé au pot vibrant vérifiait $V(t) = A\, sin(\omega t + \Phi_n + (\Phi_{n+1} - \Phi_n)\frac{t-t_n}{2T})$, avec Φ_n, les phases aléatoires tirées dans $[0;\pi]$ et $t_n = 2nT$, les temps auxquels on change la phase. Cependant, ce signal présente des discontinuités au niveau des dérivées première (vitesse) et seconde (accélération). Etant donné la fonction de transfert du système pot vibrant/amplificateur, ces discontinuités créent des variations brusques dans l'amplitude du mouvement du plateau (cf figure 15). Avec ce type de signal, il n'est plus possible de définir le paramètre Γ d'accélération relative ou la vitesse maximale du plateau $A\omega$ étant donné que la fréquence et l'amplitude du signal ne sont plus constants. Dans cette configuration, la plage des vitesses plateau aux moments des chocs n'est plus limitée et il nous est difficile de comparer ces résultats à ceux obtenus avec une excitation purement sinusoïdale.

Nous avons donc créé un second signal avec une fréquence modulée dans une plage $f \in [30;40]Hz$. Toutes les périodes T (aux instants marqués par un carré rouge sur la figure 15, gauche), la fréquence est changée aléatoirement et l'amplitude du signal est adaptée (avec les relations de continuité et la fonction de transfert du système pot vibrant/amplificateur) pour assurer la continuité de la vitesse. Dans cette nouvelle configuration, la plage des vitesses plateau aux moments des chocs est mieux définie.

On peut tout de même comparer les résultats entre eux à vitesse quadratique moyenne du plateau ($< v_p^2 >$) fixée, dans la mesure où ce paramètre traduit les vitesses accessibles par le plateau.

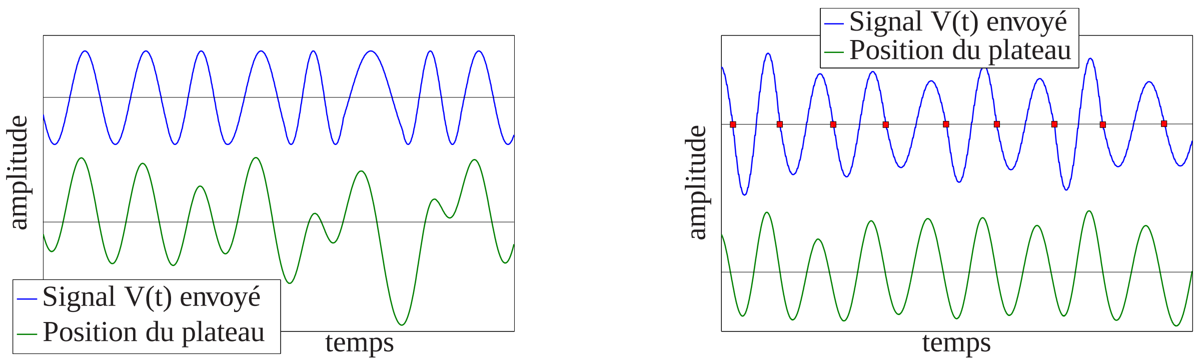

FIGURE 15 – Signaux envoyés au système pot vibrant/amplificateur et réponses du plateau en position. A gauche avec la construction en phase glissante, à droite avec la construction en modulation de fréquence.

Afin de vérifier la perte de corrélation, nous avons de nouveau tracé l'histogramme des vitesses plateau aux instants de chocs en fonction de la vitesse d'arrivée de la bille (cf figure 12, paragraphe 2.5.2). Dans les deux cas, les oscillations présentes précédemment (avec une excitation parfaitement sinusoïdale) ne sont plus présentes comme le montre la figure 16. Le bruit présent aux grandes vitesses d'arrivée est uniquement dû au manque de statistiques.

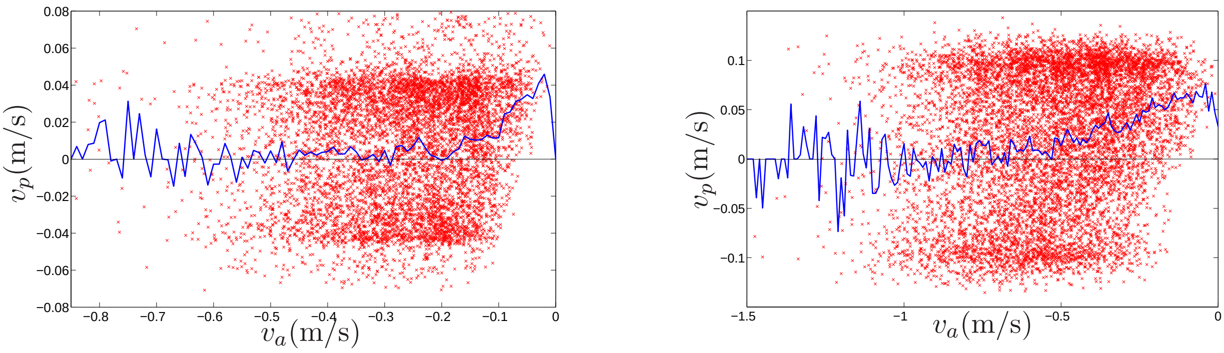

FIGURE 16 – Histogramme des vitesses plateau pour une d'atterrissage donnée avec une excitation sinusoïdale avec "phase glissante" (à gauche) et modulée en fréquence (à droite)

Dans les deux situations, il apparait une tendance commune de la vitesse plateau moyenne en fonction de la vitesse d'arrivée de la bille, qui était masquée sur la figure 12 : la vitesse plateau moyenne diminue, à partir d'une valeur positive, avec la vitesse d'arrivée. Cette tendance illustre clairement la stabilité du système dynamique étudié :

– lorsque la bille arrive avec une vitesse faible i.e. faible énergie, elle va frapper un plateau en phase de montée (en moyenne). Elle va donc gagner de l'énergie.
– en revanche, lorsque la bille arrive avec une vitesse élevée i.e. énergie élevée, elle va frapper un plateau immobile (en moyenne). Elle va donc perdre de l'énergie.

Le système est donc stationnaire (en moyenne, la bille perd autant d'énergie qu'elle n'en gagne) ; il est dissipatif et entretenu.

Afin d'observer l'influence possible des corrélations entre la bille et le plateau sur l'énergie de la bille, nous avons étudié l'énergie moyennée en temps $\left\langle \frac{E}{mg} \right\rangle_t = \frac{\sum_n E_n \Delta t_n}{\sum_n \Delta t_n}$ en fonction de la vitesse quadratique moyenne du plateau$< v_p^2 >$ dans les différents cas d'excitations (purement sinusoïdale (S), avec glissement de phase (GP), et avec modulation de fréquence (MF), cf figure 17).

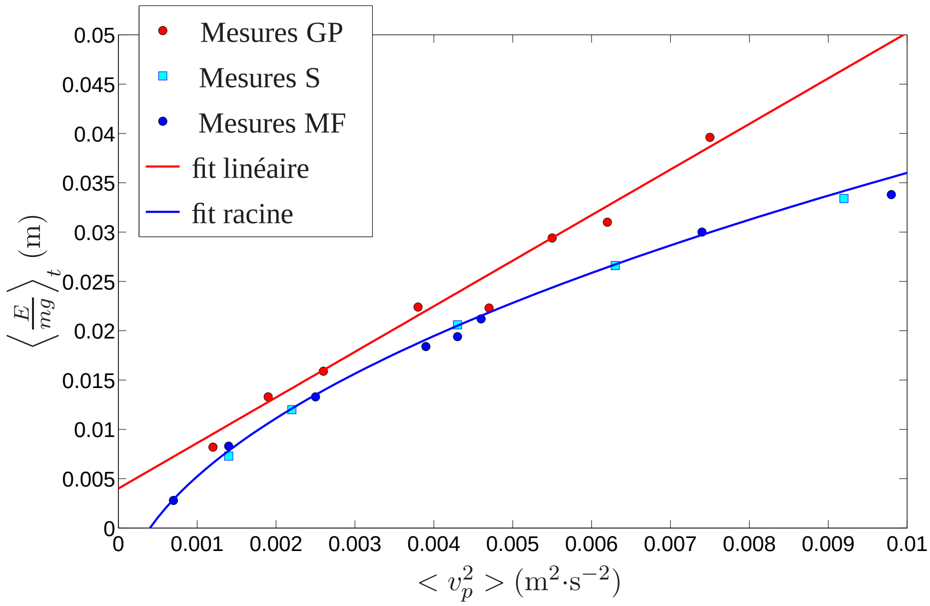

FIGURE 17 – Variations des énergies moyennes de la bille en fonction de la vitesse quadratique moyenne plateau pour différentes excitations (GP, S et MF). Fit linéaire (rouge) : $4.62 < v_p^2 > -0.04$. Fit racine (bleu) : $0.45\sqrt{< v_p^2 >} - 0.009$.

Il apparait une même tendance "en racine carrée" dans les cas S et MF alors que pour le cas GP, la relation semble affine. Or la théorie prévoit (loi (e), paragraphe 2.2) qu'en l'absence totale de corrélations entre le plateau et la bille ($< v_a v_p >= 0$) la relation soit linéaire ($\left\langle \frac{E}{mg} \right\rangle_t \propto < (v_a)^2 >$). La situation GP semble donc la plus proche de l'absence de corrélations ; on mesure une pente de $4.62 s^2.m^{-1}$ alors que la théorie prévoit $\frac{1+\varepsilon}{2g(1-\varepsilon)} = 2.01$. L'ordre de grandeur est le bon, mais l'ordonnée non nulle à l'origine confirme que le terme $< v_a v_p >$ n'est pas totalement nul.

Les comportements similaires dans les cas S et MF nous laissent penser que les oscillations ne jouent pas un rôle prépondérant. C'est surtout l'effet d'ombre et la probabilité de voir une vitesse montante plutôt que descendante qui semble gouverner l'énergie moyenne. Dans le cas MF, il n'existe pas d'excursions dans l'amplitude du plateau qui détruisent l'effet d'ombre comme dans le cas GP.

3.2 Comparaisons des deux excitations : S et MF

Afin de pouvoir comparer les deux excitations, nous avons travaillé à vitesse quadratique plateau moyenne fixée ($< v_p^2 >= 0.006 m^2.s^{-2}$). Dans les deux cas, nous avons effectué 6 acquisitions de 200 secondes et supprimé arbitrairement les mesures erronées (liées à une erreur de détection du choc, cf paragraphe 2.4.3) ; les statistiques ont été effectuées avec environ 9500 chocs dans les deux cas.

Afin de déterminer l'effet des corrélations entre la bille et le plateau sur le système, nous avons comparé les distributions en énergie de la bille dans les deux cas (figure 18). Afin de pouvoir situer ces énergies, nous avons placé les énergies spécifiques aux modes périodiques. Dans le mode n, le temps de vol vaut nT et l'énergie de la bille vérifie donc $E(n) = mg\,\frac{n^2 g}{8 f^2}$.

Les deux distributions sont semblables et présentent toutes les deux des pics. Ils ne sont donc pas dûs à des corrélations présentes entre le plateau et la bille mais plutôt à un manque de statistiques. Il est tout de même à noter que la probabilité chute aux niveaux des énergies des modes périodiques dans le cas MF. Ceci peut s'interpréter par l'impossibilité de la bille d'acquérir la vitesse spécifique au mode périodique.

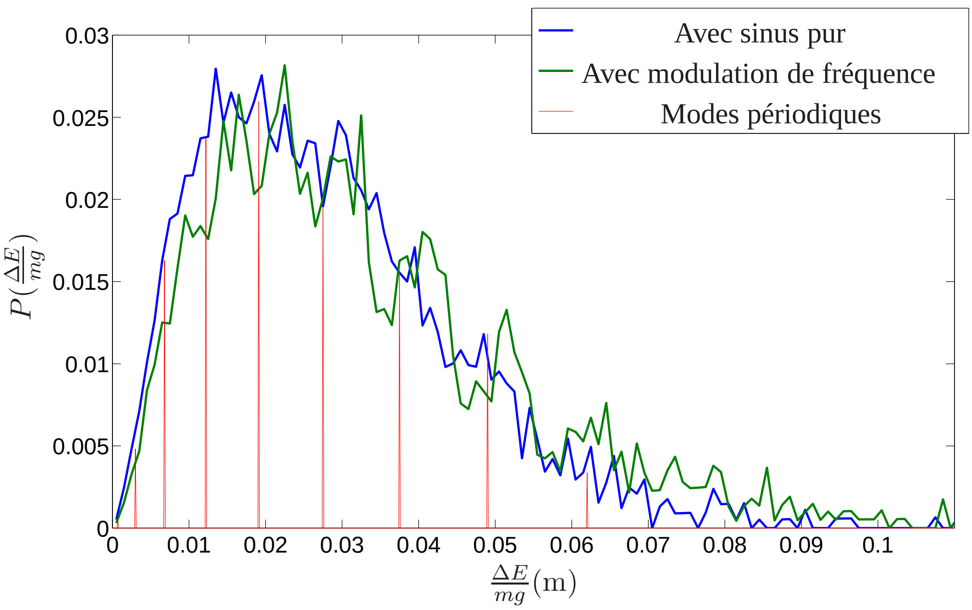

FIGURE 18 – Distributions de probabilité des énergies

Nous avons également observé l'auto-corrélation des énergies dans les deux cas (figure 19). L'échelle logarithmique montre clairement que la décroissance est exponentielle dans le cas MF, comme le prévoit la théorie selon $\rho(k) = exp(k.2ln(\varepsilon))$. La pente conduit à un coefficient de restitution $\varepsilon = 0.89 \pm 0.01$, inférieur à celui mesuré précédemment, mais l'ordre de grandeur est correct.

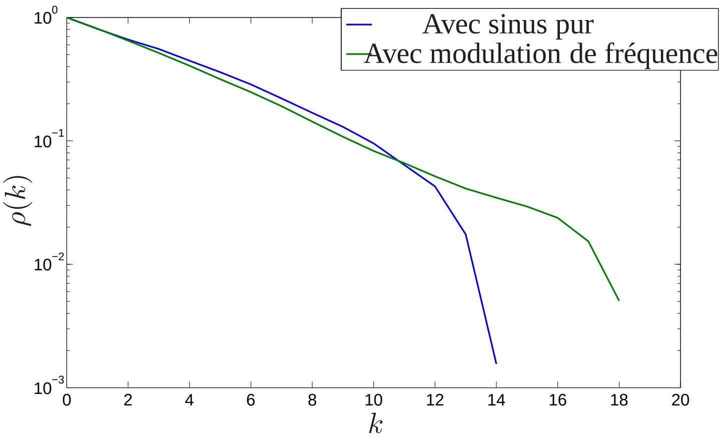

FIGURE 19 – Auto-corrélations comparées de l'énergie de la bille acquise après un choc (échelle logarithmique)

3.3 Energies injectées et dissipées à chaque choc

3.3.1 Théorie

A travers cette étude, nous avons considéré le système comme composé de deux parties distinctes :

– **une "pompe énergétique"** : La bille perd de l'énergie par choc inélastique sur le plateau (coefficient de restitution en vitesse $\varepsilon < 1$).
– **une "source énergétique"** : La bille peut prendre de l'énergie par transfert d'impulsion lors du choc avec le plateau en mouvement.

Ainsi, la bille se trouve dans un régime stationnaire. De ce point de vue, il est possible de calculer les énergies injectée et dissipée lors du choc n par un bilan simple. Avec les notations introduites précédemment, les énergies avant et après le choc n vérifient $E^n_{avant} = \frac{1}{2}m(v^n_a)^2 + mgh_n$ et $E^n_{apres} = \frac{1}{2}m(v^n_d)^2 + mgh_n$. De plus la loi de choc (c) prise au choc n donne $v^n_d - v^n_p = -\varepsilon(v^n_a - v^n_p)$.

Comme précédemment, on peut accéder au gain total (algébrique) d'énergie suite au choc n

$$\Delta E^n_{tot} = E^n_{apres} - E^n_{avant}$$

En prenant $\varepsilon = 1$, on considère que la bille ne perd pas d'énergie. Ceci permet de calculer l'énergie injectée lors du choc n,

$$\Delta E^n_{inj} = \left(E^n_{apres} - E^n_{avant}\right)_{\varepsilon=1} = 2mv^n_p(v^n_p - v^n_a)$$

On en déduit l'énergie dissipée lors du choc n

$$\Delta E^n_{dis} = \Delta E^n_{tot} - \Delta E^n_{dis} = \frac{1}{2}m(\varepsilon - 1)\Big((\varepsilon+1)(v^n_a)^2 - 2(\varepsilon+2)v^n_p v^n_a + (\varepsilon+3)(v^n_p)^2\Big)$$

Le préfacteur $(\varepsilon - 1)$ laisse clairement apparaitre que cette contribution est nulle dans le cas d'un choc élastique.

Ainsi, on va considérer que le plateau joue à la fois le rôle d'un "thermostat" qui fournit de l'énergie au système et d'une source de dissipation qui pompe de l'énergie du système. Le 'système' considéré ici étant la bille.

3.3.2 Résultats

Nous avons étudié les distributions de probabilités des différentes quantités ΔE^n_{tot}, ΔE^n_{inj} et ΔE^n_{dis} présentées ci-dessus dans le cas d'une excitation purement sinusoïdale et pour différentes accélérations relatives $\Gamma = 1.4,\ 1.70,\ 2.35,\ 2.86,\ 3.44$.

Pour chaque accélération relative, nous avons acquis les données relatives à environ 13000 chocs et nous avons supprimé les données erronées.

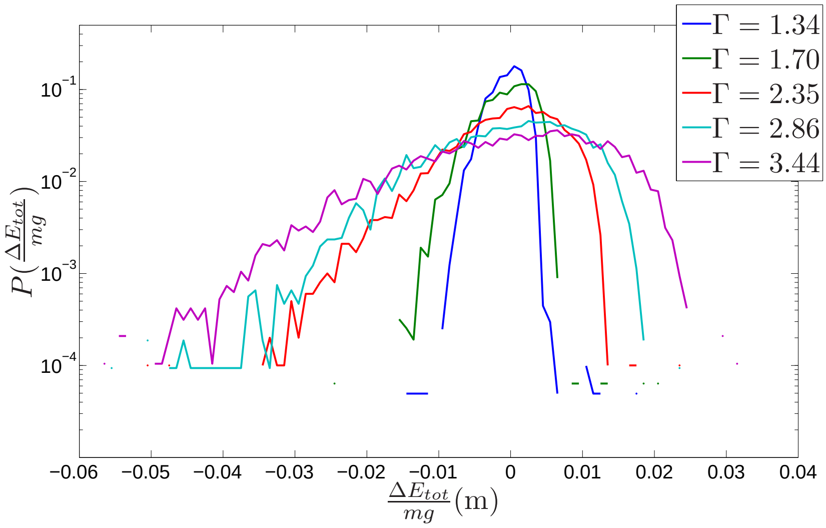

FIGURE 20 – Distributions de probabilité des incréments d'énergie totale (échelle logarithmique)

Sur la figure 20 sont représentées les distributions de probabilité des incréments d'énergie totale. Lorsque la valeur de Γ augmente, la distribution devient clairement dissymétrique. L'aile correspondant aux pertes d'énergies devient alors relativement importante. Cela traduit la possibilité pour la bille de perdre beaucoup d'énergie lors d'un choc, cela n'étant possible que si la bille avait au préalable une énergie élevée.

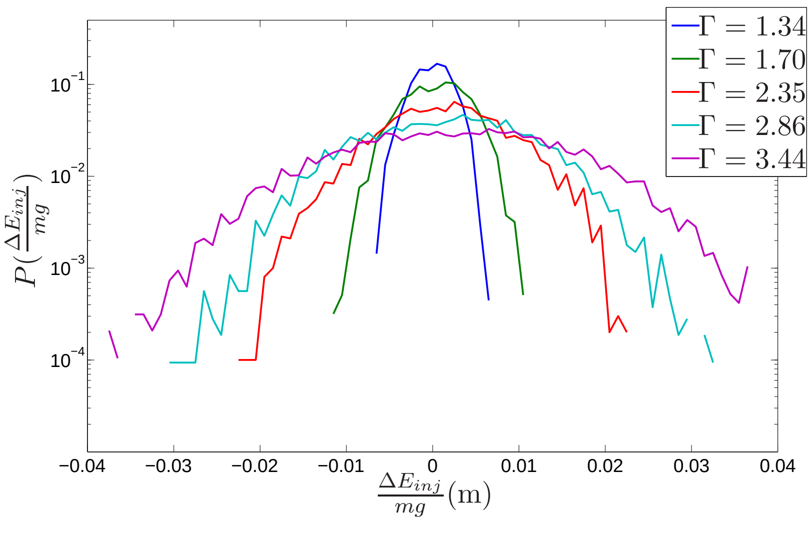

FIGURE 21 – Distributions de probabilité des incréments d'énergie injectée (échelle logarithmique)

Sur la figure 21 sont représentées les distributions de probabilité des incréments d'énergie injectée. L'énergie injectée au cours d'un choc par transfert d'impulsion peut être positive ou négative selon si le plateau est en phase de montée ou de descente au moment du choc. Les distributions sont quasiment gaussiennes ; la médiane et la variance augmentent avec Γ. En effet, lorsque Γ augmente, le bille peut perdre ou gagner davantage d'énergie. Quelle que soit Γ, la distribution est presque symétrique, avec une médiane positive. On peut donc considérer que le système est soumis à un bon thermostat.

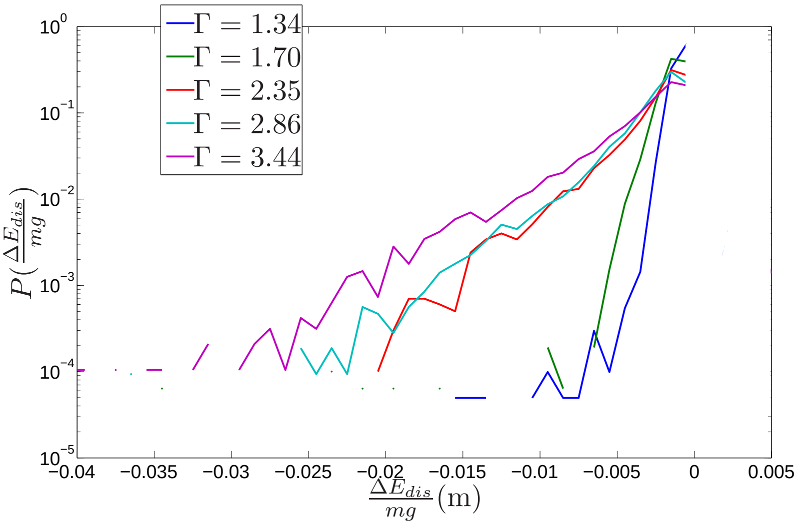

FIGURE 22 – Distributions de probabilité des incréments d'énergie dissipée (échelle logarithmique)

Enfin, les distributions de probabilité des incréments d'énergie dissipée sont représentées sur la figure 22. L'énergie dissipée lors d'un choc est toujours négative (algébriquement) car le choc est inélastique. Quelle que soit Γ, la distribution suit une loi exponentielle probablement liée au mode de dissipation. Là encore, l'énergie dissipée lors d'un choc peut être plus importante lorsque la bille chute plus rapidement (i.e. à grand Γ).

Conclusion

Lors de ce stage, nous avons porté un regard différent sur le problème classique d'une bille rebondissant sur un plateau vibrant.

Nous avons pu vérifier les différentes lois classiques relatives aux rebonds d'une bille sur un plateau en mouvement sinusoïdal, ainsi que la loi de choc en vitesses, y compris dans les régimes chaotiques. Grâce aux mesures effectuées, nous avons pu obtenir les distributions en énergies et en gains d'énergie de la bille. D'autre part, nous avons pu observer, caractériser et interpréter les corrélations qui apparaissent entre les mouvements de la bille et du plateau.

Enfin, nous avons pu étudier le système dissipatif en considérant que les échanges d'énergie sont le fait de deux contributions distinctes : une source et une dissipation. Nous avons montré la faisabilité de l'expérience. Il ne reste aujourd'hui qu'à accumler des données en grand nombre pour pouvoir comparer et interpréter les résultats dans un cadre théorique. Les lois relatives aux systèmes dynamiques donnent des relations sur les ditributions de probabilité en gains d'énergie. Ainsi, la distribution en énergie gagnée sur une durée τ , très grande devant les temps caractéristiques du système, doit vérifier, sous couvert de certaines conditions, la loi $p_\tau(\Delta E) = exp(-\tau f(\frac{\Delta E}{\tau}))$, où f est la fonction de grande déviation. Cette fonction doit satisfaire la relation $f(w) - f(-w) = \lambda w$ avec $w = \frac{\Delta E}{\tau}$. Nous avons commencé à étudier cette relation sans toutefois pouvoir la vérifier ou la rejeter, par manque de statistiques.

Cette étude va être poursuivie dans les prochains mois, je suivrais donc avec attention son évolution et les résultats obtenus.

Références

[1] P. Pieranski, "Direct evidence in the suppression of period doubling in the bouncing ball problem", *Physical Review A* **Volume 37, Number 5** (1988)

[2] Z.J. Kowalik, M. Franaszek and P. Pieranski, "Self-reanimating chaos in the bouncing ball system", *Physical Review A* **Volume 37, Number 10** (1988)

[3] J. Barroso, M.V. Carneiro and E.N. Macau, "Bouncing ball problem : Stability of the periodic modes", *Physical Review E* **79, 026206** (2009)

[4] W. Losert, D.G.W. Cooper, J. Delour, A. Kudrolli and J.P. Gollub, "Velocity statistics in excited granular media", *CHAOS* **Volume 9, Number 3** (1999)

[5] J.S. Olafsen and J.S. Urbach, "Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer", *Physical Review Letters* **Volume 81, Number 20** (1998)

[6] S. Warr, W. Cooke, R.C. Ball and J.M. Huntley, "Probability distribution functions for a single-particle vibrating in one dimension : Expérimental study and theoretical analysis", *Physica A* **231 :551** (1996)

[7] J.C. Geminard and C. Laroche, "Energie of a single bead bouncing on a vibrating plate : Experiments and numerical simulations", *Physical Review E* **Volume 68, 031305** (2003)