

LES VERRES DE SPINS ET LA FORMULE DE PARISI

JEAN-CHRISTOPHE MOURRAT

La mécanique statistique vise à modéliser les propriétés émergentes des systèmes constitués d'un grand nombre d'éléments. On peut penser à un gaz composé de nombreuses petites particules, ce qui donne lieu à des concepts macroscopiques tels que la densité, la pression ou la température du gaz. Cet article porte sur une classe de modèles de mécanique statistique appelés *verres de spins*. La caractéristique essentielle de ces modèles est qu'il y a beaucoup de « désaccord » entre les unités élémentaires du système, ces modèles ayant pour but de capturer certains traits essentiels des systèmes « complexes ». Les verres de spins ont inspiré de nombreux développements dans divers domaines, notamment les statistiques, l'informatique, la géométrie en haute dimension, ou la combinatoire, et de nombreux aspects de ces modèles ont été étudiés. Notre principal objectif ici est de discuter de certaines des idées liées à un résultat fondamental appelé la formule de Parisi, qui identifie l'énergie libre limite de certains de ces modèles. L'énergie libre est une quantité naturelle du point de vue de la physique, et peut être considérée comme une transformée de Laplace des variables d'intérêt, de sorte que l'identification de sa limite donne de riches informations sur le comportement du modèle. Nous discuterons également d'une connexion intrigante entre la formule de Parisi et certaines équations aux dérivées partielles, et comment ce lien pourrait aider à résoudre certains problèmes ouverts.

Dans la première section de cet article, nous faisons connaissance avec l'un des modèles les plus basiques de verre de spins appelé le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, et nous voyons quelles caractéristiques de ce modèle en font effectivement un verre de spins. La section 2 présente la formule de Parisi en tant que telle ; nous discutons également de l'idée cruciale selon laquelle le support de la mesure de Gibbs associée est approximativement ultramétrique. Dans la section 3, nous abordons les extensions à des modèles plus généraux, et présentons un exemple appelé le modèle biparti, qui est actuellement moins bien compris. Dans la section 4, nous esquissons comment reformuler la formule de Parisi en utilisant certaines équations aux dérivées partielles, ainsi que quelques résultats partiels concernant le modèle biparti.

Cet article contient un certain nombre de notes de bas de page et d'encadrés de texte. Il s'agit de digressions ou de discussions plus techniques que vous pouvez librement ignorer si vous le souhaitez. Lire jusqu'à la fin de la section 2 devrait vous donner une bonne idée de ce qu'est la formule de Parisi, et vous pouvez décider de vous arrêter là. Les sections restantes se rapportent plus directement à mes activités de recherche récentes.

1. LE MODÈLE DE SHERRINGTON-KIRKPATRICK

Pour mieux comprendre ce que sont les verres de spins, introduisons un exemple paradigmatique appelé le modèle de Sherrington-Kirkpatrick (SK) [19]. Il peut être utile d'imaginer que nous sommes confrontés à la situation suivante. Supposons que nous ayons N individus $\{1, \dots, N\}$ que nous devons diviser en deux groupes. Nous pouvons représenter une assignation en deux groupes par un vecteur $\sigma \in \{\pm 1\}^N := \{-1, 1\}^N$, où σ_i indique à quel groupe est assigné l'individu indexé par i . Pour chaque paire (i, j) , on nous donne un nombre W_{ij} qui représente à quel point l'individu i s'entend bien avec

l'individu j ; il est positif et très grand si l'individu i aime beaucoup l'individu j , tandis qu'il est très négatif si l'individu i n'aime vraiment pas l'individu j . Nous voulons chercher une assignation $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ qui maximise la quantité suivante :

$$(1.1) \quad H_N(\sigma) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N W_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Il aurait peut-être été plus naturel d'écrire $\mathbf{1}_{\sigma_i=\sigma_j}$ à la place de $\sigma_i \sigma_j$, mais comme $\mathbf{1}_{\sigma_i=\sigma_j} = \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + 1)$, ce choix est sans importance¹. La normalisation $\frac{1}{\sqrt{N}}$ sera pratique plus tard.

On peut rapidement se rendre compte que trouver une configuration $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ qui réalise le maximum de H_N n'est pas chose facile. Même lorsqu'on ne considère que trois individus i, j et k , on peut se retrouver dans une situation comme celle représentée à la figure 1.1 : peut-être que $W_{ij} + W_{ji} > 0$ et $W_{ik} + W_{ki} > 0$, ce qui suggérerait d'assigner i, j et k au même groupe ; mais si $W_{jk} + W_{kj} < 0$, alors les individus j et k préféreraient être dans des groupes différents, et il n'y a aucun moyen de concilier toutes les préférences.

En d'autres termes, certaines paires seront typiquement *frustrées*. Pour trouver la configuration optimale, il faut faire des compromis, et une inspection minutieuse des coefficients (W_{ij}) est nécessaire. De manière plus générale, pour N grand, les stratégies naïves et rapides² pour trouver une configuration σ telle que $H_N(\sigma)$ soit grand se retrouveront généralement bloquées dans un maximum local de la fonction H_N , et échoueront à atteindre le véritable maximiseur. La présence de ces frustrations, et le fait relié que les méthodes simples échouent généralement à trouver la configuration maximisante, sont les caractéristiques des systèmes *vitreux*. La façon dont cela se rapporte au verre de notre quotidien est discutée dans l'encadré 1.1. Les variables $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ sont souvent appelées *spins*, car une grande partie de la mécanique statistique s'est concentrée sur la modélisation des matériaux magnétiques, et le modèle est donc appelé un *verre de spins*.

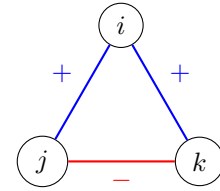


FIGURE 1.1 – Une situation simple de frustration. Ici, les coefficients (W_{ij}) suggèrent de fixer $\sigma_i = \sigma_j$, $\sigma_i = \sigma_k$, et $\sigma_j = -\sigma_k$, mais il est impossible de réaliser ces trois conditions simultanément.

Encadré 1.1. Pourquoi le mot « verre » pour ces modèles ?

Pour créer du verre, on commence par chauffer de la silice (c'est-à-dire du sable) et un peu de carbonates de calcium et de sodium (c'est-à-dire de la chaux et de la soude) jusqu'à ce qu'ils fondent. Un aspect clé de la fabrication du verre est que le mélange liquide doit ensuite être refroidi rapidement (« trempé » est le terme technique), afin de « piéger » la configuration microscopique dans un état désordonné hérité de la phase liquide. Après la trempe rapide, le matériau tente indéfiniment d'évoluer lentement vers son état organisé énergétiquement plus favorable, mais rencontre des configurations localement frustrées de plus en plus difficiles à surmonter. Dans ce cas, les frustrations et la dynamique lente émergent de la géométrie complexe de la configuration des particules.

1. Une des raisons pour lesquelles on définit le modèle en utilisant $\sigma_i \sigma_j$ à la place de $\mathbf{1}_{\sigma_i=\sigma_j}$ a à voir avec d'autres motivations provenant de la modélisation des matériaux magnétiques. D'un point de vue purement mathématique, il est également plus agréable de penser à H_N comme une fonction polynomiale de σ , que l'on peut considérer comme étant définie partout dans $\mathbb{R}^N$ plutôt que seulement sur $\{\pm 1\}^N$. Un autre petit point est que je trouve légèrement plus pratique pour la suite de ne pas supposer que W_{ij} est égal à W_{ji} , mais c'est également un détail.

2. Par exemple, tant qu'il y a un indice i tel que changer σ_i en $-\sigma_i$ fait augmenter H_N , on cherche l'indice qui réalise la plus grande différence, et on itère.

Les coefficients conflictuels (W_{ij}) dans le modèle SK le rendent beaucoup plus abordable analytiquement que tout modèle qui essaierait réellement d'être fidèle au « désordre géométrique » d'un véritable verre, mais on espère que les deux contextes partagent certaines propriétés qualitatives.

En lien avec la présence nécessaire de ces frustrations, on peut montrer que le problème, étant donné les coefficients (W_{ij}) , de trouver une configuration $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ qui maximise H_N , est en général NP-difficile. En fait, le problème est NP-difficile même si l'on vise seulement à trouver une configuration $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ telle que $H_N(\sigma)$ soit au moins une fraction positive fixée de la valeur maximale, quel que soit la fraction autorisée [1]. Nous nous éloignerons cependant de ce type d'analyse du pire cas, en nous concentrant plutôt sur ce à quoi ressemble une instance « typique » du problème. Il existe sûrement différentes façons de clarifier ce que « typique » signifie ici, mais nous choisissons de postuler que les coefficients $(W_{ij})_{i,j \leq N}$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyenne nulle et de variance égale à 1. L'hypothèse clé ici est qu'elles sont indépendantes et ont toutes la même moyenne et variance ; l'hypothèse qu'elles sont gaussiennes est une commodité, mais ne changerait pas les propriétés fondamentales qui seront discutées ci-dessous.

En résumé, on se donne $(W_{ij})_{i,j \geq 1}$ des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variance 1, on définit H_N selon (1.1), et on cherche à étudier des quantités telles que

$$(1.2) \quad \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} H_N(\sigma),$$

dans la limite où N devient grand. Plus généralement, on s'intéresse à comprendre la géométrie de la fonction H_N , par exemple en vue de trouver des configurations σ qui réalisent essentiellement le maximum dans (1.2). Une manière particulièrement fructueuse d'explorer cela est de considérer une famille de mesures de probabilité associées à H_N , appelées *mesures de Gibbs* ; voir également l'encadré 1.2. Dans notre contexte, étant donné un paramètre $\beta \geq 0$, la mesure de Gibbs à « température inverse » β est la mesure de probabilité qui attribue à chaque $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ une probabilité proportionnelle à $\exp(\beta H_N(\sigma))$.³ Pour chaque valeur de $\beta \geq 0$, cette mesure de probabilité se concentre essentiellement sur un ensemble de niveau de H_N , en ce sens que H_N/N est essentiellement constant sous la mesure de Gibbs ; et à mesure que β augmente, la mesure se concentre de plus en plus sur les configurations qui réalisent quasiment le maximum de H_N . Pour comprendre cette famille de mesures de Gibbs, il est très utile d'élucider le comportement de la quantité

$$(1.3) \quad F_N(\beta) := \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \exp(\beta H_N(\sigma)).$$

L'espérance $\mathbb{E}$ est prise par rapport à l'aléa provenant des coefficients (W_{ij}) . La quantité $F_N(\beta)$ est généralement appelée l'*énergie libre* du système⁴. Comprendre cette quantité ou ses généralisations est très riche en informations concernant la mesure de

3. Les physiciens préfèrent ajouter un signe négatif ici, en écrivant $\exp(-\beta H_N(\sigma))$ au lieu de $\exp(\beta H_N(\sigma))$, mais comme les lois de H_N et $-H_N$ sont identiques, cela n'a pas vraiment d'importance et je préfère éviter la prolifération des signes négatifs. Le léger inconvénient de cette convention est que le système a maintenant une préférence pour les *grandes* valeurs de H_N , tandis que les physiciens préfèrent penser que la fonction d'énergie H_N doit être minimisée.

4. même si les physiciens préféreraient diviser F_N par β et ajouter un signe négatif (qui vient compenser celui qu'ils mettraient dans l'exponentielle) avant de l'appeler ainsi.

Gibbs associée⁵. Pour les mathématiciens, nous pouvons le comprendre intuitivement en la considérant comme une sorte de transformée de Laplace de la fonction H_N ; nous pouvons également voir, par exemple, que la dérivée de F_N par rapport à β nous donne accès à la moyenne de H_N sous la mesure de Gibbs, moyennée également par rapport aux coefficients (W_{ij}) . Nous pouvons alternativement considérer $F_N(\beta)$ comme une version « lissée » du maximum (1.2), de sorte que ce maximum est approximativement $F_N(\beta)/\beta$ si l'on prend β suffisamment grand⁶.

Encadré 1.2. Mesures de Gibbs

On peut se borner à considérer les mesures de Gibbs comme des outils mathématiques utiles pour explorer les ensembles de niveaux de H_N , mais lorsque H_N représente la fonction d'énergie d'un système physique réel, on peut argumenter, à partir de principes fondamentaux, qu'à l'équilibre dans un environnement à température inverse β , le système sera effectivement distribué selon cette mesure. En fait, il s'agit d'un phénomène général qui peut également apparaître dans des contextes purement mathématiques. Par exemple, supposons qu'il y ait des variables $x_1, \dots, x_N$ prenant des valeurs dans un ensemble fini $\{e_1, \dots, e_K\}$, disons avec $e_1 < \dots < e_K$, et soit $\bar{e} \in (e_1, e_K)$. À quoi ressemble l'une des variables, disons x_1 , si N est très grand et si nous choisissons le vecteur $(x_1, \dots, x_N)$ de manière uniforme parmi tous ceux qui satisfont $N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i \simeq \bar{e}$? (Ici, on écrit $\simeq$ pour permettre une certaine marge de manœuvre afin de s'assurer qu'il existe de tels vecteurs ; par exemple, on peut demander que la différence entre les termes de chaque côté de $\simeq$ soit au plus ε_N , avec $\varepsilon_N \rightarrow 0$ et $N\varepsilon_N \rightarrow +\infty$ lorsque N tend vers l'infini.) On peut montrer que lorsque N tend vers l'infini, la probabilité que $x_1 = e_k$ est proportionnelle à $\exp(-\beta e_k)$, où β est tel que

$$(1.4) \quad \frac{\sum_{k=1}^K e_k \exp(-\beta e_k)}{\sum_{k=1}^K \exp(-\beta e_k)} = \bar{e}.$$

En d'autres termes, asymptotiquement, lorsque N tend vers l'infini, la loi de x_1 converge faiblement vers la mesure de Gibbs à température inverse β , où β est défini par (1.4). On peut par exemple consulter [5, Section 1.1] pour plus de détails à ce sujet et sur la relation entre la mesure de Gibbs, l'énergie libre, et l'entropie de la mesure de Gibbs.

Il n'est pas très difficile de montrer que la quantité dans (1.2), et donc aussi celle dans (1.3), restent dans un compact de $(0, +\infty)$ lorsque N tend vers l'infini⁷. Peut-on déterminer les limites de ces quantités ? Malgré une introduction un peu longue, j'espère que vous conviendrez de la relative simplicité de la question. Pourtant, il se trouve que la réponse à cette question est incroyablement riche et complexe.

2. LA FORMULE DE PARISI

Un premier candidat pour la limite de l'énergie libre $F_N(\beta)$ a été proposé par les physiciens qui ont introduit le modèle [19], mais ils avaient déjà compris que la réponse proposée ne pouvait pas être valide pour de grandes valeurs de β , c'est-à-dire à basse

5. La mesure de Gibbs dépend elle-même de la réalisation des coefficients aléatoires (W_{ij}) , et on espère décrire des propriétés typiques par rapport à ce tirage, ou des propriétés en moyenne.

6. L'élément essentiel pour justifier ce point est de montrer que ce maximum est proche de son espérance, voir par exemple [5, Exercices 6.2 et 6.3].

7. Vous pouvez essayer ! Voici quelques indices. Pour la borne supérieure, on peut observer que pour chaque $\sigma \in \{\pm 1\}^N$, la variable aléatoire $H_N(\sigma)$ est une gaussienne centrée de variance N , donc on peut facilement estimer la probabilité que $H_N(\sigma)$ soit au-dessus de CN pour chaque σ individuellement. Pour la borne inférieure, on peut se baser sur une procédure « greedy » naïve dans laquelle, en supposant avoir déjà choisi $\sigma_1, \dots, \sigma_i$, on choisit σ_{i+1} de manière à maximiser la partie de H_N qui ne concerne que $\sigma_1, \dots, \sigma_{i+1}$, puis en itérant sur i .

température. Dans l'une de ses contributions les plus célèbres, Giorgio Parisi a ensuite élaboré une procédure sophistiquée non rigoureuse, appelée la méthode des répliques, qui a conduit à ce qui est maintenant appelé la *formule de Parisi* [14, 15, 16, 17]. Cette formule est décrite en détail dans l'encadré 2.1 ; ici, nous nous contentons du fait qu'elle prend la forme suivante :

$$(2.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\beta) = \inf_{\mu \in \text{Pr}([0,1])} \mathcal{P}(\mu),$$

pour une certaine fonctionnelle $\mathcal{P}$, où $\text{Pr}([0,1])$ désigne l'espace des mesures de probabilité sur $[0,1]$.

Encadré 2.1. La formule de Parisi en détail

La formule de Parisi stipule que

$$(2.2) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(\beta) = \inf_{\mu \in \text{Pr}([0,1])} \left(\Phi_\mu(0,0) - \beta^2 \int_0^1 t \mu([0,t]) dt + \log(2) \right),$$

où $\Phi_\mu : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution de l'équation parabolique rétrograde

$$(2.3) \quad \begin{cases} -\partial_t \Phi_\mu(t,x) = \beta^2 \left(\partial_x^2 \Phi_\mu(t,x) + \mu([0,t]) (\partial_x \Phi_\mu(t,x))^2 \right) & \text{pour } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}, \\ \Phi_\mu(1,x) = \log \cosh(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il y a différentes sortes d'arguments non rigoureux. Certains n'ont pas tous les ε et δ ou négligent certains termes ennuyeux mais vraisemblablement négligeables, mais la plupart des mathématiciens les trouvent plutôt convaincants. Les techniques de Giorgio Parisi étaient d'une nature assez différente, voir l'encadré 2.2. En fait, la communauté des physiciens était initialement loin d'être unanime sur la validité de sa prédiction. Outre la nature assez créative des arguments impliqués, une partie du scepticisme initial pouvait provenir du fait que la formule de Parisi se présente comme un problème de minimisation, comme indiqué dans (2.1). Pour chaque N fixé, l'énergie libre peut être réécrite comme un suprémum sur des mesures de probabilité d'un terme d'« énergie » et d'un terme d'« entropie »⁸ ; une fois qu'on s'en familiarise, cette formulation est très intuitive. On pourrait alors s'attendre à ce que la tâche d'identifier la limite de l'énergie libre se réduise à comprendre comment simplifier cette représentation dans la limite où N tend vers l'infini, tout en conservant la structure principale en suprémum. Pourtant, la formule (2.1) prédit plutôt un infimum⁹.

Encadré 2.2. La méthode des répliques

La méthode des répliques cherche à exploiter le fait que $\log x = \lim_{n \rightarrow 0} (x^n - 1)/n$ ainsi que le calcul de ce qui, dans notre contexte, prend la forme

$$(2.4) \quad \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \right)^n \right],$$

où n est un entier positif. L'avantage de travailler avec un entier n est que nous pouvons alors développer la puissance et réécrire l'expression dans (2.4) comme une somme sur

8. Bien que nous n'ayons pas expliqué cela en détail dans l'encadré 1.2, l'énergie libre et l'entropie sont en relation de dualité convexe ; voir aussi [5, (1.14)] et [2, Corollaires 4.14 et 4.15] pour plus de détails.

9. Par ailleurs, au cours du calcul par la méthode des répliques comme expliqué dans l'encadré 2.2, c'est d'abord un problème de maximisation apparaît, qui est ensuite transformé en un problème de minimisation lorsque l'entier strictement positif n devient inférieur à 1, sans beaucoup d'explications hormis le fait que l'on obtiendrait sinon quelque chose d'absurde. Je ne peux pas m'empêcher de mentionner qu'une réécriture de la formule de Parisi sous forme de suprémum a récemment été obtenue dans [10].

n copies de la variable σ d'une espérance que nous pouvons calculer ; les n variables prenant des valeurs dans $\{\pm 1\}^N$ sont généralement appelées « répliques » (on utilisera ce mot dans un sens légèrement différent plus bas). Cette méthode des répliques était déjà utilisée dans l'article qui a introduit le modèle [19] ainsi que dans d'autres travaux antérieurs ; un bref historique en est donné dans [18, Appendix]. Giorgio Parisi a créé l'art subtil de faire tendre n vers zéro au cours du calcul de la bonne manière pour arriver à la bonne réponse pour la limite de l'énergie libre. Pour donner un aperçu des manipulations impliquées, voici une citation (traduite ici) tirée de son intervention pour le prix Nobel [18]. « Après de nombreux essais, j'ai eu une intuition : dans d'autres articles, les n indices étaient divisés en n/m groupes de m éléments chacun [...]. Tout le monde supposait que m était un entier [...]. J'ai fait l'hypothèse audacieuse que m pouvait être un nombre non entier, plus précisément un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, je divisais les n répliques en $2n$ groupes de $1/2$ réplique chacun. Bien sûr, c'est fou, mais mon point de vue était que je devais d'abord vérifier si cette idée folle conduisait à des résultats corrects et remettre d'autres questions à plus tard. [...] À la fin de l'article, j'ai ajouté l'observation qu'on pouvait améliorer la théorie en divisant les n/m groupes en $(n/m)/m_1$ groupes de répliques, où m_1 était un nouveau paramètre variationnel. Je conjecturais aussi que la solution correcte était obtenue lorsque la procédure était répétée un nombre infini de fois. Quelques arguments de théorie des groupes sophistiqués ont aussi été ajoutés, soutenant que le groupe de permutations de zéro objets est un groupe infini parce qu'il se contient lui-même en tant que sous-groupe propre. [...] La réponse du relecteur fut remarquable. En résumé : *L'approche n'a pas de sens, mais les nombres provenant des formules sont raisonnables, donc cela peut être publié. La dernière observation ne vaut pas le papier sur lequel elle est écrite et devrait être supprimée.* J'ai ri parce que pendant ce temps, j'avais étendu le calcul à un nombre infini de subdivisions ». Ce dernier calcul conduit à ce que nous appelons maintenant la formule de Parisi.

Des travaux ultérieurs de physiciens ont ensuite élucidé une multitude de nouvelles informations qui étaient cohérentes avec la formule (2.1) [7]. Ils ont découvert que, dans la limite où N tend vers l'infini (et à part pour des choix de (W_{ij}) de faible probabilité), la mesure de Gibbs associée possède une structure hiérarchique très complexe mais aussi très précise, et que la mesure minimisante dans (2.1) la décrit entièrement. Un aspect clé de cette description est que, lorsque N devient très grand, la mesure de Gibbs est essentiellement supportée sur un ensemble ultramétrique ; voir la figure 2.1 pour plus de détails.

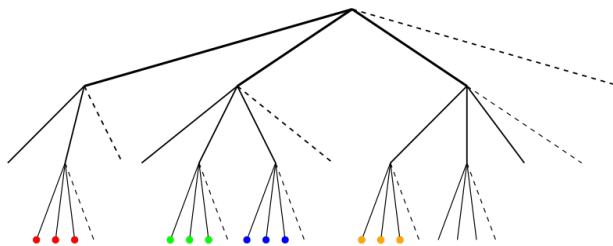


FIGURE 2.1 – Hormis pour des choix de (W_{ij}) de faible probabilité et pour N assez grand, les tirages aléatoires suivant la mesure de Gibbs se comportent essentiellement comme s'ils étaient échantillonnés à partir d'un espace ultramétrique. Un espace ultramétrique peut être encodé sur les feuilles d'un arbre comme dans l'image ci-dessus, où les points bleus sont à la même distance les uns des autres ; eux-mêmes sont tous à la même distance de tout point vert ; les points bleus, verts et oranges sont tous à la même distance de tout point rouge, etc.

Cette série de découvertes a suscité beaucoup d'enthousiasme ; les gens avaient identifié un modèle jouet d'un système « complexe », avec un paysage énergétique très riche et vallonné, qu'ils pouvaient étudier avec une grande précision à l'aide de méthodes analytiques. Pourtant, comme le dit Giorgio Parisi [18] (traduit ici), « il était possible que la solution correcte soit différente et plus complexe [...]. Il était difficile de conclure de manière définitive. » La validité de la formule de Parisi est ensuite devenue une certitude grâce à une série de contributions mathématiques rigoureuses. Francesco Guerra [6] a d'abord montré que $\limsup_{N \rightarrow \infty} F_N(\beta) \leq \inf_{\mu \in \text{Pr}([0,1])} \mathcal{P}(\mu)$. Par un tour de force mathématique, Michel Talagrand [20] a ensuite réussi à prouver la borne inverse et a ainsi obtenu une preuve complète de la formule de Parisi¹⁰. Une preuve alternative qui couvre une classe plus large de modèles a ensuite été développée par Dmitry Panchenko [12, 13]. Outre sa plus grande généralité, cette preuve alternative est également plus conceptuelle, et son étape clé est très intéressante en soi, car elle consiste à justifier l'ultramétrie de la mesure de Gibbs sous-jacente (à une petite perturbation de la fonction d'énergie près).

3. VERS DES MODÈLES PLUS GÉNÉRAUX

Grâce aux perspectives issues de la formule de Parisi et de sa démonstration, ainsi qu'aux développements ultérieurs, on comprend désormais de nombreux aspects du modèle de Sherrington-Kirkpatrick et de la structure de ses mesures de Gibbs. Par exemple, des progrès récents ont été réalisés sur la question de savoir s'il est possible de trouver un algorithme en temps polynomial qui identifie une configuration $\sigma \in \{\pm 1\}^N$ qui maximise essentiellement la fonction H_N . Les connaissances acquises pour le modèle SK ont également permis de progresser sur une grande variété d'autres problèmes « complexes » qui partagent des caractéristiques similaires avec des « frustrations », allant des statistiques et de la géométrie en haute dimension à l'informatique et la combinatoire.

Dans cette présentation, je vais mettre l'accent sur une généralisation apparemment modeste du modèle SK dans laquelle les variables sont de deux types différents. Nous pouvons visualiser cela en imaginant les variables organisées en deux couches comme illustré à la figure 3.1, chaque couche étant constituée de variables d'un seul type ; nous postulons maintenant qu'il n'y a que des interactions directes entre les variables de types différents. Je trouve ce modèle intéressant entre autres car il est lié à plusieurs modèles classiques de réseaux de neurones.¹¹

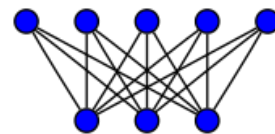


FIGURE 3.1 – Les unités élémentaires sont organisées en deux couches et n'interagissent qu'à travers les couches.

Pour formaliser précisément le modèle, on peut représenter les variables sous la forme d'une paire $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_{1,1}, \dots, \sigma_{1,N}, \sigma_{2,1}, \dots, \sigma_{2,N}) \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N$, et on pose

$$(3.1) \quad H_N^{\text{bip}}(\sigma) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N W_{i,j} \sigma_{1,i} \sigma_{2,j}.$$

Pour simplifier, on a imposé que σ_1 et σ_2 soient des vecteurs de même longueur N , mais ce n'est pas fondamental ; l'important est de s'assurer que les tailles respectives des deux couches restent proportionnelles l'une à l'autre à mesure que nous considérons

10. C'est l'un des résultats clés célébrés dans la citation pour le prix Abel 2024 de Michel Talagrand.

11. L'un d'eux est le modèle de Hopfield, qui est un modèle de stockage et de récupération d'information. Un autre est la machine de Boltzmann restreinte, une architecture de réseau de neurones artificiels qui était populaire jusqu'à il y a environ dix ans pour l'apprentissage de distributions de données et la génération de nouveaux exemples. En grande partie pour leurs travaux sur ces modèles, John Hopfield et Geoffrey Hinton viennent de recevoir le prix Nobel de physique.

des systèmes de plus en plus grands. Nous avons également conservé l'idée que chacune des variables prend des valeurs dans $\{\pm 1\}$, mais on peut également s'affranchir de cette hypothèse¹². Nous appellerons ce modèle le *modèle biparti*.

Ce modèle peut sembler à première vue à peine distinct du modèle SK. Pourtant, à ce jour, on ne sait pas quelle est la limite de l'énergie libre dans ce cas ; en fait, même le fait que l'énergie libre converge lorsque N tend vers l'infini n'est pas connu. Pour être clair, l'énergie libre ici est

$$\frac{1}{N} \mathbb{E} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N} \exp(\beta H_N^{\text{bip}}(\sigma)).$$

Le comportement asymptotique du maximum

$$\frac{1}{N} \max_{\sigma \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N} H_N^{\text{bip}}(\sigma)$$

est également mal compris. Le problème ici va au-delà de la simple résolution d'une partie technique dans la démonstration de la formule de Parisi. En effet, on pourrait imaginer plusieurs manières possibles de généraliser la formule de Parisi à ce modèle biparti, mais il est démontré qu'aucun de ces candidats pour la limite n'est valide [8, Section 6].

Pour clarifier ce qui distingue le modèle biparti du modèle SK sur le plan technique, il est préférable de changer un peu notre point de vue sur la définition de ces champs aléatoires H_N et H_N^{bip} . Au lieu de les écrire explicitement comme dans (1.1) et (3.1), une manière équivalente de les définir est de spécifier qu'ils sont des champs gaussiens centrés, et de donner leur covariance. Pour le modèle SK, on a pour chaque $\sigma, \tau \in \{\pm 1\}^N$ que

$$(3.2) \quad \mathbb{E}[H_N(\sigma)H_N(\tau)] = N \left(\frac{\sigma \cdot \tau}{N} \right)^2,$$

où le point dans l'expression $\sigma \cdot \tau$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$. Ainsi, au lieu d'écrire la formule (1.1), nous aurions aussi pu dire « soit $(H_N(\sigma))_{\sigma \in \{\pm 1\}^N}$ le vecteur gaussien centré dont la covariance est donnée par (3.2) ». L'un des avantages de la formule explicite, outre son caractère potentiellement plus intuitif, est qu'elle montre clairement qu'un tel vecteur aléatoire existe. Plus généralement, on pourrait envisager des champs gaussiens centrés $(H_N(\sigma))_{\sigma \in \mathbb{R}^N}$ tels que, pour une fonction lisse $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on ait pour chaque $\sigma, \tau \in \mathbb{R}^N$ que

$$(3.3) \quad \mathbb{E}[H_N(\sigma)H_N(\tau)] = N \xi \left(\frac{\sigma \cdot \tau}{N} \right);$$

le modèle SK correspond au cas où $\xi(r) = r^2$. Pour le choix de $\xi(r) = r^3$, on peut trouver un champ gaussien qui satisfait (3.3) en définissant

$$H_N(\sigma) := \frac{1}{N} \sum_{i,j,k=1}^N W_{i,j,k} \sigma_i \sigma_j \sigma_k,$$

où $(W_{i,j,k})$ sont des gaussiens centrés indépendants de variance 1. On peut réaliser $\xi(r) = r^p$ pour tout entier positif p en procédant de manière similaire. L'ensemble des fonctions ξ qui définissent effectivement une fonction de covariance dans (3.3) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$(3.4) \quad \xi(r) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p,$$

12. En restant avec la version la plus simple possible du modèle, nous avons artificiellement introduit une symétrie entre les deux couches, mais nous voulons insister sur l'élaboration de techniques d'analyse qui ne reposent pas sur cette symétrie ; un moyen simple de briser la symétrie tout en restant dans notre contexte et notre notation est d'ajouter un terme $h \sum_{i=1}^N \sigma_{1,i}$ dans la définition de $H_N^{\text{bip}}(\sigma)$, pour un certain paramètre $h \neq 0$.

avec $a_p \geq 0$ tendant vers zéro suffisamment rapidement quand p tend vers l'infini, sera une fonction de covariance valide.

Pour le modèle biparti, on a plutôt que, pour chaque $\sigma, \tau \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N$,

$$(3.5) \quad \mathbb{E} \left[H_N^{\text{bip}}(\sigma) H_N^{\text{bip}}(\tau) \right] = N \left(\frac{\sigma_1 \cdot \tau_1}{N} \right) \left(\frac{\sigma_2 \cdot \tau_2}{N} \right).$$

La principale différence technique entre les modèles SK et biparti est qu'ici, la fonction pertinente qui apparaît à droite de (3.5) est l'application $(x, y) \mapsto xy$, qui *n'est pas convexe*. Pour être précis, pour les modèles avec un seul type de spins, c'est-à-dire de la forme (3.3), ce qui est crucial est que la fonction ξ soit convexe sur $\mathbb{R}_+$; comme on peut le voir à partir de (3.4), c'est en fait toujours vrai! Cette propriété de convexité peut cependant cesser d'être valide dès que l'on considère des modèles avec deux types de spins ou plus, comme on le voit sur l'exemple du modèle biparti. En général, on peut considérer des modèles avec un nombre fixe D de types de spins, disons $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_D) \in (\mathbb{R}^N)^D$, avec une covariance telle que, pour chaque $\sigma, \tau \in (\mathbb{R}^N)^D$,

$$\mathbb{E} [H_N(\sigma) H_N(\tau)] = N \xi \left(\left(\frac{\sigma_d \cdot \tau_{d'}}{N} \right)_{1 \leq d, d' \leq D} \right),$$

où ξ est une fonction (admissible) de $\mathbb{R}^{D \times D}$ dans $\mathbb{R}$. Les modèles pour lesquels on peut écrire et prouver rigoureusement une formule de Parisi pour la limite de l'énergie libre sont exactement ceux pour lesquels la fonction ξ est convexe sur l'espace des matrices symétriques définies positives [3].

4. UNE CONNEXION AVEC LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Alors, que pouvons-nous faire pour le modèle biparti? Comme mentionné dans la section précédente, il n'est même pas clair de décider de ce qu'on espère montrer dans ce cas, car il n'y a pas de manière évidente d'étendre la formule de Parisi à un candidat raisonnable pour l'énergie libre limite. Je vais expliquer une piste possible que mes collaborateurs et moi avons explorée. L'idée se déroule en deux étapes. Tout d'abord, on enrichit l'énergie libre en ajoutant certains termes (qu'on espère pas trop compliqués) à la fonction d'énergie, de sorte à obtenir une énergie libre qui dépend de paramètres supplémentaires en plus de la température inverse. Ensuite, on espère trouver une équation aux dérivées partielles que cette énergie libre résout approximativement, et caractériser l'énergie libre limite comme la solution unique de cette équation. Cette approche fonctionne bien pour des modèles plus simples comme le modèle de Curie-Weiss et ses généralisations, ou pour certains problèmes d'inférence statistique comme la détection de communautés (voir [5, Chapitres 1 à 4] pour une présentation détaillée). Une bonne pratique pédagogique serait sans doute que nous explorions d'abord ces modèles. Au lieu de cela, je vais essayer de traiter directement le cas plus complexe des verres de spins, mais certains aspects de la discussion seront nécessairement assez imprécis.

Pour garder une notation simple, nous discuterons d'abord de l'approche dans le cas du modèle SK. Commençons par définir une nouvelle énergie libre avec un paramètre supplémentaire, puis discutons des motivations pour ce choix. Pour chaque $t \geq 0$ et $h \geq 0$, on définit

$$(4.1) \quad F_N(t, h) := -\frac{1}{N} \mathbb{E} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \exp(\sqrt{2t} H_N(\sigma) - Nt + \sqrt{2h} z \cdot \sigma - Nh),$$

où $z = (z_1, \dots, z_N)$ est un vecteur de gaussiennes centrées indépendantes de variance 1, indépendant de H_N , et on se rappelle que la fonction H_N pour le modèle SK est définie dans (1.1).

Plusieurs commentaires sont nécessaires pour expliquer certains des choix faits dans cette nouvelle définition de F_N . Tout d'abord, nous avons remplacé β par $\sqrt{2t}$. La raison in fine est que les formules qui suivent seront plus élégantes de cette manière, mais une façon de pressentir cela est de se rappeler que $H_N(\sigma)$ est une variable aléatoire gaussienne, et donc le facteur $\sqrt{2t}H_N(\sigma)$ est tel que la variance de la gaussienne dépend linéairement de t , comme pour le mouvement brownien ; c'est comme si nous ajoutions continuellement de nouvelles copies indépendantes de $H_N(\sigma)$ de manière homogène en temps. Il en va de même pour $\sqrt{2h}$ devant $z \cdot \sigma$. Le facteur $-Nt$ est également là en fin de compte simplement pour rendre les formules qui suivent un peu plus élégantes ; c'est la moitié de la variance de la variable aléatoire gaussienne $\sqrt{2t}H_N(\sigma)$. Les personnes familières avec le calcul stochastique reconnaîtront ici une exponentielle stochastique : en particulier, nous avons que $\mathbb{E}[\exp(\sqrt{2t}H_N(\sigma) - Nt)] = 1$. Donc, si nous échangeons l'espérance et le logarithme dans (4.1), nous finirions avec une somme de termes tous égaux à 1. Par l'inégalité de Jensen, la quantité avec l'espérance et le logarithme échangés est plus petite que la quantité de départ, et notre fonction F_N permet en quelque sorte de mesurer le défaut dans cette inégalité de Jensen ¹³.

À partir de la formule (4.1), nous avons jusqu'à présent principalement discuté de simples changements de variables, ou tenté de justifier la présence des termes apparemment inutiles Nt ou Nh , mais l'important est de comprendre pourquoi nous ajoutons ce terme $\sqrt{2h}z \cdot \sigma$. Le fait que nous recherchions une équation aux dérivées partielles pour F_N signifie que nous espérons pouvoir compenser de petites variations de t par de petites variations de h . Nous cherchons donc un terme qui ressemble à $H_N(\sigma)$ d'une certaine manière, tout en étant plus simple à analyser. Peut-être qu'une façon de penser que le terme $\sqrt{2h}z \cdot \sigma$ n'est pas un choix déraisonnable est d'écrire

$$H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N W_{ij} \sigma_j \right) \sigma_i,$$

et de se dire que peut-être que $(\sum_{j=1}^N W_{ij} \sigma_j)$ pourrait être remplacé par des variables gaussiennes indépendantes équivalentes, parce que, en tout cas pour chaque σ fixé, il s'agit bien de variables gaussiennes après tout. Une explication plus détaillée dépasse le cadre de cette note ; pour moi, la meilleure heuristique est celle discutée dans [5, Exercice 6.5 et solution].

Soyons pragmatiques ici et calculons simplement les dérivées de F_N pour voir si quelque chose d'intéressant se produit. Pour exprimer ces dérivées de manière claire, introduisons une notation pour la mesure de Gibbs. Pour toute fonction f , on écrit

$$(4.2) \quad \langle f(\sigma) \rangle := \frac{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} f(\sigma) \exp(H_N(t, h, \sigma))}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \exp(H_N(t, h, \sigma))},$$

où on a posé $H_N(t, h, \sigma) := \sqrt{2t}H_N(\sigma) - Nt + \sqrt{2h}z \cdot \sigma - Nh$. Dans la notation à gauche de (4.2), les crochets $\langle \cdot \rangle$ représentent donc l'espérance par rapport à la mesure de Gibbs, et on considère σ comme une variable aléatoire échantillonnée suivant cette mesure. On

13. En général, on ne se limite pas aux modèles définis sur $\{\pm 1\}^N$. Pour un modèle dont la covariance est donnée par (3.3), on écrit donc

$$F_N(t, h) := -\frac{1}{N} \mathbb{E} \log \int \exp \left(\sqrt{2t}H_N(\sigma) - Nt\xi(|\sigma|^2/N) + \sqrt{2h}z \cdot \sigma - h|\sigma|^2 \right) dP_N(\sigma),$$

où $P_N = P_1^{\otimes N}$ est le produit tensoriel N fois d'une mesure de probabilité P_1 sur $\mathbb{R}$ à support compact. On retrouve le modèle SK en choisissant $\xi(r) = r^2$ et $P_1 = (\delta_1 + \delta_{-1})/2$, à un facteur trivial de $\log 2$ près. Remarquons qu'avec cette définition, l'inégalité de Jensen nous dit que $F_N \geq 0$, grâce au signe négatif que nous avons ajouté.

écrit également σ' pour désigner une copie indépendante de σ sous la mesure de Gibbs, c'est-à-dire qu'on écrit

$$\langle f(\sigma, \sigma') \rangle := \frac{\sum_{\sigma, \sigma' \in \{\pm 1\}^N} f(\sigma, \sigma') \exp(H_N(t, h, \sigma) + H_N(t, h, \sigma'))}{\sum_{\sigma, \sigma' \in \{\pm 1\}^N} \exp(H_N(t, h, \sigma) + H_N(t, h, \sigma'))}.$$

Un calcul ¹⁴ montre que

$$(4.3) \quad \partial_t F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\left(\frac{\sigma \cdot \sigma'}{N} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \partial_h F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\frac{\sigma \cdot \sigma'}{N} \right).$$

La dépendance en t et h dans les membres de droite des identités ci-dessus est cachée dans la définition de la mesure de Gibbs $\langle \cdot \rangle$. Pour des modèles plus généraux comme dans (3.3), on trouve la même expression pour $\partial_h F_N$ que dans (4.3) (pour la définition correspondante de la mesure de Gibbs), tandis que pour la dérivée en t , on trouve

$$(4.4) \quad \partial_t F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\xi \left(\frac{\sigma \cdot \sigma'}{N} \right) \right).$$

Continuant avec le modèle SK pour l'instant, nous obtenons donc que

$$(4.5) \quad \partial_t F_N - (\partial_h F_N)^2 = \mathbb{E} \left(\left(\frac{\sigma \cdot \sigma'}{N} \right)^2 \right) - \left(\mathbb{E} \left(\frac{\sigma \cdot \sigma'}{N} \right) \right)^2.$$

Le membre de droite de cette identité est la variance de la variable aléatoire $\sigma \cdot \sigma' / N$ sous $\mathbb{E} \langle \cdot \rangle$. Cette variable aléatoire est une somme de N termes, donc on pourrait se dire qu'elle a de petites fluctuations, par un effet de loi des grands nombres. Voyons donc ce que l'on obtiendrait sous cette hypothèse que la variance de $\sigma \cdot \sigma' / N$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Nous sommes alors amenés à l'idée que F_N pourrait converger vers une fonction limite f qui résout l'équation

$$(4.6) \quad \partial_t f - (\partial_h f)^2 = 0.$$

De plus, en fixant $t = 0$ dans la définition de F_N dans (4.1), nous constatons que nous pouvons facilement calculer le résultat en écrivant $z \cdot \sigma = \sum_{i=1}^N z_i \sigma_i$, en écrivant l'exponentielle de la somme comme une somme d'exponentielles, et en réalisant que nous pouvons alors factoriser la sommation en un produit de N sommes simples sur $\{\pm 1\}$. En bref, nous voyons que

$$(4.7) \quad F_N(0, h) = F_1(0, h).$$

Ainsi, si nous croyons que la variable aléatoire $\sigma \cdot \sigma' / N$ a des fluctuations négligeables dans la limite de N grand, alors nous sommes tentés de conjecturer que F_N converge vers la fonction f qui résout (4.6) avec la condition initiale $f(0, \cdot) = F_1(0, h)$. En fait, la conclusion à laquelle on arrive ainsi est exactement celle qui a été proposée (en utilisant d'autres arguments) dans l'article qui a introduit le modèle SK [19]. Pour le modèle avec la covariance comme dans (3.3), nous serions plutôt arrivés à l'équation

$$(4.8) \quad \partial_t f - \xi(\partial_h f) = 0.$$

Les équations aux dérivées partielles de ce type sont appelées équations de Hamilton-Jacobi.

¹⁴. Vous pouvez essayer ! La seule chose à garder à l'esprit est que si G est une gaussienne centrée de variance 1 et que f est une fonction suffisamment régulière (disons C^1 avec une croissance raisonnable de f et de f' à l'infini), alors

$$\mathbb{E}[Gf(G)] = \mathbb{E}[f'(G)].$$

Pour voir cela, il suffit d'écrire l'espérance explicitement comme une intégrale contre la densité gaussienne, et d'intégrer par parties.

L'idée générale que la variable aléatoire importante, ici $\sigma \cdot \sigma' / N$, a des fluctuations négligeables dans la limite de grands N , fonctionne très bien pour les modèles plus simples. Mais pour le modèle qui nous intéresse ici, cette hypothèse n'est valide qu'à haute température, c'est-à-dire pour de petites valeurs de t . Lorsque t dépasse un certain seuil, la mesure de Gibbs prend une structure ultramétrique non triviale, comme représentée sur la figure 2.1, et en particulier la variance de $\sigma \cdot \sigma' / N$ ne tend pas vers zéro.

Bien qu'elle ne fonctionne pas totalement, l'idée que nous venons d'explorer semble prometteuse, et nous allons essayer de l'améliorer. Le point central est que nous n'avons pas complètement réussi à « fermer l'équation » avec l'introduction de ce paramètre h ; mais peut-être que nous pourrions y parvenir en introduisant plus de paramètres.

La construction complète de l'énergie libre qui intègre ces paramètres supplémentaires prendrait trop de place pour l'expliquer ici (on peut consulter [5, Section 6.4]), mais l'idée de base est que, comme nous anticipons que le véritable système pourrait avoir une structure ultramétrique complexe, nous voulons remplacer notre « champ extérieur » naïf $\sqrt{2}hz$, que nous appliquions à σ , par un champ aléatoire plus sophistiqué qui incorpore lui-même une structure ultramétrique. Cette structure ultramétrique est encodée à l'aide d'une fonction croissante $q : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$.

Cette construction nous conduit donc à une nouvelle définition de l'énergie libre F_N , que nous considérons désormais comme une fonction de t et de q à la place de t et h . Nous pouvons appeler cette fonction étendue $F_N(t, q)$ l'« énergie libre enrichie ». La version dans (1.1) correspond au choix de la fonction constante $q = h$ dans cette nouvelle définition ; en particulier, nous calculons l'énergie libre du modèle « standard » lorsque nous calculons $F_N(\beta^2/2, 0)$, pourvu qu'on garde à l'esprit le signe négatif supplémentaire et le terme Nt dans (4.1).

Désignons par $\mathcal{Q}$ l'espace des fonctions croissantes $q : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$. La notion de différentiation pour les fonctions $g : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ que nous utilisons est la suivante. On dit que g est différentiable en $q \in \mathcal{Q}$, et dans ce cas, on note $\partial_q g(q, \cdot) \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ la dérivée en q , si pour chaque $q' \in \mathcal{Q}$, on a

$$g((1 - \varepsilon)q + \varepsilon q') = g(q) + \varepsilon \int_0^1 (q' - q)(u) \partial_q g(q, u) du + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

On peut trouver une expression élégante pour la dérivée de F_N par rapport à q , qui ressemble à ce que nous avons trouvé dans la deuxième partie de (4.3) mais qui implique également d'autres variables qui jouent un rôle dans la structure ultramétrique du nouveau champ extérieur. On est alors amené à former la quantité

$$\partial_t F_N(t, q) - \int_0^1 (\partial_q F_N(t, q, u))^2 du = \text{petit?}$$

Ce qui remplace le « petit » dans le membre de droite ci-dessus est une variance conditionnelle de $\sigma \cdot \sigma' / N$; en particulier, c'est en effet plus petit que la variance de $\sigma \cdot \sigma' / N$, donc nous faisons effectivement des progrès. Pour le modèle avec la covariance comme dans (3.3), on espère que

$$\partial_t F_N(t, q) - \int_0^1 \xi(\partial_q F_N(t, q, u)) du = \text{petit?}$$

Bien que nous n'ayons pas expliqué la construction de ce nouveau champ extérieur avec une structure ultramétrique, il s'avère qu'il est toujours « factorisable » dans le sens où la propriété agréable que nous avons dans (4.7) reste valable dans ce cadre plus général, c'est-à-dire que pour chaque $q \in \mathcal{Q}$, on a

$$(4.9) \quad F_N(0, q) = F_1(0, q).$$

Il se trouve que nos espoirs plus sophistiqués sont maintenant corrects. Pour faciliter la notation, on pose $\psi(q) := F_1(0, q)$.

Theorem 4.1 (La formule de Parisi en tant qu'équation de Hamilton-Jacobi [4, 9, 11]). *L'énergie libre enrichie $F_N : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ pour le modèle SK converge ponctuellement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait*

$$(4.10) \quad \begin{cases} \partial_t f - \int_0^1 (\partial_q f)^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}, \\ f(0, \cdot) = \psi & \text{sur } \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Plus généralement, si $F_N : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ représente maintenant l'énergie libre enrichie associée à un modèle dont la covariance est donnée par (3.3), alors F_N converge vers la fonction f qui satisfait

$$(4.11) \quad \begin{cases} \partial_t f - \int_0^1 \xi(\partial_q f) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}, \\ f(0, \cdot) = \psi & \text{sur } \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Une partie de la tâche consistant à donner un sens à ce théorème est de trouver une bonne notion de solution pour les équations de Hamilton-Jacobi (4.10) et (4.11). Cela repose sur la notion de solutions de viscosité (voir [5, Chapitre 3] pour une introduction adaptée à notre contexte).

Comment cette formulation se rapporte-t-elle à la formule de Parisi ? Le point clé est que lorsque la non-linéarité (la fonction $x \mapsto x^2$ dans (4.10)) est convexe, la solution admet une représentation variationnelle connue sous le nom de formule de Hopf-Lax. La solution à (4.10) peut être écrite comme suit :

$$(4.12) \quad f(t, q) = \sup_{q' \in \mathcal{Q}} \left(\psi(q + q') - \frac{1}{4t} \int_0^1 (q')^2 \right).$$

Pour la solution à l'équation plus générale dans (4.11), on a

$$(4.13) \quad f(t, q) = \sup_{q' \in \mathcal{Q}} \left(\psi(q + q') - t \int_0^1 \xi^* \left(\frac{q'}{t} \right) \right),$$

où ξ^* est le dual convexe de ξ défini, pour chaque $s \in \mathbb{R}$, par

$$\xi^*(s) := \sup_{r \geq 0} (rs - \xi(r)).$$

On peut alors relier cette représentation à la formule de Parisi en posant $q = 0$ dans (4.12), en effectuant un changement de variables, et en faisant des calculs explicites impliquant la fonction ψ .¹⁵

Tout cela est bien joli, mais nous connaissons déjà la réponse dans ces cas. Les choses vraiment intéressantes apparaissent lorsque l'on considère des modèles avec différents types de spins, tels que le modèle biparti. Rappelons que dans ce cas, la fonction d'énergie H_N^{bip} est définie dans (3.1). Voyons d'abord ce que nous obtenons si nous raisonnons de manière simplifiée comme pour obtenir (4.6) ou (4.8). Le point important est que, puisqu'il y a maintenant deux types de spins, nous voudrions nous assurer d'avoir une variable supplémentaire (un « champ extérieur » supplémentaire) agissant sur chacun de ces deux types. Ainsi, nous posons, pour tout $t \geq 0$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}_+^2$, et $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N$,

$$H_N(t, h, \sigma) := \sqrt{2t} H_N^{\text{bip}}(\sigma) - Nt + \sqrt{2h_1} z_1 \cdot \sigma_1 - Nh_1 + \sqrt{2h_2} z_2 \cdot \sigma_2 - Nh_2,$$

15. Nos formules ici sont avec un supremum, contrairement à (2.1), mais cela est simplement dû au fait que nous avons ajouté un signe moins dans la définition de (4.1).

(nous omettons les lettres ^{bip} en exposant à partir de maintenant pour simplifier la notation), et ensuite, pour tout $t \geq 0$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}_+^2$, nous posons la nouvelle énergie libre comme étant

$$F_N(t, h) := -\frac{1}{N} \mathbb{E} \log \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N} \exp(H_N(t, h, \sigma)).$$

La définition de la moyenne de Gibbs $\langle \cdot \rangle$ est, espérons-le, claire ; elle est essentiellement identique à la formule dans (4.2), sauf que maintenant la variable h est dans $\mathbb{R}_+^2$ et que la variable de sommation σ varie dans $\{\pm 1\}^N \times \{\pm 1\}^N$. À la place de (4.3) ou (4.4), nous obtenons que

$$\partial_t F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma'_1}{N} \right) \left(\frac{\sigma_2 \cdot \sigma'_2}{N} \right) \right),$$

avec toujours

$$\partial_{h_1} F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma'_1}{N} \right) \quad \text{et} \quad \partial_{h_2} F_N(t, h) = \mathbb{E} \left(\frac{\sigma_2 \cdot \sigma'_2}{N} \right).$$

Ainsi, si nous supposons que les variables aléatoires $\sigma_1 \cdot \sigma'_1 / N$ et $\sigma_2 \cdot \sigma'_2 / N$ ne fluctuent pas beaucoup dans la limite de grand N , nous sommes amenés à croire que F_N converge vers f qui satisfait

$$(4.14) \quad \partial_t f - \partial_{h_1} f \partial_{h_2} f = 0.$$

La condition initiale $f(0, \cdot)$ est facile à calculer car on a encore (4.7).

Le problème est que l'hypothèse qui nous conduit à (4.14) est de nouveau trop naïve bien sûr, donc au lieu de cela, nous devons remplacer notre paire de variables simples $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}_+^2$ par une paire de fonctions $q = (q_1, q_2) \in \mathcal{Q}^2$ qui encode la structure ultramétrique des champs extérieurs qui agissent respectivement sur σ_1 et σ_2 . Cela nous définit une énergie libre plus sophistiquée F_N , désormais définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2$ au lieu de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2$. De nouveau, nous avons que (4.9) est valide (maintenant avec q parcourant $\mathcal{Q}^2$) ; posons $\psi := F_1(0, \cdot)$ pour plus de commodité. En procédant à des calculs similaires à ceux du modèle SK, on en vient ainsi à s'attendre à ce que :

Conjecture 4.2. *Peut-être que l'énergie libre enrichie $F_N : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour le modèle biparti converge vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui résout*

$$(4.15) \quad \begin{cases} \partial_t f - \int_0^1 \partial_{q_1} f \partial_{q_2} f = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2, \\ f(0, \cdot) = \psi & \text{sur } \mathcal{Q}^2 \quad ? \end{cases}$$

Dans ce cas, étant donné que la non-linéarité dans l'équation (4.15) (c'est-à-dire l'application $(x, y) \mapsto xy$) n'est ni convexe ni concave, il n'existe pas de méthode standard pour représenter la solution de (4.15) de manière variationnelle. Il n'y a donc pas de manière évidente de réécrire ce candidat pour l'énergie libre limite sous une forme qui ressemblerait à la formule de Parisi pour le modèle SK.

Comme déjà mentionné, on ne sait pas si la Conjecture 4.2 est valide ou non. Une chose que l'on sait est que toute limite de F_N le long d'une sous-suite doit satisfaire l'équation (4.15) « presque partout » dans $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2$, pour une interprétation appropriée de « presque partout » [3]. Cela n'est toutefois pas suffisant pour caractériser entièrement la solution de (4.15) ; même en dimension finie, il peut y avoir plusieurs fonctions qui résolvent une équation de Hamilton-Jacobi presque partout. Une autre chose que l'on sait est que la solution de (4.15) constitue une borne inférieure [4, 8], c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$ et $q \in \mathcal{Q}^2$, on a

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} F_N(t, q) \geq f(t, q),$$

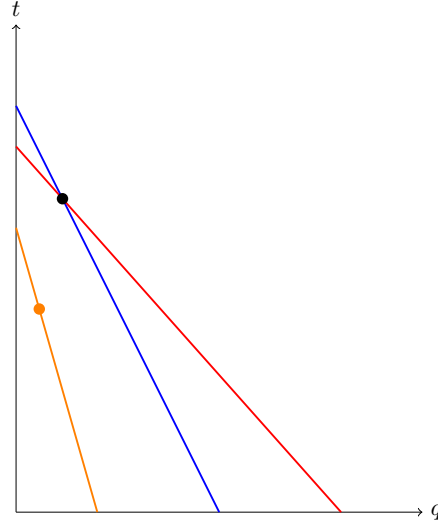


FIGURE 4.1 – Chaque ligne caractéristique nous offre une « prédiction » de ce qu’est l’énergie libre limite. Pour de petites valeurs de t , chaque point (t, q) (par exemple, le point orange) est atteint par exactement une ligne caractéristique, et nous connaissons alors la valeur de l’énergie libre. Pour de grandes valeurs de t , il pourrait arriver que plusieurs caractéristiques atteignent un point, comme c’est le cas pour le point noir. On sait alors que l’énergie libre limite doit prendre la valeur prescrite par l’une de ces caractéristiques, mais on ne sait pas laquelle caractéristique est la bonne.

où f désigne l’unique solution de viscosité de (4.15). Le résultat que je trouve le plus intéressant, et qui correspond essentiellement à ce que disent les physiciens dans un autre langage, est celui que je vais décrire maintenant de manière informelle. Pour ce faire, discutons d’abord d’une méthode classique pour résoudre (4.15) sur un petit intervalle de temps appelée la méthode des caractéristiques (voir [5, Section 3.5] pour plus de précisions). Il s’avère que si l’on effectue quelques calculs formels en supposant que la solution de (4.15) est deux fois dérivable, on peut deviner une formule simple donnant la valeur de la solution le long de lignes appelées les caractéristiques. Dans notre cas, la caractéristique qui part de q est la ligne droite

$$t \mapsto q - t \nabla \xi(\partial_q \psi(q)),$$

où on a noté $\nabla \xi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ la fonction qui envoie (x, y) sur (y, x) (en accord avec l’idée que la « fonction ξ » pertinente pour le modèle biparti est $(x, y) \mapsto xy$), et $\partial_q \psi = (\partial_{q_1} \psi, \partial_{q_2} \psi)$.

Ce calcul formel donné par les caractéristiques est en fait vraiment correct sur un petit intervalle de temps, au sens où il nous donne vraiment la valeur de la solution de viscosité. Le problème est que pour les temps plus longs, ces lignes peuvent commencer à se croiser, et elles ne s’accordent pas sur la valeur qu’elles prédisent (et la solution de viscosité peut alors prendre une valeur qui n’est même pas parmi ces options multiples). L’un des principaux résultats de [3] est que si l’on suppose que l’énergie libre enrichie $F_N : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ du modèle biparti converge vers une fonction limite f , alors il y a toujours une ligne caractéristique qui prescrit la valeur correcte pour f . La seule source d’ambiguïté restante est que nous ne sommes pas capables de dire laquelle des lignes caractéristiques est la bonne, dans le cas où plusieurs lignes arrivent en un point donné. Voir également la figure 4.1 pour une illustration.

REFERENCES

- [1] Sanjeev Arora, Eli Berger, Hazan Elad, Guy Kindler, and Muli Safra. On non-approximability for quadratic programs. In *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'05)*, pages 206–215. IEEE, 2005.
- [2] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal Massart. *Concentration inequalities*. Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [3] Hong-Bin Chen and Jean-Christophe Mourrat. On the free energy of vector spin glasses with non-convex interactions. *Probab. Math. Phys.*, to appear.
- [4] Hong-Bin Chen and Jiaming Xia. Hamilton-Jacobi equations from mean-field spin glasses. *arXiv preprint arXiv:2201.12732*, 2022.
- [5] Tomas Dominguez and Jean-Christophe Mourrat. *Statistical mechanics of mean-field disordered systems: a Hamilton-Jacobi approach*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, Zürich, 2024.
- [6] Francesco Guerra. Broken replica symmetry bounds in the mean field spin glass model. *Comm. Math. Phys.*, 233(1):1–12, 2003.
- [7] Marc Mézard, Giorgio Parisi, and Miguel Virasoro. *Spin glass theory and beyond*, volume 9 of *World Scientific Lecture Notes in Physics*. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1987.
- [8] Jean-Christophe Mourrat. Nonconvex interactions in mean-field spin glasses. *Probab. Math. Phys.*, 2(2):281–339, 2021.
- [9] Jean-Christophe Mourrat. The Parisi formula is a Hamilton-Jacobi equation in Wasserstein space. *Canad. J. Math.*, 74(3):607–629, 2022.
- [10] Jean-Christophe Mourrat. Un-inverting the Parisi formula. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, to appear.
- [11] Jean-Christophe Mourrat and Dmitry Panchenko. Extending the Parisi formula along a Hamilton-Jacobi equation. *Electron. J. Probab.*, 25:Paper No. 23, 17, 2020.
- [12] Dmitry Panchenko. The Parisi ultrametricity conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 177(1):383–393, 2013.
- [13] Dmitry Panchenko. *The Sherrington-Kirkpatrick model*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2013.
- [14] Giorgio Parisi. Infinite number of order parameters for spin-glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 43(23):1754, 1979.
- [15] Giorgio Parisi. The order parameter for spin glasses: a function on the interval 0-1. *J. Phys. A*, 13(3):1101, 1980.
- [16] Giorgio Parisi. A sequence of approximated solutions to the S-K model for spin glasses. *J. Phys. A*, 13(4):L115–L121, 1980.
- [17] Giorgio Parisi. Order parameter for spin-glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 50(24):1946, 1983.
- [18] Giorgio Parisi. Nobel lecture: Multiple equilibria. *Reviews of Modern Physics*, 95(3):030501, 2023.
- [19] David Sherrington and Scott Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35(26):1792, 1975.
- [20] Michel Talagrand. The Parisi formula. *Ann. of Math. (2)*, 163(1):221–263, 2006.

(Jean-Christophe Mourrat) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ENS LYON AND CNRS, LYON, FRANCE