BEAUX ORDRES ET GRAPHES

Jean-Florent Raymond

Université de Montpellier (LIRMM) et Université de Varsovie

Introduction

Dans un bel ordre, il n'y a ni chaîne infinie décroissante, ni chaîne infinie d'éléments incomparables.

C'est la définition.

Ah ?

Par exemple, $(\mathbb{N}, \leq)$ est un bel ordre, mais pas $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Quel intérêt ?

Dans un bel ordre, beaucoup de classes sont facilement caractérisables.

?

Oui, les classes inférieurement closes (i.e. $x \in \mathcal{C}$ et $y \leq x \Rightarrow y \in \mathcal{C}$) ont un nombre fini d'obstructions (=éléments min. du complémentaire)

Donc on peut les reconnaître facilement (algorithmiquement) ?

Oui ! Dans certains cas.

C'est courant, les classes inférieurement closes ?

Oui ! Les forêts, les graphes, planaires, les graphes de treewidth bornée (et bien d'autres) sont des classes de graphes inférieurement closes (pour la relation de mineur).

Quelles question se pose-t-on en théorie des beaux ordres ?

Savoir si un ordre donné est un bel ordre.

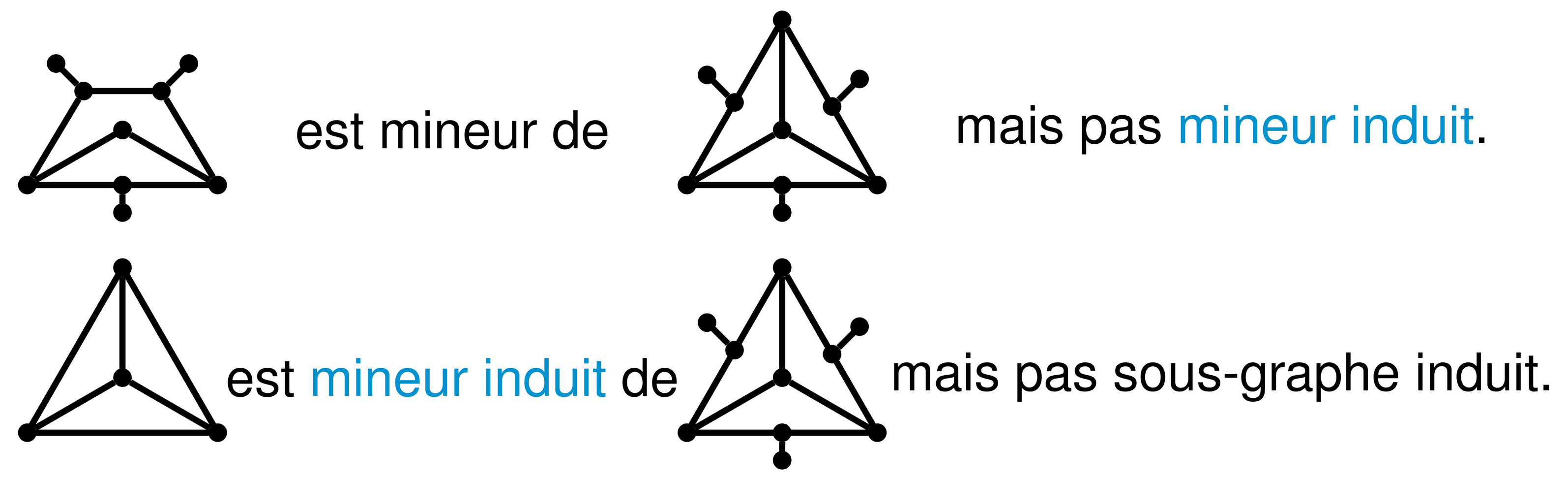
Ou bien caractériser les classes où un ordre donné est un bel ordre.

Par exemple ?

Regarde dans la colonne de droite !

Résultats

La *contraction* d'une arête revient à identifier ses extrémités. On dit que H est *mineur induit* de G si on peut l'obtenir en contractant les arêtes d'un sous-graphe induit de G. Par exemple :



Théorème (Błasiok, Kamiński, R., Trunck, 2015)

La classe des graphes ne contenant pas H comme mineur induit est bellement ordonnée par la relation de mineur induit ssi H est mineur induit de ou de .

Théorème (Błasiok, Kamiński, R., Trunck, 2015)

La classe des graphes ne contenant pas H comme contraction est bellement ordonnée par la relation de contraction ssi H est contraction de .

Théorème (Kamiński, R., Trunck, 2014)

Une classe de multigraphes $\mathcal{G}$ est bellement ordonnée par la relation de contraction ssi tous ses éléments ont

- au plus p composantes connexes ; et
- pas de coupe minimale de plus de k arêtes,

pour deux entiers p et k fixés.

Technique de preuve

On veut montrer que $(\mathcal{G}, \leq)$ est un bel ordre :

1. on choisit une bijection $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est une classe qu'on *connaît bien* (n-uplets, mots, arbres, etc.);
2. on choisit un ordre $\preceq$ sur $\mathcal{S}$ tel que $f(x) \preceq f(y) \iff x \leq y$;
3. on prouve que $(\mathcal{S}, \preceq)$ est un bel ordre en utilisant les résultats classiques, ce qu'on peut faire si on a bien choisi $\mathcal{S}$.

Ces trois étapes suffisent, car si on trouvait dans $(\mathcal{G}, \leq)$ une séquence infinie décroissante (ou d'éléments incomparables), on pourrait en déduire une dans $(\mathcal{S}, \preceq)$ grâce à la deuxième étape.
La première étape est facilitée si on connaît la *structure* des éléments de $\mathcal{G}$ (théorèmes de décomposition).

Ordres et graphes

Quels ordres sur les graphes sont de beaux ordres, en général ?

beaux : mineurs et immersions (Robertson & Seymour) ;

pas beaux : sous-graphes (induits ou non), contractions, mineurs induits, mineurs topologiques (induits ou non) ;

problèmes ouverts : immersions induites et immersions fortes.

Quand un ordre n'est pas beau en général, on peut s'intéresser aux classes où il est beau.

Bibliographie

- J. Błasiok, M. Kamiński, J.-F. Raymond et T. Trunck. Induced minors and well-quasi-ordering. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 49:197 – 201, 2015. The Eight European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2015 et *arXiv:1510.07135*.
- M. Kamiński, J.-F. Raymond et T. Trunck. Multigraphs without large bonds are well-quasi-ordered by contraction. *arXiv:1412.2407*, Décembre 2014.

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
LIRMM
Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier