LP2 – Gravitation

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

Bibliographie

✍ *Physique tout-en-un MPSI-PTSI-PCSI*, **Salamito**
✍ *Mécanique PCSI-MPSI*, **Brasselet**

Table des matières

Remarques sur les leçons précédentes

- **2017 :** Les applications ne doivent pas nécessairement se limiter à la gravitation terrestre.
- 2016 : Les analogies entre l'électromagnétisme et la gravitation classique présentent des limites qu'il est pertinent de souligner.
- **2015 :** Deux nouvelles leçons ont été ajoutées [dont] une leçon intitulée « Gravitation », pour laquelle les candidats s'attacheront, dans le cadre de la physique classique, à développer quelques caractéristiques de l'interaction gravitationnelle.

Beaaaaucoup de culture à avoir pour cette leçon, notamment sur la RG wtf, du coup bien regarder les corrections de Gayvallet, Laibe et Marc Vincent. Les deux premières parties c'est à peu près tout le temps pareil à moduler en prenant en compte les remarques des correcteurs

1 L'interaction gravitationnelle

1.1 Construction

Parler de masse grave et de masse inertielle ici va contre notre raisonnement puisqu'on a déjà appliqué le principe d'équivalence pour établir la forme de la force

Pour retrouver une expression de la force gravitationnelle cohérente, on peut se baser sur quelques observions expérimentales historiques.

De par ses observations, Galilée pensait que toutes les planètes décrivaient une orbite circulaire autour du Soleil. Ce n'est pas exactement le cas comme vous le savez, mais nous prendrons ça comme un bon point de départ. Dans ce cas là, on peut écrire la vitesse et l'accélération de la trajectoire comme suit dans le système de coordonnées polaires :

$$\mathbf{v} = r\frac{2\pi}{T}\mathbf{e}_\theta \Longrightarrow \mathbf{a} = -r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathbf{e_r} \tag{1}$$

On a alors déjà l'intuition que la force à l'origine de ce mouvement est centripète. Poursuivons en utilisant la troisième loi de Kepler :

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{ cste} \tag{2}$$

Si on combine cela avec la deuxième loi de Newton et la forme précédente de l'accélération, nous obtenons :

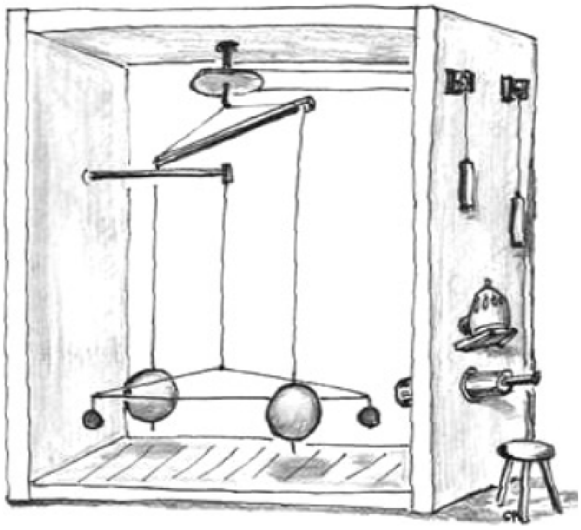
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \propto -\frac{m}{r^2}\mathbf{e_r} \tag{3}$$

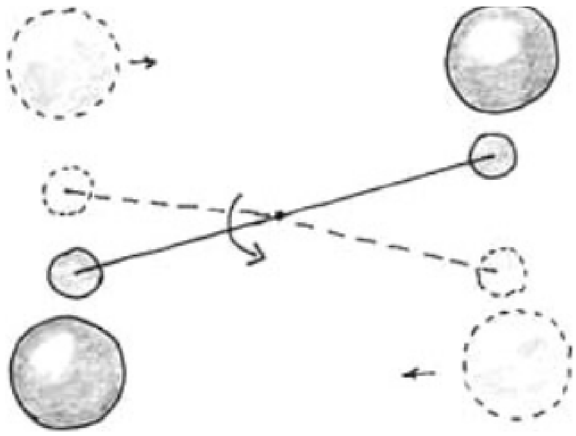
On a alors une force proportionnelle à la masse de la planète et inversement proportionnelle à la distance la séparant du Soleil. Or par principe d'action réciproque (ou troisième loi de Newton), le Soleil ressent une force équivalente de sens opposé. Cette situation symétrique n'est possible que si cette force dépend de la même façon de la masse du Soleil :

$$\mathbf{F} \propto -\frac{mM}{r^2}\mathbf{e_r} \tag{4}$$

On retrouve alors la forme bien connue de la force d'attraction gravitationnelle. Reste alors à déterminer cette constante de proportionnalité.

Elle a été déterminée historiquement par Cavendish en 1797 avec sa célèbre expérience de la balance de Cavendish.





C'est une balance de torsion formé d'un fléau sur lequel on a accroché deux petites masses aux extrêmités et pendu au plafond de la boîte par l'intermédiaire d'un fil d'argent très fin. A proximité de ces deux petites masses sont placées symétriquement deux grosses masses qui, par interaction gravitationnelle, vont induire une torsion du fil d'argent laquelle est alors mesurée grâce à une lunette. Pour son expérience, Cavendish a utilisé des petites masses de l'ordre de 1 kg et des grosses masses de l'ordre de 150 kg. En mesurant l'angle de torsion à l'équilibre il a alors pu remonter à une expression numérique de la force et donc à la constante de proportionnalité.

Cette constante de proportionnalité notée $\mathcal{G}$ est appelée constante de gravitation universelle. Elle vaut 6,67 USI. Mais quelle unité ? **Faire une analyse dimensionnelle au tableau**.

Finalement on a donc :

Pour deux corps à des positions $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ de masses respectives m_1 et m_2. Les forces d'attraction gravitationnelles sont :

$$\mathbf{F}_{21} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2 \left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \qquad \mathbf{F}_{12} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2 \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}$$

Dans le cas d'un solide, le point d'application à considérer est le centre de masse.

Cette force ressemble alors fortement à la force de Coulomb !

1.2 Champ gravitationnel et analogie électrostatique

De la même manière qu'en électrostatique on peut définir le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle m_1 :

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m_2} = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{5}$$

Ce résultat se généralise alors dans le cas d'une distribution de masse quelconque $\rho(\vec{r})$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G}\iiint \frac{\rho\left(r'\right)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right) d\tau \tag{6}$$

On voit donc clairement une correspondance avec le champ électrostatique avec la correspondance :

$$\begin{array}{c|c} \text{Gravité} & \text{Electromagnétisme} \\ m & q \\ \mathcal{G} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array} \tag{7}$$

ce qui nous permet alors d'établir les équations vectorielles auquel obéit ce champ par comparaison avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday dans le cadre de l'électrostatique :

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \mathbf{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho \\ \nabla \times \mathbf{G} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

et on peut alors déterminer un théorème de Gauss équivalent :

$$\iint \vec{G} \cdot \vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \tag{9}$$

On peut par exemple appliquer ce théorème de Gauss gravitationnel pour déterminer le champ créé par la Terre, non ponctuelle. **Faire le théorème de Gauss pour une sphère en se plaçant à l'extérieur**. Ainsi on retrouve le champ créé par un point matériel de même masse. Si l'on suppose les astres sphériques on peut leur appliquer simplement la loi de la gravitation universelle de Newton légitimement (ce que nous ferons plus tard.

Si l'on revient sur l'analogie faite avec l'électrostatique on peut établir le tableau complet de correspondance suivant :

	Gravitation	Électrostatique
Charge	m	q
Force	$\vec{F}_{1\to2} = -\mathcal{G} \times \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$	$\vec{F}_{1\to2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$
Champ	$\vec{G} = -\mathcal{G} \times \frac{M}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$	$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$
Potentiel	$\phi = -\mathcal{G} \times \frac{M}{r}$	$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q}{r}$
Théorème de Gauss	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{dS} = -4\pi G M_{int}$	$\oiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

(10)

Cette analogie a toutefois ses limites :

- Il n'y a pas de masse négative donc c'est une interaction toujours attractive contrairement à l'interaction électrostatique
- Ces deux forces ne se manifestent pas aux même échelles : l'interaction électrostatique est négligeable à l'échelle planétaire mais elle est prépondérante si l'on considère l'interaction électron-noyau alors qu'ici c'est la gravité qui est négligeable.

Remarque : Dire que le rotationnel de $\vec{G}$ est lui toujours nul n'est pas vrai car on a un champ gravitomagnétique dès lors que les masses bougent (exemple des objets très massifs en rotation, ça a été observé expérimentalement). Conceptuellement c'est exactement comme le magnétisme mais dans le cadre de la RG cette théorie EM semble être limité à certains cas (mais je ne sais pas lesquels précisément). Il y a une épreuve de l'X à ce sujet, ça peut valoir le coup de checker en prépa si on a le temps.

2 Mouvement dans un champ gravitationnel : problème à deux corps.

2.1 Position du problème

✍ BFR p.94, LP5

Schéma à faire au tableau :

On pose les masses m_1 et m_2 en des points M1 et M2, l'origine en O et les vecteurs unitaires de 1 vers 2 $\vec{r_{12}}$ et de 2 vers 1 $\vec{r_{21}} = -\vec{r_{12}}$. Les vecteurs $\vec{OM_1}$ et $\vec{OM_2}$ sont notés $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$;

La masse 1 est soumise à la seule force $\mathbf{F_{21}}$ qui est l'attraction gravitationnelle de la seconde masse :

$$\mathbf{F_{21}} = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r_{21}}$$

et de même, la masse 2 est soumise à la force $\mathbf{F}_{21}$:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12}$$

On a supposé pour écrire ces équations que les deux corps possédaient une symétrie sphérique. Le champ alors créé est le même que celui d'un point de même masse.

On suppose le système pseudo-isolé, on peut donc en déduire la conservation de l'impulsion globale du système. On peut alors montrer que si on définit le barycentre G des masses par

$$(m_1 + m_2)\,\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\mathbf{OM}_2.$$

Alors sa dérivée est l'impulsion globale (conservée) et donc le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme. Comme on a supposé le système pseudo-isolé, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

Dans ce référentiel on a alors :

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1 - \mathbf{OG} = (\mathbf{OM}_1 - \mathbf{OM}_2)\,\tfrac{m_2}{m_1+m_2} = -\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = -\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}\\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{OM}_2 - \mathbf{OG} = \tfrac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\\ \text{avec } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\end{gathered}$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\mathbf{r}$, on lui applique donc le PFD.

$$\begin{aligned} m_1\tfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} &= \mathbf{F}_{12}\\ m_2\tfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} &= \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}\end{aligned}$$

$m_2 m_1\tfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1+m_2)\,\mathbf{F}_{21}$ par multiplication et différence

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ qui est la masse réduite du système. On étudie donc une masse μ fictive soumise à un potentiel $U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$.

ODG : Mq le barycentre du système Terre-Soleil est situé tout près du Soleil, et que la masse réduite est celle de la Terre.

2.2 Trajectoires

✍ Salamito p.768

Commençons par écrire la deuxième loi de NEWTON (bien faire le bilan des forces gnagnagna) :

$$m\mathbf{a} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\mathbf{e_r}$$

Mais ne faisons aucune hypothèse sur la nature du mouvement ! Il est particulièrement intéressant, (dans le cas général des forces centrales) d'étudier le moment cinétique :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v} \Longrightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$$

En effet on a

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\mathbf{a}$$

Et puisque a $\|\mathbf{r}$, alors on a bien conservation du moment cinétique. Mais conservation d'un vecteur, ça veut dire deux choses :

- Conservation de la direction Ainsi $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ sont toujours orthogonaux à $\mathbf{L}$, donc le mouvement est contenu dans un plan (orthogonal à L. Ceci justifie le fait qu'on utilise des coordonnées polaires (r,θ).
- Conservation de la norme Dans ces coordonnées, on a

$$\begin{cases}\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}\\ \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\end{cases} \Longrightarrow \mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e_z}$$

Donc la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est conservée. La quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. L'appelle constante des aires, voyons pourquoi ! On retrouve la deuxième loi de KEepler... En effet en un temps dt, le vecteur $\mathbf{r}$ balaye un triangle d'aire d$A = \frac{1}{2}r\,\cdot\,r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}C\,\mathrm{d}t$. Donc l'aire balayée est bien une constante du mouvement.

Illustration

https://www.eso.org/public/videos/eso0226a/ On voit bien que quand l'étoile est près du trou noir (r diminue) elle accélère ($\dot{\theta}$ augmente) ce qui est cohérent avec ce que nous venons de démontrer.

À présent, on a les outils en main pour décrire (plus ou moins) qualitativement les trajectoires envisageables. Passons par l'énergie ! On remarque que la force est conservative :

$$\mathbf{F} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\mathbf{e_r} = -\operatorname{grad}E_p \quad E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

De plus, l'énergie cinétique peut se réécrire :

$$E_c = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Donc tout se passe comme si le problème était à une dimension r avec un potentiel effectif $E_{p,eff}(r)$ tel que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \quad E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

On peut tracer ce potentiel et distinguer plusieurs cas (**à commenter en parallèle du programme Py**) :

- $E < 0$ La trajectoire est reste entre deux valeurs $r_{\min}$ et $r_{\max}$, comme pour les planètes. On peut montrer (compliqué) que la trajectoire est en plus fermée et en forme d'ellipse. On appelle ces états les états liés. Remarquons de plus, que le trajectoire circulaire correspond à une énergie minimale.
- $E = 0$ Il n'y a plus de rayon minimal... Une ellipse dont l'un des foyers est parti à l'infini est une parabole
- $E > 0$ De même, le corps se rapproche de l'étoile puis s'éloigne, la trajectoire est une hyperbole. Ce sont de états libres.

L'expérience de Rutherford, qui a mis en évidence le modèle planétaire de l'atome, est un exemple de trajectoire libre. Les particules alpha qui sont déviées de leur trajectoire à cause de la répulsion coulombienne des noyaux ont des trajectoires hyperboliques, du fait de leur grande vitesse initiale. Dans ce cas comme l'interaction est répulsive il ne peut exister que des états libres.

Le théorème de Bertrand stipule que les seules trajectoires fermées possibles (pour des forces centrales) sont celles pour des forces en r (oscillateur harmonique) et en $1/r^2$.

2.3 Troisième loi de Kepler

✍ Salamito, p.774 Brasselet p.238

Pour une trajectoire circulaire, $\dot{r} = 0$ donc

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e_r} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Alors la deuxième loi de Newton donne selon $\mathbf{e}_\theta$ que le mouvement est uniforme ($\ddot{\theta} = 0$) donc on peut réécrire

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\mathbf{e_r} \quad v = r\dot{\theta}$$

De sorte que la projection sur $\mathbf{e_r}$ donne

$$-m\frac{v^2}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}$$

Donc la vitesse a pour expression

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}}$$

Dès lors, on peut exprimer les différentes énergies et remarquer que l'on a

$$E_p = -2E_c = 2E_m = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

La loi des périodes (troisième loi de Kepler) énonce que pour toutes les planètes du système solaire, la quantité a^3/T^2 est la même (a est le demi-grand-axe de l'ellipse) Restons dans le cas où le mouvement est circulaire uniforme, alors on a $a = r$ et ainsi

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}}{r}} \Longrightarrow \frac{r^3}{T^2} = rv^2 = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

On retrouve donc la troisième loi de Kepler, mais nous on connait la constante !

3 Satellites

Cette partie se veut une application des résultats qu'on peut obtenir dans le cas d'une orbite circulaire.

3.1 Orbite géostationnaire

✍ Brasselet p.245, Salamito, p.747

Un satellite est dit géostationnaire s'il a la même période de rotation T que la Terre sur elle-même, à savoir 24 h ou 86400 s.

Pour que le satellite tourne à la même vitesse que la Terre, il est nécessaire que sa trajectoire soit circulaire et dans le plan équatorial. On a vu que sinon la vitesse variait en fonction de la distance au centre de la Terre. La vitesse du satellite est donnée (Cf. paragraphe 5.2) par :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

en notant R le rayon de la trajectoire du satellite. Or la vitesse angulaire du satellite vaut :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T}$$

soit

$$T = 2\pi\frac{R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

On en déduit le rayon d'une orbite géostationnaire de la Terre :

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

Application numérique :

$$R = \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11} * 6.10^{24} * 86400^2}{4\pi^2}} = 42300 \text{ km} = 6,6R_T$$

L'altitude correspond à $h = R - R_T = 5,6R_T = 36000$ km environ.

Lancer l'animation :
http://perso.ens-lyon.fr/camille.normand/LP/LP02/LP02___Gravitation.pdf

Mais comment on l'envoie ? On a vu que les trajectoires pouvaient avoir différentes formes selon les CI c pas évident de placer un satellite en orbite circulaire...

3.2 Vitesses cosmiques

✍ Brasselet p.243 http://perso.ens-lyon.fr/camille.normand/LP/LP02/LP02___Gravitation.pdf

On définit souvent deux vitesses cosmiques.

Vitesse de libération

La vitesse de libérationb correspond à la vitesse que l'on doit communiquer à un projectile de masse m à la surface d'un astre de masse M et de rayon R afin de lui faire quitter l'influence gravitationnelle de l'astre, c'est-à-dire de le faire arriver à l'infini avec une vitesse nulle.

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique à un objet de masse M entre un instant initial où celui-ci est à la surface de l'astre avec une vitesse v_l et un instant final où il est à une distance infinie de l'astre avec une vitesse nulle : $E_m = E_c + E_p$ or $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et $E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{d}$ (référence d'énergie potentielle placée à l'infini). La conservation de l'énergie mécanique donne donc : $E_{m;i} = E_{m;f}$ $\frac{1}{2}mv_l^2 - G\frac{mM}{R} = 0$ d'où

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ODG :

Astre	Vitesse de libération
Terre	$v_l = 11.2$ km s^{-1}
Lune	$v_l = 2.4$ km s^{-1}
Soleil	$v_l = 617.5$ km s^{-1}

Exemple des trous noirs, version pré-RG : $v_l > c$. L'idée d'un astre si massif que même la lumière ne pourrait échapper à son attraction remonte au XVIIIe siècle (1783, John Michell, redécouvert par Laplace en 1796), mais n'a que très peu de succès (absence de preuve expérimentales, démonstrations de l'aspect ondulatoire de la lumière par Young et Fresnel au XIXe.

Vitesse de satellisation minimale La vitesse de satellisation minimale correspond à la vitesse à communiquer à un objet pour le mettre en orbite au niveau de la surface d'un astre (considéré parfaitement sphérique). Cette vitesse ne dépend pas de la masse du satellite.

Pour une orbite circulaire de faible altitude donc de rayon proche de R_T. La vitesse du satellite est donnée par :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

Cette vitesse ne dépend pas de la masse du satellite

Application numérique :
$G = 6,67.10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2}, $M_T = 6.10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km, on en déduit :

$$v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 7,9.10^3 \mathrm{m.s}^{-1} = 28,5 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

en passant par le champ de pesanteur au sol :

$$mg_0 = \frac{mM_T G}{R_T^2}$$

on a :

$$g_0 = \frac{M_T G}{R_T^2} \simeq 10 \mathrm{m.s}^{-2}$$

et

$$v_0 = \sqrt{g_0 R_T}$$

Le raisonnement qui a été fait ici peut être obtenu à n'importe quelle altitude mais la première vitesse cosmique correspond par définition au cas où l'altitude h du satellite est faible devant le rayon terrestre R_T.

On met en orbite avec l'animation hop la. En pratique il faut deux impulsions :

- Une première accélération pour augmenter le rayon de l'orbite. Le problème c'est que la vitesse acquise ne correspond pas à l'orbite circulaire à son altitude donc en augmentant son rayon le satellite va adopter une trajectoire en forme d'ellipse
- Quand on atteint le rayon de l'orbite géostationaire, on ajuste donc la vitesse à la vitesse de satellisation de l'orbite géostationnaire.