LP3 – Caractère non-galiléen du référentiel terrestre

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Électromagnétisme, fondements et applications*, **Perez**
- ✍ *Optique, une approche expérimentale et pratique*, **Houard**

Prérequis

- ➢ Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Le référentiel terrestre **2**
2.1 A la recherche d'un référentiel galiléen . . . 2
2.2 Dynamique en référentiel non galiléen . . . 3

3 Force d'inertie d'entraînement **3**
3.1 Poids . . . 3
3.2 Forme de la Terre . . . 5

4 Force de Coriolis **6**
4.1 Déviation vers l'est . . . 6
4.2 Vents géostrophiques . . . 6

5 Conclusion **7**

Remarques sur les leçons précédentes

Le plan est en structure toujours le même : I) c quoi un réf galiléen et ça finit sur l'expression des forces d'inertie II) force d'inertie d'entrainement III) force de coriolis.

Remarque : les marées c'est un effet dans le ref géocentrique et pas terrestre donc en soi c'est HS. Bon après pasacl a eu 20 donc ça doit pas les gêner trop mais je préfère assurer et faire comme Benjmain/Francis et plutot faire le poids réel (+ la forme de la Terre (PTSD écrits)). Pour ce qui est de la partie coriolis, Delphine Geyer dit dans sa correction que 3 exemples c'est bcp trop ambitieux en dernière partie. Déviation vers l'est permet une résolution numérique qui sera d'après elle très appréciée du jury. et vents géostrophiques c'est une application qui plait au jury car pas que historique comme le pendule de foucault (je pense que c'est ça qu'ils visent quand ils disent marre de l'historique). Je propose donc le plan suivant :

1 Introduction

Dire qu'on a toujours considéré galiléen jusqu'ici mais keskispasse si on le fait plus ? est-ce que c'est vrai même ?

2 Le référentiel terrestre

Brasselet p158 mais je l'ai pas donc on va faire sans. Mélange de Camille, Benjamain et des Clément

2.1 A la recherche d'un référentiel galiléen

Les lois de Newton, dont le principe fondamental de la dynamique, ne peuvent s'appliquer que dans les référentiels galiléens. Le principe d'inertie suppose alors l'existence d'au moins un référentiel galiléen, cherchons le ! **Faire les schémas au tableau, on sera plus clair dans les explications**

Terrestre Le référentiel terrestre est le référentiel lié à la Terre, i.e. origine au centre de masse et trois axes pointant en direction de points fixes de la surface (on définit aussi parfois avec une origine arbitraire à la surface mais la définition rigoureuse semble être celle du centre de masse). C'est le référentiel dans lequel on a placé la plupart de nos études jusque là, tout porte à croire qu'il est galiléen... Or si on regarde le pendule de Foucault (https://www.youtube.com/watch?v=nKAMOYjwsT4 à 4min30s) on voit que le mouvement n'est pas plan comme il devrait l'être ! Ca vient du fait que nos axes sont liés à la Terre, et la Terre tourne !

Géocentrique Le référentiel géocentrique veut s'affranchir de cette rotation. Il prend alors son origine au centre de masse toujours mais cette fois les axes pointent dans la direction de trois étoiles très lointaines si bien qu'elles peuvent être considérées fixes par rapport à la rotation de la Terre autour du Soleil. Or on observe les marées, et les marées c'est un phénomène qu'on comprend par l'accélération de la Terre par le Soleil dans le référentiel de Copernic.

Copernic Le référentiel de Copernic prend son origine au centre de masse du système solaire, pratiquement confondu avec le centre de masse du Soleil, et avec des axes pointant vers des étoiles lointaines considérées comme fixe. Or encore une fois, le système solaire est dans la Voie Lactée et est accéléré par celle-ci, donc en fait il est pas galiléen non plus. (On pourrait continuer encore et encore jusqu'au principe de Mach...)

Mais alors il faut abandonner la mécanique Newtonienne ? Non, même si tout ça laisse à penser qu'il n'existe aucun référentiel rigoureusement galiléen, quand on regarde une oscillation du pendule de Foucault, il n'est pas déraisonnable de considérer que son mouvement se fait dans un plan et suit les lois de Newton. La clé c'est l'échelle de temps rattachée à notre expérience ! Si l'expérience se déroule sur une durée Δt très petite devant de temps caractéristique T du mouvement du référentiel accéléré considéré, on pourra considérer ce référentiel galiléen.

Pour le référentiel terrestre on a $T_T \sim 24\ h$ [1] qui est la période de rotation de la Terre, pour le référentiel géocentrique on a $T_G \sim 365\ j$ qui est la période de rotation de la Terre autour du Soleil et pour le référentiel de Copernic on a $T_C \sim 200$ ma (millions d'années). On voit donc que l'on est très souvent en bonne approximation galiléen dans le référentiel de Copernic et parfois dans le référentiel géocentrique aussi. Toutefois pour le référentiel terrestre c'est beaucoup moins évident... Mais ça nous empêche pas de faire de la mécanique dans le référentiel terrestre, comme

1. Remarque de la période sidérale, voir leçon des Clément, pas à préciser selon moi mais à connaître pour les questions

on l'a vu dans un cours précédent on peut passer d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen en appliquant certaines formules !

Dans la suite de cette leçon on considère le référentiel géocentrique comme galiléen

2.2 Dynamique en référentiel non galiléen

On se placera dans le cadre situé plus tôt : on considère le référentiel géocentrique comme galiléen. On s'intéresse à la dynamique d'un point matériel M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}'$, en rotation autour du référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ à la vitesse Ω. La loi de composition des vitesses et des accélérations donne alors :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge O'M$$
$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge O'\vec{M}\right) + \frac{d\Omega}{dt} \wedge O'M + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

De plus, dans notre cas précis, les deux origines coïncident et la rotation terrestre ne dépend pas du temps donc on a :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \tag{1}$$

Le PDF appliqué dans le référentiel géocentrique donne alors :

$$m\vec{a}_{M/R} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

et après composition :

$$m\vec{a}_{M/R'} = \Sigma \vec{F}_{ext} - \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}\right) - \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \tag{2}$$

On retrouve alors un PFD tout ce qu'il y a de plus classique mais avec l'addition de deux forces d'inertie supplémentaires :

- $\vec{F}_{ie}$ la force d'inertie d'entraînement. Elle dépend uniquement de la position du point M sur la Terre.
- $\vec{F}_{ic}$ la force d'inertie de Coriolis. Elle dépend uniquement de la vitesse du point M par rapport à la surface de la Terre.

La force d'inertie d'entraînement est maximale à l'équateur et y vaut $\sim 6.3 \cdot 10^6 \times \left(7.39 \cdot 10^{-5}\right)^2 = 3 \cdot 10^{-2}$ m $\cdot$ s^{-2}. Pour que la force de Coriolis soit comparable à la force d'inertie d'entraînement, il faut une vitesse d'environ $v \sim 6.3 \cdot 10^6 \times 7.39 \cdot 10^{-5} \sim 4 \cdot 10^2$ m $\cdot$ s^{-1}.

On peut donc en déduire deux choses :

- Ces effets sont négligeables devant les forces normalement étudiées (genre $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2})
- La force de Coriolis ne se ressent que pour des grandes vitesses ou bien des temps longs

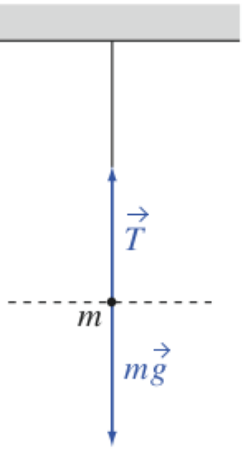
Les deux forces ont des dépendances très différentes, dans la suite de ce cours on se propose d'analyser les effets potentiels de chacune

3 Force d'inertie d'entraînement

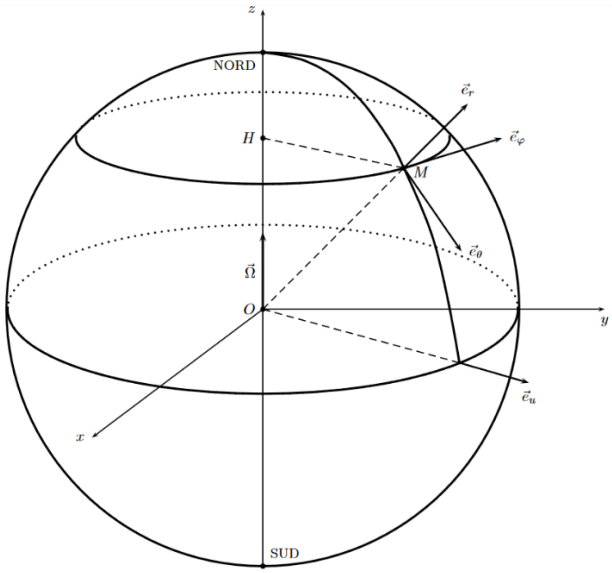
3.1 Poids

Hprépa mais en vrai plus sur les anciennes leçons

On utilise souvent la notion de poids en physique, mais qu'est-ce que c'est réellement ? En fait s'il on considère une masse m attachée à un fil, le poids de la masse m est alors défini comme l'opposé de la force de tension appliquée sur le fil par la masse m :



Si on considère le fil attaché en un point O de la surface de la Terre tel que le schéma suivant le décrit :



On a alors par application du PFD précédemment démontré, puisque la masse est immobile dans le référentiel terrestre :

$$0 = \vec{T} + \vec{F}_G - m\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}\right) \tag{3}$$

D'où :

$$\vec{P} = \vec{F}_G - m\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}\right) \tag{4}$$

Le poids ne se résume pas à l'attraction gravitationnelle ! On a donc :

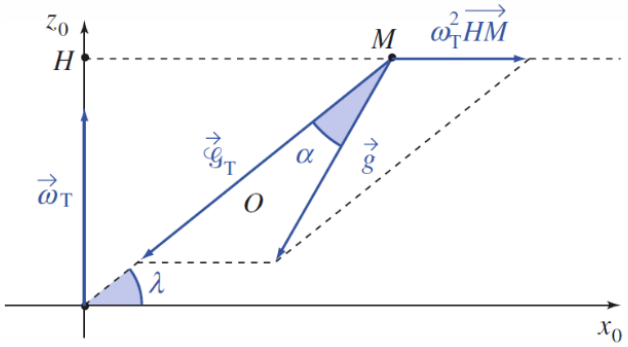
$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}\vec{e_r} + \Omega^2 H\vec{M} \tag{5}$$

Hprépa

Plusieurs remarque sont à faire. L'effet de la force d'inertie d'entraînement est ici dit axifuge, puisqu'il tend à éloigner la masse de l'axe de rotation de la Terre. C'est à l'équateur que cette force est la plus importante et elle est alors de sens parfaitement opposé à la force gravitationnelle. L'application numérique donne : $R_T\omega^2 \approx 3.210^{-2}$ ms^{-2} $\ll g$. Donc cette force a une influence assez limitée. En passant du pôle à l'équateur, on passe de $g = 9,83m.s^{-2}$ à $g = 9,78m.s^{-2}$

et on fait donc moins de 0.5 % d'erreur en considérant $g = 9,81 m.s^{-2}$ constant sur toute la surface. D'autant plus que la notre modèle est hyper simplifié, la forme non-sphérique de la Terre va aussi avoir une influence !

Une autre remarque à faire est que le poids n'est plus strictement radial, il forme un angle α avec la normale au sol :

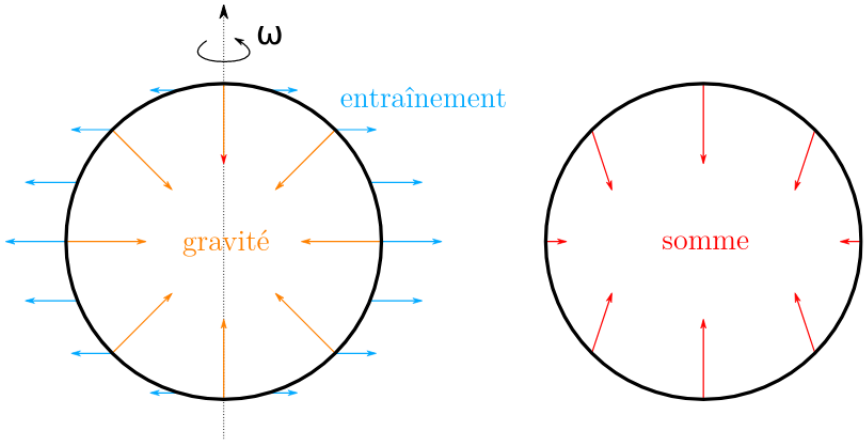


Toutefois, même remarque, à $\lambda = 45^o$ il est maximal et vaut 6^o (calcul complet dans l'application du Hprépa) c'est donc une correction dont la finesse supposerait un modèle plus complexe qui prendrait en compte la forme non sphérique de la Terre.

Mais d'ailleurs ça vient d'où la forme non-sphérique de la Terre ?

3.2 Forme de la Terre

Comme on l'a vu, à l'équateur, la force axifuge contre la force d'attraction gravitationnelle. Si on trace la somme des deux contributions sur toute la surface terrestre on obtient ça :



Donc qualitativement on voit que la Terre subit une force radiale plus importante au niveau des pôles, d'où une compression de la sphère en ellipsoïde.

On peut essayer d'estimer un ordre de grandeur de cet aplatissement. Si on considère que l'effet est faible alors on peut supposer une relation linéaire entre la variation relative de rayon et la variation relative de force soit :

$$\frac{F_{\text{equateur}} - F_{\text{pole}}}{F_{\text{moy}}} \approx \frac{\omega^2 R_{\text{equateur}}}{g} \approx \frac{1}{300}$$

Avec $R_{\text{equateur}} = 6478$ km et $R_{\text{pole}} = 6357$ km, on trouve bien

$$\frac{R_{\text{equateur}} - R_{\text{pole}}}{R_{\text{moyen}}} = \frac{F_{\text{equateur}} - F_{\text{pole}}}{F_{\text{moy}}} = \frac{1}{300}$$

4 Force de Coriolis

Même remarque, on pompe à balle ma gueule. J'ai juste choisi de tej pendule de Foucault pck bon la c'est sur qu'on aura pas le time donc autant bien développer les deux là.

4.1 Déviation vers l'est

Ce constat a été effectué en 1833 par l'allemand Ferdinand Reich qui a mesuré une déviation vers l'Est de 28mm pour une masse tombant dans un puits de mine sur la hauteur h = 158m. Cet écart de 28mm a été mesuré par rapport au point d'impact qui aurait été obtenu si le masse en chute libre avait été suivi la verticale locale.

L'étude de cette chute s'effectue dans le référentiel terrestre non galiléen R. On néglige les frottements exercés par l'air. L'équation du mouvement du corps en chute libre est donc :

$$m\vec{a}_{M/R} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R} \tag{6}$$

Résolution :

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} -\omega\cos\lambda \\ 0 \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, en notant $g = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\sin\lambda\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases}$$

Comme $g \gg \omega, \Delta zgg\Delta x, \Delta y$ et il reste :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\sin\lambda\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases} z(t) = h - \frac{gt^2}{2} \\ y(t) = \frac{\omega g t^3 \cos\lambda}{3} \\ x(t) = \frac{\omega^2 g t^4 \cos\lambda\sin\lambda}{6} \end{cases}$$

approche qualitative si jamais le quantitatif passe pas Ici, nous nous contenterons d'une approche qualitative. Dans un cas comme dans l'autre, on est amené à faire des approximations tout à fait raisonnables puisque la force de Coniolis est faible devant le poids. On considère que le champ de pesanteur g se situe selon $-\vec{e_r}$r„ l'angle entre sa direction réelle et $\vec{e_r}$ étant vraiment faible comme on l'a vu avant. On considère que la vitesse du mobile en chute libre est donc orientée selon $\vec{e_r}$, voir le schéma. La situation est donc la suivante : $\vec{g} = -g\vec{e_r}$, $\vec{v} = -v\vec{e_r}$ et $\vec{\Omega} = \Omega\left(\sin\lambda\vec{e}_r - \cos\lambda\vec{e}_0\right)$ Le produit vectoriel représentant la force de Coriolis est donc :

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\Omega\left(\sin\lambda\vec{e}_r - \cos\lambda\vec{e}_\theta\right) \wedge (-v)\vec{e}_r = 2m\Omega v\cos\lambda\vec{e}_\varphi \tag{7}$$

Cette force est bien orientée vers l'Est (sens de $+\vec{e_\phi}$) comme cela a été vérifié par Reich. Si l'on effectue un raisonnement un point moins approché, on peut mettre en évidence un second effet de la force de Coriolis. Il se produit une légère déviation vers le Sud. Les ordres de grandeurs des deux déviations ne sont pas les mêmes. La déviation vers l'Est est de l'ordre du centimètre alors que celle vers le Sud est de l'ordre du micromètre.

Avec les maings : l'objet par avec la vitesse de rotation de la Terre. En tombant, il garde cette vitesse de rotation mais sa distance au centre de la Terre diminue, donc il avance plus vite que le sol !

Essayer de faire la résolution numérique comme conseille Delphine.

4.2 Vents géostrophiques

Sur Terre, trois termes désignent le même phénomène même si les situations ne sont jamais strictement équivalentes. Le terme cyclone est le terme générique qui devient un ouragan lorsqu'il se produit dans l'Atlantique Nord ou dans le Pacifique Nord-Est. En Asie de l'Est, on parle de typhon. Dans les autres océans, on utilise plutôt le terme cyclone.Les cyclones prennent naissance dans les océans de la zone intertropicale à la faveur d'une température de l'eau élevée qui favorise la formation de vapeur d'eau dans l'atmosphère. La force de Coriolis explique le sens de rotation des ces immenses systèmes dépressionnaires. Appliquons NS à un ouragan (écoulement incompressible)

$$\mu\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v} - 2\mu\vec{\Omega}\wedge\vec{v} \tag{8}$$

Figure 1 – Ouragan Katrina - 2005, océan Atlantique Nord

Pour expliquer le sens de rotation des cyclones, notre attention ne sera portée que sur deux des termes de cette équation : celui des forces de pression et celui de la force de Coriolis. Cela revient à considérer un écoulement stationnaire, incompressible et parfait (avec askip $Re = 10^{13}$). On travaille dans le plan horizontal local à proximité du point M centre du cyclone. Ce plan sera assimilé au plan $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$ de nos représentations précédentes de la Terre. Dans un cyclone, la pression au centre du cyclone - dans l'œil du cyclone - est faible comparativement à la pression sur les bords. Le gradient de pression est donc orienté vers l'extérieur et son opposé $-\mathbf{grad}\vec{(P)}$ vers l'intérieur. Ce constat explique que la vitesse des vents est orientée vers le centre. Plaçons-nous sur le méridien passant par le point M, un peu au Sud de celui-ci. D'après ce que nous venons de dire, nous avons $\vec{v} = -v\vec{e_\theta}$, donc de l'air qui va du Sud vers le Nord Nous allons évaluer la force de Coriolis qui agit sur le fluide :

$$-2\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2\mu\Omega\,(\sin\lambda\vec{e_r} - \cos\lambda\vec{e_\theta}) \wedge (-v)\vec{e_\theta} = 2\mu\Omega \sin\lambda v\vec{e_\varphi} \tag{9}$$

La force de Coriolis est orientée selon le vecteur unitaire $\vec{e_\phi}$, elle provoque la rotation du fluide dans le cyclone dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce calcul a été mené pour une vitesse particulière, théoriquement il faut le faire pour chaque direction de vitesse pour conclure.

On peut le faire rapidement avec la règle de la main droite... On projette la force de Coriolis dans le plan horizontal :

$$\mathbf{F_{ich}} = 2m\omega_T \sin\lambda \mathbf{v} \times \mathbf{e_z}$$

Avec $\vec{e_z}$ la verticale. Ainsi cette force pousse toujours vers la droite du mouvement quand on est dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud. Imaginons alors un point de dépression, le fluide y est attiré. Il commence alors à tourner autour dans le sens trigonométrique (hémisphère Nord), en régime stationnaire, il y a un équilibre entre Coriolis qui pousse hors du cercle et la gradient de pression qui tire vers l'intérieur.

5 Conclusion

pas d'idée là comme ça... peut-être l'utilité des chgts de ref au-dela des pb de méca (ex de la rmn)

Retours

- Préciser clairement la définition de vents géostrophiques.

- Pourquoi pas montrer la différence de l'équation géostrophique avec Bernoulli (ici pression constante sur ligne de courant, pas de délire relation pression-vitesse comme habituellement)