

LP4 – PRÉCESSION DANS LES DOMAINES MACROSCOPIQUES ET MICROSCOPIQUES

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L3

Bibliographie

- ✦ *Électromagnétisme, fondements et applications*, **Perez**
- ✦ *Optique, une approche expérimentale et pratique*,
Houard

Prérequis

- Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

Table des matières

1	Domaine maroscopique	2
1.1	Paramétrage et caractérisation du système	2
1.2	Approximation gyroscopique	3
1.3	Equation de précession	4
2	Domaine microscopique	5
2.1	Moment magnétique et moment cinétique	5
2.2	Précession de Larmor	6
2.3	Application à la RMN	7
3	Remarques	8

Remarques sur les leçons précédentes

Pas bcp de commentaires si ce n'est qu'il ne faut pas privilégier une échelle plutôt qu'une autre niveau temps. Être rigoureux et clair au niveau des référentiels dans lesquels on se place. Y'a la bilbio, leçon de pascal très fournie si jamais, celle de froustey bien ficellée.

Introduction

Définition précise, vectorielle : le vecteur \vec{A} précesse autour d'un axe \vec{u}_z à la vitesse angulaire Ω si

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{A}$$

Définition orale : changement d'orientation de l'axe de rotation propre d'un objet au cours du temps autour d'un axe donné. En effet, montrons les propriétés : $\|\vec{A}\| = \text{cste}$ et $\vec{A} \cdot \vec{e}_z = \text{cste}$. Donc l'extrémité de \vec{A} décrit un cône autour de \vec{e}_z .

1 Domaine maroscopique

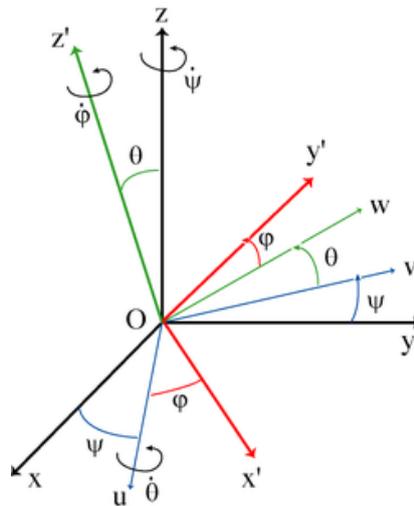
➤ Mécanique II BFR

On fait tourner une toupie

On observe une précession de son axe de rotation et elle tombe pas à cause du poids, pourquoi? C'est ce qu'on va essayer d'expliquer ici.

1.1 Paramétrage et caractérisation du système

Comme vous le savez, pour décrire le mouvement d'un solide, il faut trois coordonnées et trois angles. Le mouvement qui nous intéresse ici est celui de la toupie autour d'un point de contact avec la table que l'on suppose fixe, on a donc juste besoin de 3 angles. Une manière de les choisir est selon le système des angles d'Euler *expliquer les trois changements de référentiel au tableau, avec diagramme flèche et dire lequel est le réf du labo, lequel est le référentiel propre du solide puis les montrer sur la toupie :*



Le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ résultant s'écrit alors donc simplement sous la forme d'une somme vectorielle de trois vecteurs rotation instantanée :

$$\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{e}_{z'} \tag{1}$$

On appelle alors ψ l'angle de précession, θ l'angle de nutation et ϕ l'angle de rotation propre.

La question que l'on se pose maintenant c'est dans quel référentiel va-t-on travailler? Il est évident que l'on préfère se placer dans le référentiel propre \mathcal{S} du solide puisque dans la base associée, son opérateur d'inertie est diagonal :

$$[I]_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{\mathcal{S}} \quad (2)$$

On aurait donc tendance à vouloir se placer dans dans le référentiel \mathcal{S} . Mais on peut aussi remarquer que notre toupie est axisymétrique! Donc l'opérateur sera encore diagonal dans le référentiel intermédiaire $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_{z'})$ et comme ça on a moins de transformations à faire pour ré-exprimer le vecteur rotation instantané dans le référentiel d'étude, c'est tout bénéf (pour info, il s'appelle référentiel de Resal).

Dans ce référentiel d'étude, on peut donc ré-exprimer le vecteur rotation et l'opérateur d'inertie (on peut faire les calculs de projection au tableau pour le vecteur rotation) :

$$[I]_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_r} \quad (3)$$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_r} \quad (4)$$

↓ Ok tout est paramétré, c'est parti! Enfin presque, on va pas faire de la physique sans simplifier les choses comeme

1.2 Approximation gyroscopique

Quand on regarde le mouvement de la toupie qu'on étudie, on voit que sa vitesse de rotation propre est bien plus grande que les deux autres. On va donc proposer une approximation pour simplifier les calculs : l'approximation gyroscopique. Nous vérifierons son bien fondé a posteriori.

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \approx \dot{\phi} \vec{e}_{z'} \quad |\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}| \quad |\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}| \quad (5)$$

On peut alors calculer simplement le moment cinétique de la toupie dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire¹ en appliquant l'opérateur moment d'inertie au vecteur rotation instantané simplifié et il vient alors :

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_z \dot{\phi} \vec{e}_{z'} \quad (6)$$

Dans le cadre de l'approximation gyroscopique, le moment cinétique de la toupie est donc toujours orienté selon l'axe de rotation propre de celle-ci.

↓ Bon ok maintenant on peut vraiment résoudre le problème

1. Attention c'est bien le moment cinétique dans le référentiel du labo que l'on calcule ici puisque l'on utilise le vecteur rotation instantané de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} , plusieurs anciennes leçons confondent "exprimé dans la base" et "dans la base"... et après leur TMC ne veut plus rien dire.



1.3 Equation de précession

On applique alors le TMC au point fixe dans le référentiel du laboratoire à la toupie (schéma au tableau, ajouter l) :

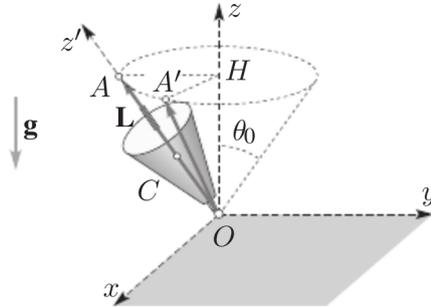


FIG. 26.5.

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OC} \wedge m\vec{g} = \vec{L}_O \wedge \frac{ml}{L_O} \vec{g} = \frac{mgl}{L_O} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$$

On a bien une équation de précession (rappeler ce que cela implique donc $\dot{\phi}$ constant et direction constante)! Expression plus simple :

$$\vec{\Omega}_p = \frac{mgl}{L_O} \vec{e}_z = \frac{mgl}{J|\dot{\phi}|} \vec{e}_z$$

L'action verticale du poids provoque donc un mouvement dans le plan horizontal, c'est le paradoxe gyroscopique! (Le moment cinétique tourne autour de l'axe de la force, dans le "sens opposé"). Revenons maintenant sur l'approximation faite (Pérez p418). Si on note R le rayon de giration de la toupie tel que $I_z = mR^2$ on a :

$$\Omega_p = \frac{gl}{R^2 \dot{\phi}} \quad (7)$$

Pour une toupie conique, de hauteur $h = 5$ cm et de rayon de base $R_b = 3$ cm, qui tourne à la vitesse de $30 \text{tr} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve, puisque $l = 3h/4$ et $I_3 = 3mR_b^2/10$:

$$\Omega_p = \frac{mgl}{I\Omega} = \frac{5gh}{2R_b^2\Omega} \approx \frac{5 \times 9,80 \times 0,05}{2 \times 9 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 30} \approx 7,2 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Donc on est large dedans c'est bon.

Pour illustrer cela, on peut utiliser le gyroscope ici en le déséquilibrant. Sans le déséquilibrer, la situation correspond à une toupie parfaitement verticale qui tourne autour de son axe. Si on ajoute une masse en périphérie, on déplace simplement son centre de masse et on correspond alors à la situation de la toupie penchée ici.



On vérifie la dépendance en $\dot{\phi}$ de Ω_p en direct et le sens de rotation en fonction du sens de la force appliqué

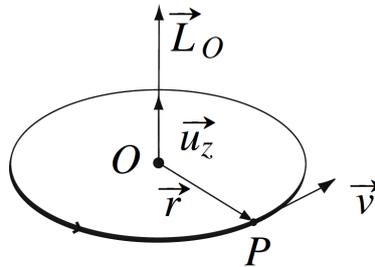
Ce phénomène de précession n'est pas qu'un cas d'école puisqu'il permet aussi d'expliquer la précession des équinoxes au niveau de la Terre. (c'est un peu la porte ouverte aux questions donc s'y préparer si on le dit, tout est dans le BUP 889 ou dans le Pérez p419)

2 Domaine microscopique

2.1 Moment magnétique et moment cinétique

♣ Bellac

Dans un modèle d'atome classique, l'électron décrit une orbite autour du noyau. L'interaction entre le noyau et l'électron est une interaction attractive de type newtonien, la trajectoire la plus simple pour l'électron est une trajectoire circulaire. C'est ce modèle, appelé modèle planétaire, que l'on adoptera : l'électron décrit un cercle autour du noyau.



Le moment cinétique de l'électron dans son mouvement autour du noyau s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}_z$$

Rappelons que pour un mouvement dans un champ de forces central, ce moment angulaire est un vecteur fixé, perpendiculaire au plan de l'orbite.

Or l'électron étant une particule chargée, son orbite est équivalente à une boucle de courant circulaire, parcourue par un courant d'intensité $I = q/T$, où $q = -e$ est la charge de l'électron et T la période de son mouvement. Le moment magnétique associé est donc $\vec{M} = \frac{q}{T}\pi r^2\vec{u}_z$. Or $T = \frac{2\pi r}{v}$, d'où

$$\vec{M} = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2\vec{u}_z = \frac{qvr}{2}\vec{u}_z = \frac{q}{2m}\vec{L}_O = -\frac{e}{2m}\vec{L}_O$$

Ce calcul met en évidence une relation de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique. Le rapport de proportionnalité $\gamma = -\frac{e}{2m}$, tel que $\vec{M} = \gamma\vec{L}_O$ est appelé rapport gyromagnétique de l'électron. Le mouvement des électrons dans les atomes entraîne donc l'existence d'un magnétisme atomique et de manière analogue, le mouvement des protons dans les noyaux atomiques celle d'un magnétisme nucléaire. On remarque que dans le modèle de Bohr, le moment angulaire étant fixé par le mouvement à force centrale, l'approximation gyroscopique est toujours vérifiée.

L'intérêt de ce modèle est qu'il aboutit à un résultat central, qui reste vrai en mécanique quantique est qu'on peut associer un moment magnétique à un moment cinétique (orbital ou intrinsèque) et qu'ils sont colinéaires.

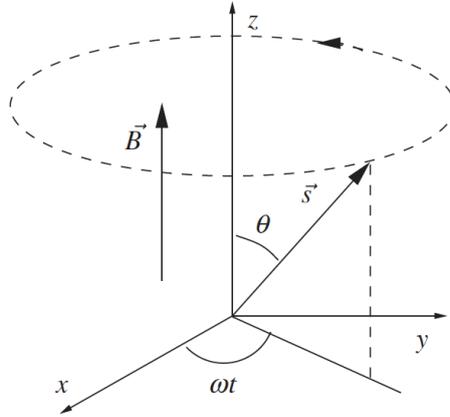
En réalité, en plus du moment cinétique orbital, l'électron possède un moment cinétique intrinsèque. On peut toujours définir un moment magnétique intrinsèque, proportionnel au moment cinétique mais le rapport gyromagnétique n'est pas le même. En général, $\gamma = gq/2m$ où g est le facteur de Landé. Pour le moment orbital, $g = 1$. Pour le moment intrinsèque de l'électron, $g \simeq 2,0023$. Pour le moment intrinsèque du proton, $g_p \simeq 5.6$. Il faut un traitement quantique, qui fait sortir un rapport gyromagnétique. g est autour de l'unité. Comme les masses ont un rapport 2000, c'est le magnétisme des électrons qui domine celui du proton (et du neutron). Malgré ce facteur défavorable, le magnétisme nucléaire joue un rôle pratique considérable en étant à la base de la résonance magnétique nucléaire comme nous le verrons plus tard.

L'action du poids sur les électrons ou les protons étant négligeable devant l'interaction électromagnétique, on ne pourrait pas observer de précession sous l'action seule du poids comme précédemment. Nous allons voir que le mouvement de précession apparaît si un champ magnétique est appliqué.



2.2 Précession de Larmor

✦ Cagnac p240 Examinons en physique classique le mouvement d'un moment magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ magnétique constant \vec{B} .



Ce moment magnétique est soumis à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, et l'équation du mouvement est

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\Gamma}(\text{G}) = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par le rapport gyromagnétique γ et en tenant compte de la relation de proportionnalité entre le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$ et le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de l'électron considéré, nous obtenons :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \gamma \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B} = (-\gamma \vec{B}) \times \vec{\mathcal{M}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathcal{M}}$$

avec La dérivée du vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ est perpendiculaire au champ \vec{B} et à $\vec{\mathcal{M}}$; c'est-à-dire que le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ se déplace perpendiculairement à l'effort exercé sur lui par le moment $\vec{\Gamma}$ des forces magnétiques, au contraire d'une aiguille aimantée, qui, soumise au même effort, tendrait à s'orienter parallèlement à la direction du champ. On retrouve là une propriété classique des gyroscopes, facile à expérimenter : lorsqu'on exerce un effort sur l'axe d'un gyroscope, l'axe se déplace perpendiculairement à cet effort.

L'équation ci-dessus signifie alors que le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ subit un mouvement de rotation dont le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est parallèle au champ \vec{B} . Puisque γ est négatif, le vecteur $\vec{\omega}$ est de même sens que le champ \vec{B} ; et cette rotation s'effectue dans le sens trigonométrique autour de B . Le calcul que nous venons de faire apparaît comme analogue à celui du mouvement de précession de l'axe de rotation d'un gyroscope.

L'action du champ magnétique n'est donc pas d'orienter mais de faire tourner autour de lui le gyroscope aimanté que constitue l'atome.

L'expression théorique du rapport gyromagnétique γ permet de calculer la valeur numérique de la fréquence de rotation de Larmor :

$$\nu_{\text{Larmor}} = \frac{|\omega|}{2\pi} = \frac{|\gamma|}{2\pi} B = \frac{ge}{4e} B$$

$$B = 1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla } (\approx \text{ champ terrestre}) \Rightarrow \nu_{\text{Larmor}} = 1,4 \cdot 10^{+6} \text{ s}^{-1} \\ = 1,4 \text{ MHz}$$

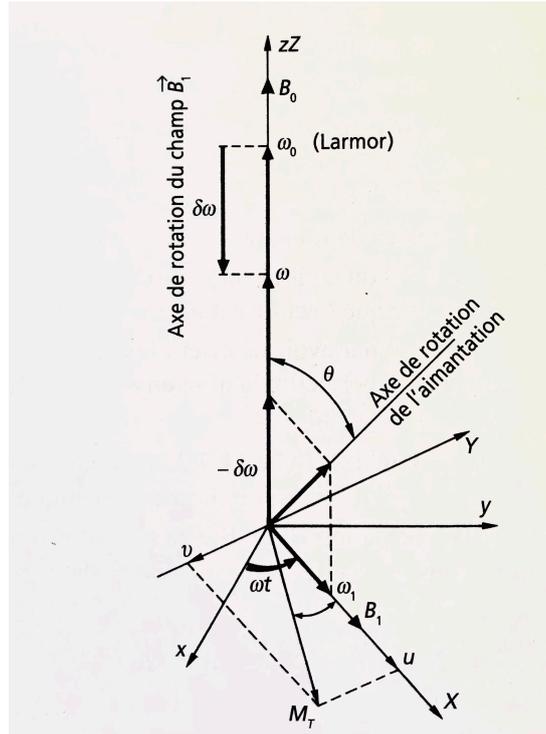
$$B = 1 \text{ Tesla (gros électro-aimant en fer)} \Rightarrow \nu_{\text{Larmor}} = 1,4 \cdot 10^{+10} \text{ s}^{-1} \\ = 14 \text{ GHz}$$

La fréquence de la précession de Larmor est donc caractéristique du champ magnétique ressenti par la particule possédant un moment magnétique. Exciter ces fréquences revient donc à sonder l'environnement de la particule : c'est le principe de la RMN.

2.3 Application à la RMN

➤ Cagnac p256-258

La RMN consiste à étudier la modification de la précession de Larmor en présence d'un faible champ magnétique tournant \vec{B}_1 perpendiculaire au champ statique \vec{B}_0



Écrivons le théorème du moment cinétique, mais en tenant compte maintenant des deux champs \vec{B}_0 et \vec{B}_1 . En prévision d'un changement de repère ultérieur, nous précisons que la dérivée est calculée dans le repère fixe du laboratoire $Oxyz$:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{Labo}} = \vec{\Gamma} = \vec{M} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

et en tenant compte de $\vec{M} = \gamma \vec{L}$, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{Labo}} = \vec{M} \times (\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1) = +(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{M}, \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$$

Nous avons introduit le vecteur $\vec{\omega}_1$ par analogie avec le vecteur rotation de Larmor ; mais ce nouveau vecteur est mobile et suit le champ tournant dans sa rotation. On simplifie la solution du problème en quittant le repère du laboratoire $Oxyz$, et en utilisant un nouveau repère, dans lequel le champ \vec{B}_1 paraît fixe : c'est le trièdre ayant même axe Oz (parallèle au champ fixe \vec{B}_0) que le repère du laboratoire, mais dont l'axe OX coïncide avec la direction et le sens du champ tournant \vec{B}_1 . Par rapport au trièdre du laboratoire $Oxyz$, ce nouveau trièdre $OXYz$ tourne avec la vitesse angulaire ω du champ tournant.

Nous devons écrire le théorème du moment cinétique dans un repère absolu ; c'est ce que nous avons fait précédemment (pour le problème en question, le repère du laboratoire peut jouer ce rôle de repère absolu). Mais nous pouvons ensuite appliquer la formule de composition des vitesses entre repères en mouvement :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{Labo}} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{trièdre}} + \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{entraînement}} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{trièdre}} \text{ tournant} + \vec{\omega} \times \vec{M}$$

On en déduit dans le trièdre tournant l'équation :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\text{trièdre}} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\text{Labo}} - \vec{\omega} \times \vec{M} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) \times \vec{M} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\delta\omega}) \times \vec{M}$$

en introduisant le vecteur $\vec{\delta\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$ qui représente l'écart entre le vecteur rotation du champ \vec{B}_1 et le vecteur rotation de Larmor. Puisque, à l'intérieur du trièdre tournant, le vecteur $\vec{\omega}_1$ est fixe, l'interprétation est simple : le moment \vec{M} effectue un mouvement de rotation dont le vecteur rotation est $\vec{\omega}_1 - \vec{\delta\omega}$. Ce vecteur rotation vaut en module $\sqrt{\omega_1^2 + \delta\omega^2}$; et son angle θ avec l'axe Oz est donné par $\tan \theta = -\omega_1/\delta\omega$. Nous nous intéresserons seulement à la composante sur l'axe de rotation Oz du moment \vec{M} , appelée composante longitudinale \mathcal{M}_z (le long du champ magnétique).

- Si les vitesses angulaires ω et ω_0 sont très différentes l'une de l'autre, c'est-à-dire que $|\delta\omega| \gg \omega_1$, l'axe de cette nouvelle rotation (dans le trièdre tournant) est pratiquement confondu avec l'axe Oz ; et la composante \mathcal{M}_z du moment magnétique ne varie pratiquement pas. L'orientation du moment \vec{M} par rapport au champ fixe \vec{B}_0 ne change pas. Comme nous l'avions prévu, le champ tournant \vec{B}_1 n'a pratiquement aucun effet sur les atomes.
- Si les vitesses angulaires ω et ω_0 sont, au contraire, voisines, c'est-à-dire que $|\delta\omega| \leq \omega_1$, la composante \mathcal{M}_z subit une variation importante (cf LP43)
- En particulier lorsque $\omega = \omega_0$, ou $\delta\omega = 0$, l'axe de rotation de \vec{M} (à l'intérieur du trièdre tournant) est confondu avec OX , et la variation de la composante \mathcal{M}_z a l'amplitude maximale : $\mathcal{M}_z = C \cos \omega_1 t$. Si on limite le temps t pendant lequel agit le champ tournant à une demi-période $T/2 = \pi/\omega_1$, le vecteur moment magnétique effectue un demi-tour autour de \vec{B}_1 et la composante longitudinale \mathcal{M}_z change de signe.

En résumé, le petit champ magnétique tournant \vec{B}_1 a une action efficace sur l'atome seulement lorsque sa fréquence de rotation : $\omega/2\pi$ est très voisine de la fréquence de Larmor $\omega_0/2\pi = -(\gamma/2\pi)B_0$; d'où le nom de résonance magnétique donné à ce phénomène. Lorsque l'accord des fréquences est réalisé, le champ tournant est capable de modifier profondément l'orientation du moment magnétique atomique par rapport au champ magnétique fixe \vec{B}_0 .

Une analyse de RMN se déroule en 3 étapes : les moments des différents atomes présents dans l'échantillon s'alignent selon z avec un champ permanent. Ensuite on met un champ perpendiculaire tournant. Enfin, on mesure l'amplitude de l'onde émise par relaxation en fonction de la fréquence du champ tournant. Les différentes fréquences de résonance dépendent du champ B perçu par les atomes, donc de leur environnement.

3 Remarques

- Limite moi je ferais pas l'aparté de MQ sur le spin.
- Peut-être préciser que le moment magnétique des protons est bcp plus faible du fait de leur masse (dépendance en $\frac{1}{m}$), c'est pour ça qu'on considère que les électrons après.