

LP7 - DYNAMIQUE RELATIVISTE

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : Classes préparatoires

Bibliographie

✦ <i>Mécanique I</i> , BFR	PFD
✦ <i>Introduction à la relativité</i> , Langlois	Collisions
✦ <i>Introduction à la relativité restreinte</i> , Hladik	Partie III

Table des matières

1	Vers un PFD relativiste	2
1.1	Rappels de cinématique	2
1.2	Quadrivecteur énergie-impulsion	2
1.3	Principe fondamental de la dynamique relativiste	3
2	Chocs entre particules	4
2.1	Collisions élastiques	4
2.2	Collisions inélastiques	5
3	Mouvement relativiste accéléré d'une particule chargée	6
3.1	Accélération par un champ électrique	6
3.2	Ajout d'un champ magnétique : les accélérateurs de particules	7

Remarques sur les leçons précédentes

2017 La cinématique relativiste n'est pas l'objet de cette leçon. De plus, il ne faut pas se limiter à une suite de formules et de calculs. L'utilisation des quadrivecteurs peut être judicieuse. Des illustrations de physique moderne et/ou des situations réelles devraient être décrites et analysées. 2

2015 La leçon doit souligner l'intérêt du formalisme quadrivectoriel. Jusqu'en 2013, le titre était : Dynamique relativiste. Exemples.

Le plan est toujours le même et plutôt bien ficelé. Niveau biblio c'est les leçons et le cours de Camille mais sinon y'a tout dans le BFR et le Langlois pour les deux premières et Hladik pour la dernière.

Introduction

1 Vers un PFD relativiste

1.1 Rappels de cinématique

Le temps propre d'une particule τ , scalaire invariant attaché à la particule tel que $dt/d\tau = \gamma$ où

- t est le temps dans le référentiel \mathcal{R}
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avec $\beta = \frac{v}{c}$
- v la vitesse de la particule dans le référentiel \mathcal{R}

On repère un évènement dans l'espace-temps par un quadrivecteur de position : $X^\mu = (ct, x, y, z)$

La quadri-vitesse $U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ est définie comme $\frac{d}{d\tau} X^\mu$ et on retrouve alors l'expression ci-dessus. Mais ce petit calcul est refait juste après pour P^μ

L'intérêt des quadrivecteurs est qu'on peut facilement changer de référentiel avec la matrice de Lorentz : exemple avec le vecteur position, \mathcal{R}' galiléen en translation uniforme à la vitesse v le long de Ox par rapport à \mathcal{R} et dont les axes sont parallèles à ceux de \mathcal{R} (conditions de la transformation spéciale de Lorentz)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

La norme d'un quadrivecteur calculée grâce à la métrique de Minkowski $A_{1,1} = 1, A_{i,i} = -1, A_{i,j} = 0$ est invariante par les transformations de Lorentz définies ci-dessus.

↓ Par analogie classique si on veut un PFD il nous faut une impulsion

1.2 Quadrivecteur énergie-impulsion

En mécanique classique, l'impulsion est définie par le produit de la masse de la particule et de sa vitesse, nous pouvons regarder ce qu'on obtient en multipliant U^μ par m la masse de la particule :

$$\vec{P} = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = (m\gamma c, \vec{p})$$

On a posé $\vec{p} = m\gamma \vec{v}$ l'impulsion relativiste de la particule. On peut noter que la définition de l'impulsion est la même qu'en classique.

Comme la mécanique classique est un cas particulier de la relativité restreinte qui correspond aux vitesses faibles devant c , il est important de vérifier que les définitions que l'on va poser aujourd'hui sont compatibles avec cette limite. Ainsi, ici, $\vec{p}_{\text{relat}} = m\gamma \vec{v} = m \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}$, un développement limité de γ en $\frac{v}{c} \ll 1$ donne $\gamma = 1$ ce qui donne $\vec{p}_{\text{relat}} = m\vec{v}$,

ce qui est le résultat classique.

Regardons un peu le terme temporel de $\vec{P} \cdot m\gamma c$ est une masse multipliée par une vitesse, ce qui n'est pas évident à interpréter. Pour faciliter l'interprétation, on peut multiplier \vec{P} par c , on a alors

$$\vec{P} = c \times \vec{P} = (m\gamma c^2, c\vec{p})$$

On retrouve alors un terme temporel qui a la dimension d'une énergie (analogie avec l'énergie cinétique d'une voiture $\frac{1}{2}mv^2$) que l'on va noter E et considérer comme l'énergie de la particule. On a $E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Un développement limité en $\frac{v}{c} \ll 1$ donne $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$. Pour une particule au repos on retrouve la relation masse-énergie $E_0 = mc^2$. Nous reviendrons sur cette équivalence dans quelques instants mais nous pouvons déjà comprendre pourquoi les masses de particules élémentaires sont souvent données en eV, unité d'énergie (ex le proton, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg ce qui correspond à une énergie de 938MeV).

Remarque : Si on applique la relation $E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ à un photon de vitesse $v = c$, on a que le facteur γ diverge! Pour garder une énergie finie on voit alors la nécessité de poser une masse nulle pour le photon! On peut malgré tout définir un quadri-vecteur énergie-impulsion pour le photon ($(E/c, E/c\vec{n})$ avec \vec{n} la direction de propagation).

Une dernière propriété importante du quadri-vecteur énergie impulsion est la conservation de sa norme qui est indépendante du référentiel d'étude : On a $\vec{P} = (E, c\vec{p})$ et $\|\vec{P}\|^2 = E^2 - p^2c^2$. On rappelle les définitions de E et \vec{p}

$$E = m\gamma c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = m\gamma \vec{v} \quad (\implies E\vec{v} = c^2\vec{p})$$

$$\|\vec{P}\|^2 = E^2 - c^2p^2 = m^2\gamma^2c^4 - m^2\gamma^2c^2v^2 = m^2\gamma^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^4$$

Ainsi, pour une particule caractérisée par une impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$, l'égalité des normes de \vec{P} donne

$$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$$

, cela donne la relation relativiste entre l'énergie de la particule en mouvement E et son impulsion \vec{p} , $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Là encore un DL en $\frac{v}{c} \ll 1$ redonne

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

En relativité, il n'y a pas nécessairement conservation de la masse mais toujours conservation de l'énergie ∇_{BFR} p.262. Par exemple pour la combustion du dihydrogène, $\Delta E = -241 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ donc $\Delta m = \Delta E/c^2 = 2.68 \cdot 10^{-12} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ donc par exemple pour une mole ($m \sim 10 \text{ g}$), la variation relative de masse est $\frac{\Delta m}{m} \sim 10^{-10}$ ce qui est heureusement très faible! Donc en pratique on ne mesure pas comme ça de variation de masse.

↓ Ok bah PFD mtn

1.3 Principe fondamental de la dynamique relativiste

∇_{BFR} p 265.

On cherche un équivalent relativiste de $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$. Par analogie avec la mécanique relativiste, on peut définir le quadrivecteur force \vec{F} tel que, dans un référentiel d'inertie, on a :

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = \hat{F}$$

En identifiant à l'expression de la quadri-impulsion, on a pour la quadri-force

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \left(\frac{d}{d\tau} \frac{E}{c}, \frac{d}{d\tau} \vec{p} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma \\ \vec{F} &= \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \\ \vec{F} &= \gamma \left(\frac{1}{cdt} \frac{dE}{dt}, \vec{f} \right) \end{aligned}$$

Et on peut expliciter le terme temporel :

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \implies 2E \, dE = 2c^2 \vec{p} \, d\vec{p} \\ \implies \frac{dE}{dt} = c^2 \frac{\vec{p}}{E} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Avec $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$ et aussi $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et puis $E = \gamma m c^2$, ce qui donne finalement

$$\vec{F} = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \vec{f} \right)$$

On vérifie alors bien que dans la limite classique $\gamma \rightarrow 1$, $\vec{p} = \gamma m \vec{v} \rightarrow m \vec{v}$ la partie spatiale du PFD relativiste redonne bien $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$, le PFD classique.

Le terme spatial est le PFD généralisé et le terme temporel est le théorème de l'énergie cinétique généralisé !

↓ Très bien on a tous les outils, expliquons des trucs avec mtn

2 Chocs entre particules

Définition : On dit que deux particules entrent en collision lorsqu'elles subissent une variation de vitesse dans une zone quasi-ponctuelle de l'espace et du temps.

On distingue alors deux cas :

- Les collisions sont dites élastiques si elles conservent le nombre et la nature des particules impliquées.
- Les collisions sont dites inélastiques le cas échéant.

Dans le cas d'une étude de collisions entre particules, on fait l'hypothèse que durant le laps de temps infiniment faible qui représente la collision le système peut être considéré comme isolé. On va donc pouvoir mettre à profit la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

2.1 Collisions élastiques

☛ Langlois p65 (pas sur le drive donc j'utilise <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/relativite.pdf> p123)

Pour illustrer le phénomène de collision élastique, considérons la diffusion d'un photon de haute énergie par un électron initialement immobile :

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^- \quad (2)$$

On considère que le photon incident se propage selon l'axe (Ox) et qu'après la collision le photon et l'électron diffusés ont leur trajectoire contenue dans le plan (xOy). L'électron emportant l'énergie cinétique avec lui, le photon diffusé est nécessairement moins énergétique que le photon incident et on note ν' sa nouvelle fréquence. Le but ici est de relier le changement de fréquence à l'angle de diffusion.

Les 4 quadri-vecteurs énergie-impulsion à considérer sont les suivants (on omet la composante selon z car nulle pour tous) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (h\nu/c, h\nu/c, 0) \\ \mathbf{P}' &= (h\nu'/c, h\nu'/c \cos \theta, h\nu'/c \sin \theta) \\ \mathbf{Q} &= (mc, 0, 0) \\ \mathbf{Q}' &= (\mathcal{E}/c, q_x, q_y) \end{aligned} \quad (3)$$

avec \mathcal{E} l'énergie de l'électron diffusé et \vec{q} son impulsion. La conservation de l'énergie et de l'impulsion implique alors :

$$\mathbf{Q} + \mathbf{P} = \mathbf{Q}' + \mathbf{P}' \quad (4)$$

que l'on peut ré-écrire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 &= (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}')^2 \\ \mathbf{P}^2 + \mathbf{P}'^2 - 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' &= \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}'^2 - 2\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}'. \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant l'expression de la norme du quadrivecteur énergie-impulsion (photon de masse nulle, électron de masse m) et en réalisant les produits scalaires dans l'espace de Minkowski on a :

$$\frac{\hbar^2 \nu \nu'}{c^2} (1 - \cos \theta) = m (\mathcal{E} - mc^2) \quad (6)$$

La conservation de l'énergie seule donne par ailleurs :

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \mathcal{E} \quad (7)$$

d'où finalement :

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (8)$$

avec $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 0,2 \text{ \AA}$ la longueur d'onde de Compton de l'électron. Cette longueur d'onde étant très faible, cet effet n'est significatif que pour des photons de haute énergie. L'effet pour un photon visible est négligeable. Cette relation a été établie par A. Compton puis vérifiée expérimentalement en 1923 en envoyant des rayons X sur du graphite. Cela lui a valu le prix Nobel en 1927.

↓ Et si on est inélastique ?

2.2 Collisions inélastiques

↗ cours de Camille

Le cas inélastique est rendu possible grâce à l'équivalence masse-énergie. C'est notamment le cas de la fission nucléaire : la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales. Ce défaut de masse correspond alors à une énergie libérée, correspondant ici à l'énergie de liaison entre nucléons (OdG de 8 MeV environ), qui peut être ensuite récupérée pour la convertir en énergie électrique.

Dans le cas inverse, on comprend qu'il faut apporter de l'énergie pour que la réaction soit réalisable. Mais quelle quantité nécessaire ? Considérons la collision :

$$a_1 + a_2 \longrightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (9)$$

On se place dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire où la particule est au repos. La conservation de l'énergie implique alors :

$$E_{a_1} + m_{a_2} c^2 > \sum_i m_{b_i} c^2 \quad (10)$$

Plaçons nous alors dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* (il existe et est inertielle). Dans celui-ci, après collision on a l'impulsion totale :

$$P_f^* = \left(\frac{E^*}{c}, \vec{0} \right) \quad E^* \geq \sum_i m_{b_i} c^2 \quad (11)$$

dans \mathcal{R} le quadrivecteur initial s'exprime :

$$P_i = \left(\frac{E_{a_1}}{c} + m_{a_2} c, \vec{p}_{a_1} \right) \quad (12)$$

par conservation du quadrivecteur énergie impulsion ET invariance de la norme on a :

$$P_i^2 = P_f^{*2} \quad (13)$$

soit

$$\left(\frac{E_{a_1} + m_{a_2}c}{c}\right)^2 - \vec{p}_{a_1}^2 = \frac{E^{*2}}{c^2} \geq \left(\sum_i m_{bi}\right)^2 c^2 \quad (14)$$

en développant utilisant l'expression de E_{a_1} pour développer le terme en $E_{a_1}^2$ on trouve finalement :

$$E_{a_1} \geq \frac{(\sum_i m_{bi})^2 - (m_{a_1}^2 + m_{a_2}^2)}{2m_{a_2}} c^2 = E_s \quad (15)$$

c'est donc l'énergie de seuil que la particule a_1 doit avoir pour que la collision puisse avoir lieu. Elle est d'autant plus grande que le défaut de masse est grand, ce qui est logique.

Si on prend l'exemple de la collision proton-proton réalisée dans les rayons cosmiques et reproduite au CERN :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (16)$$

on peut calculer l'énergie de seuil (masse d'un antiproton c'est la même qu'un proton) et on a alors $E_s = 5,6 \text{ GeV}$. Si on inverse la formule reliant l'énergie à la vitesse on trouve que cela correspond à $v = \sqrt{\frac{35}{36}}c = 0,99 c^1$.

↓
Ok donc il faut accélérer à balle si on veut faire ça

3 Mouvement relativiste accéléré d'une particule chargée

3.1 Accélération par un champ électrique

↪ Hladik p142

Considérons une particule de charge q et de masse m initialement immobile à l'origine du référentiel du laboratoire supposé inertiel (t'as vu la bête de phrase). Appliquons un champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{e}_x$ et étudions le mouvement résultant. D'après le principe fondamental de la dynamique on a :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{e} \quad (17)$$

d'où :

$$p_x(t) = q\mathcal{E}t \quad (18)$$

Y'a l'air d'avoir de la relativité enculer ? Le changement avec la relativité c'est que l'impulsion n'est plus proportionnelle à la vitesse. En utilisant $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $E = \gamma mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ on a :

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}} \quad (19)$$

soit finalement ici :

$$v_x(t) = \frac{qc\mathcal{E}t}{\sqrt{m^2c^2 + (q\mathcal{E}t)^2}} \quad (20)$$

On peut comparer ce résultat relativiste au résultat classique : **Code Python**. On voit donc bien une saturation à $v = c$, on ne peut pas aller au-dessus de la vitesse de la lumière ! Cette expression théorique a été vérifiée expérimentalement par Bertozzi 1964 **Code Python**.

1. j'ai fait le calcul une seule fois, on n'est pas à l'abri d'une erreur

Avec cette technique, on peut accélérer des particules chargées à des énergies cinétiques phénoménales de l'ordre de 50 GeV pour des électrons (soit 99,9999992% de c) comme c'est fait dans l'accélérateur linéaire de Stanford qui fait 3 km de long. Toutefois si l'on veut des énergies encore plus grande on finit par faire face à des problèmes d'encombrement...

↓ On peut résoudre ce problème en courbant la trajectoire grâce à un champ magnétique

3.2 Ajout d'un champ magnétique : les accélérateurs de particules

↗ Hladik p144

Supposons que la particule chargée sorte d'une zone d'accélération. Elle a une vitesse \vec{v} . Supposons alors qu'elle entre dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Le PFD donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (21)$$

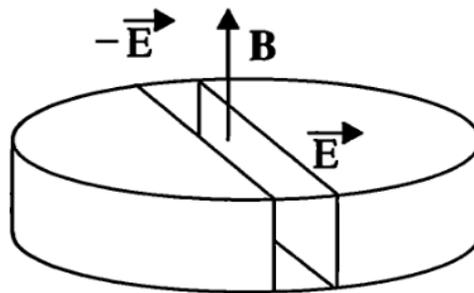
La force magnétique ne travaillant pas, la vitesse de la particule reste constante au cours de ce mouvement et donc on peut sortir γ de la dérivée. On a alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\omega_c}{B} \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (22)$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$. On retrouve alors le mouvement cyclotron classique d'une particule chargée à ceci-près que cette fois la pulsation cyclotron dépend de la vitesse. On retrouve bien la pulsation cyclotron classique pour $\gamma = 1$.

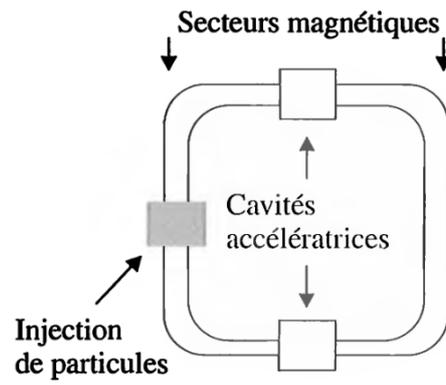
L'idée du cyclotron est alors la suivante : le cyclotron de E. O. Lawrence, mis au point en 1932, comporte une cavité formée de deux demi-boîtes cylindriques métalliques, entre lesquelles on établit une différence de potentiel accélératrice. Ces demi-boîtes sont placées dans l'entrefer d'un électroaimant, le champ magnétique \mathbf{B} ayant une direction perpendiculaire au plan des demi-boîtes. Lorsqu'une particule chargée est injectée dans la cavité, vers le centre des demiboîtes, elle subit une accélération dans la coupure entre les deux demi-boites et le champ magnétique enroule sa trajectoire, obligeant la particule à repasser dans la coupure. Le champ électrique \mathbf{E} est alors inversé afin d'être à nouveau accélérateur, la fréquence ν d'inversion étant égale à :

$$\nu = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi\gamma(v)m}$$



Ces dispositifs sont mis en place à grande échelle et permettent d'atteindre des énergies de 600 MeV !

Toutefois il est compliqué d'avoir un champ magnétique constant sur toute la trajectoire c'est pourquoi il existe aussi les synchrotrons (premier date de 1947). Le principe est toujours le même : accélération par un champ électrique et guidage par un champ magnétique. Dans un synchrotron les particules chargées sont guidées le long d'un tube à vide. Des bobinages créent un champ magnétique qui incurve les trajectoires dans quatre secteurs, ou plus, et les particules sont accélérées dans des cavités où règne un champ électrique. Pour pouvoir rester sur une même trajectoire, après accélération, il faut à la fois ajuster la valeur du champ magnétique et la fréquence du champ électrique.



C'est le cas du synchrotron à protons de Genève, long de 6 km et qui permet d'atteindre des énergies de l'ordre de 450 MeV. (L'observation de l'antiproton a été rendue possible au synchrotron de Berkeley, sûrement un peu plus costaud).

Conclusion

Les accélérateurs de particules c'est encore très chaud ajd, Higgs blablabla.