LP8 – Notion de viscosité d'un fluide, écoulements visqueux

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : PSI

Bibliographie

✍ *Électromagnétisme, fondements et applications*, **Perez**
✍ *Optique, une approche expérimentale et pratique*, **Houard**

Prérequis

➢

Table des matières

Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : Il peut être judicieux de présenter le fonctionnement d'un viscosimètre dans cette leçon.
- **2016** : Le jury invite les candidats à réfléchir d'avantage à l'origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide.
- **2015** : Afficher un tableau d'ordres de grandeur de viscosité ne suffit pas en soi pour illustrer la leçon. Tout exemple donné d'écoulement visqueux doit être maîtrisé par le/la candidat(e).
- **2011, 2012, 2013, 2014** : L'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique n'est pas celui dont les conclusions sont les plus riches. Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu dans un fluide. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les fluides newtoniens : le cas des fluides non newtoniens, s'il peut être brièvement mentionné ou présenté, ne doit pas prendre trop de temps et faire perdre de vue le message principal.

Introduction

Bon retour sur l'intro de Francis mais à mon avis faudrait prendre un autre exemple introductif parce qu'après on revient pas sur l'effet Magnus. Je propose une intro sur le tatouage de Jérémy. Nn je déconne je propose la formation d'un sillage derrière les poteaux d'un pont au dessus d'un fleuve mais je trouve pas de photo cool (le cas d'un fluide parfait prévoit un écoulement symétrique). Cette leçon s'inscrit après avoir vu les écoulements parfaits, c'est une progression historique puisque l'équation d'Euler date de 1753 alors que Navier décrit les fluides visqueux en 1822 puis Stokes en 1845 (regarder Olivier page 404 pour historique méca flu)

Problématique : Comprendre l'impact de la viscosité sur les écoulements et comment le prendre en compte.

1 Limites du fluide parfait : notion de viscosité

1.1 Cadre d'étude de la viscosité

GHP très remanié p90

Dans tous le cours on se placera dans le cas d'un écoulement incompressible. Pour appréhender la viscosité de manière quantitative nous allons réaliser une petite expérience :

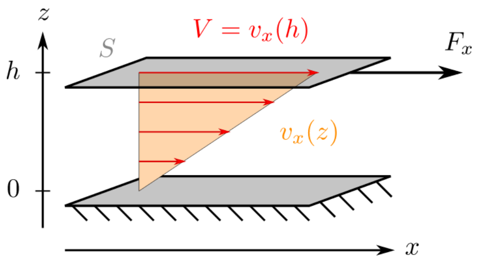
☕

Couette plan

✍ ⏲

Dispositif dans le labo de physique des chimistes, on met une ligne de colorant et ça trace un profil

On observe alors que le mouvement de la plaque entraîne un mouvement tangentiel du fluide visqueux situe en-dessous d'elle, et qui dit transport de quantité de mouvement dit force ! C'est quelque chose de nouveau puisque l'on a montré lors de l'étude des fluides parfaits qu'ils ne pouvaient engendrer des forces qu'orthogonales aux surfaces, c'est donc bien un fait de la viscosité.



Si on regarde la force exercée par l'opérateur sur la plaque en fonction des paramètres de l'expérience, on peut établir empiriquement une relation linéaire entre la contrainte tangentielle et la vitesse de déplacement de la plaque :

$$\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V}{h} \tag{1}$$

avec η un coefficient de proportionnalité. Cette expression ressemble fortement à une loi de Fick (attention, être conscient de l'analogie limitée) : en remarquant que $\frac{V}{h} \sim |\vec{grad}v|$ on voit que la contrainte à appliquer pour créer un gradient de vitesse dans le fluide est directement proportionnelle à ce gradient, i.e. par principe d'action réciproque le fluide exerce sur la plaque une force qui tend à s'opposer à la déshomogénéisation de la vitesse (et à la mise en mouvement du fluide).

Cette loi empirique permet alors d'introduire une loi phénoménologique cette fois vraie localement dans le fluide : chaque tranche de fluide exerce sur la tranche du dessous une force tangentielle proportionnelle au gradient de vitesse local avec un coefficient de proportionnalité η appelé viscosité dynamique :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_x \tag{2}$$

La linéarité entre la contrainte et le gradient de vitesse n'est pas toujours vérifiée. Lorsque c'est le cas, on parle de fluides newtoniens. On restreindra notre étude à ce cas précis pour tout ce qui suit.

Avec cette expression locale, on retrouve bien cette notion de force opérant à l'homogénéisation des vitesses : **au tableau faire un schéma de couches infinitésimales**. On prend la couche du dessus, si gradient positif ça veut dire qu'elle va plus vite que celle du dessous or d'après l'expression ça fait une force positive (et inversement) donc à terme on va avoir une homogénéisation des vitesses.

Dimensionnellement, la viscosité dynamique s'exprime en $Pa.s$ (pk pas faire l'analyse dimensionnelle au tableau si on se sent large) anciennement appelé poiseuille et noté Pl. Elle peut varier sur une très large gamme d'ordres de grandeur :

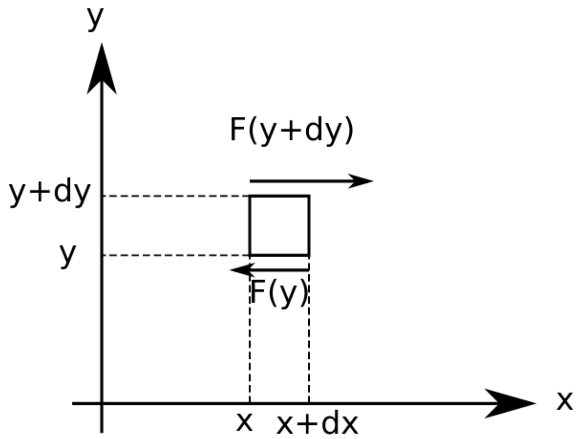
Fluide	Air	Eau	Glycérol	Miel
Viscosité (Pa.s)	2.10^{-5}	10^{-3}	1.5	10

On retrouve bien ici intuitivement cette notion de viscosité comme résistance à la mise en mouvement (et donc déshomogénéisation de vitesse) avec le miel ayant une viscosité bien plus grande que l'eau. Au-delà des fluides classiques, la notion de viscosité peut être utilisée pour modéliser des écoulements bien plus complexes comme ceux les glaciers.

Ok c'est bien tout ça mais ça reste assez spécifique, si on veut comprendre ça dans le cas d'un écoulement général va falloir voir l'influence de cette force sur une particule fluide (comme pour l'établissement d'Euler dans un cours précédent)

1.2 Force volumique

Restons dans le cas précédent où la vitesse est sous la forme $\vec{v} = v(y,t)\vec{e_x}$. On considère une particule fluide de volume dxdydz située entre y et y+dy : **schéma au tableau**



Les forces de viscosité s'appliquant dessus sont :

$$\vec{F} = \eta \frac{dv}{dy}(y+dy)dzdx\overrightarrow{e_x} - \eta \frac{dv}{dy}(y)dzdx\overrightarrow{e_x} = \eta \frac{d^2v}{dy^2}dydzdx\overrightarrow{e_x}$$

On trouve une force volumique égale à $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x}$.

Pour un écoulement quelconque, cette expression se généralise sous la forme :

$$\overrightarrow{f_v} = \eta \Delta \vec{v}$$

En effet, on peut imaginer que si la vitesse avait dépendu des autres directions, on aurait juste rajouté les contributions et obtenu chaque dérivée partielle. (en soit on peut faire le calcul complet mais je pense que c'est prendre du temps pour rien).

1.3 Origine micro

Facultatif d'après les retours de leçon. Dans le cas du gaz calcul cf leçon benjamin.

Mais que devient l'équation d'Euler des fluides parfaits si on prend en compte cette toute nouvelle contribution ?

2 Dynamique des écoulements visqueux

2.1 Équation de Navier-Stokes

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide. On se place dans un référentiel galiléen, en supposant l'écoulement incompressible, et le fluide newtonien isotrope. En ajoutant cette nouvelle force aux forces de pression et de gravité on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \tag{3}$$

Attention, il faut utiliser la dérivée particulaire (ou dérivée totale) pour la dérivée temporelle. En effet l'accélération est la somme de l'accélération locale liée à la varation locale du champ des vitesses, et de l'accélération convective qui provient de la variration de la vitesse de la particule fluide à cause de son déplacement spatial dans le champ des vitesses. On obtient ainsi l'équation de Navier-Stokes, impossible à résoudre analytiquement à cause du terme non-linéaire. Elle relie 4 inconnues par 3 équations selon les 3 coordonnées du repère, il manque donc une équation pour fermer le système, qui est donnée par l'hypothèse d'écoulement incompressible :

$$div(\vec{v}) = 0$$

La conservation de la masse (toujours vraie, rien à voir avec les histoires d'incompressibilité nous dit $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$ ou en décomposant la divergence $\frac{D\rho}{Dt} + \rho div(\vec{v}) = 0$. La définition d'un fluide incompressible c'est $\rho =$ cste. La définition d'un écoulement incompressible c'est $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. En utilisant la deuxième écriture de la conservation de la masse, on voit qu'un écoulement incompressible implique $div(\vec{v}) = 0$. On remarque aussi qu'un fluide incompressible ne peut s'écouler que de manière compressible. Il faut être au clair sur ces explications.

Il ne reste plus que les conditions au limites. Afin que la force ne diverge pas au voisinage des solides, on suppose que la vitesse tangentielle du fluide est la même que celle du solide. De plus, on suppose que le fluide ne peut pas s'enfoncer dans le solide ou s'en décoller. Donc on a finalement comme conditions aux limites :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{solide}}$$

2.2 Nombre de Reynolds

GHP p171 Si on adimensionne l'équation en posant $x' = x/L, y' = y/L, z' = z/L, \vec{v}' = \vec{v}/L, P' = P/(\rho U^2), t' = Ut/L$ alors on obtient l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\frac{D'\vec{v}'}{D't'} = -\vec{\nabla}'P' + \rho\vec{g} + \frac{1}{Re}\Delta\vec{v}' \tag{4}$$

Avec $Re = \frac{UL\rho}{\eta}$ un nombre sans dimension appelé le nombre de Reynolds. Re apparaît comme le paramètre qui contrôle le comportement de l'écoulement : la vitesse et la pression ne dépendent que des variables de temps et d'espace réduites et de ce nouveau paramètre Re. On peut le définir comme le rapport des flux de quantité de mouvement convectif et diffusif.

ODG

Étudions deux cas limites.

Re«1 On parle d'écoulement laminaire. On peut négliger le terme convectif de l'accélération particulaire devant le terme de viscosité (on ne peut pas négliger les autres termes car si on essaye de les comparer ça ne va pas dépendre que de Re il va rester des L ou des U en facteur) . L'équation de Navier-Stokes devient l'équation de Stokes. L'équation du mouvement du fluide est alors linéaire et on peut déterminer analytiquement le champ des vitesses. De plus, en régime stationnaire l'écoulement est réversible (*GHP p444*) : c'est une conséquence de la linéarité. Si on change le champ de pression en $-P$, alors $-\vec{v}$ est solution de l'équation.

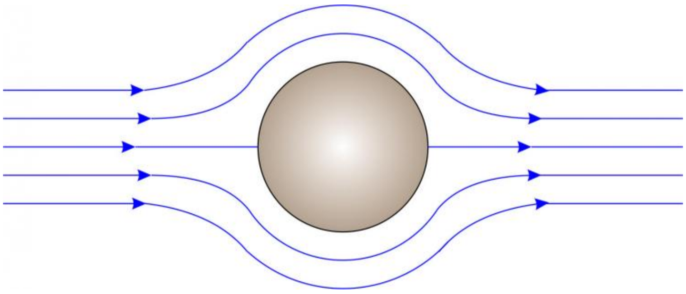


FIGURE 1 – Exemple d'écoulement laminaire autour d'un obstacle : la symétrie illustre la réversibilité.

C'est dans ce régime qu'on se place pour les viscosimètres : comme on peut calculer le champ de vitesse, on peut relier le couple resistant à la viscosité.

☕

Viscosimètre de Couette

✍ GHP p176 ⏲

Expliquer focntionnement, montrer réversibilité avec colorant.

Re»1 *GHP p507* On parle d'écoulement turbulent. Les termes de viscosité sont négligeables loin de l'obstacle. On retombe alors sur l'équation d'Euler vue précédemment. Pourtant même dans des écoulements turbulents, certains phénomènes comme l'effet Magnus ne peuvent s'expliquer sans la présence de la viscosité. En réalité, dans ce régime la viscosité se manifeste toujours dans une zone réduite proche de l'obstacle que l'on appelle couche limite.

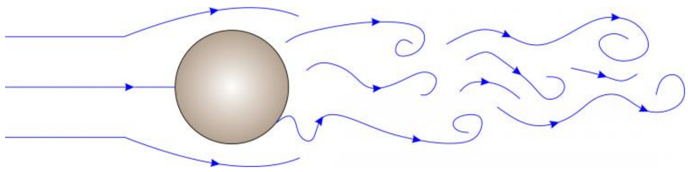


FIGURE 2 – Exemple d'écoulement turbulent autour d'un obstacle : on a perdu la symétrie.

2.3 Couche limite et Force de traînée

En régime turbulent, les phénomènes convectifs l'emportent dans tout le fluide sauf près des parois dans cette zone appelée couche limite. En régime laminaire on peut considérer que les phénomènes visqueux dominent partout donc que la couche limite occupe tout le fluide. À la frontière de la couche limite on peut écrire

$$\frac{\rho v.\text{grad}(v)}{\eta \Delta v} = 1 \tag{5}$$

$$\frac{\rho v^2/L}{\eta v/\delta^2} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{7}$$

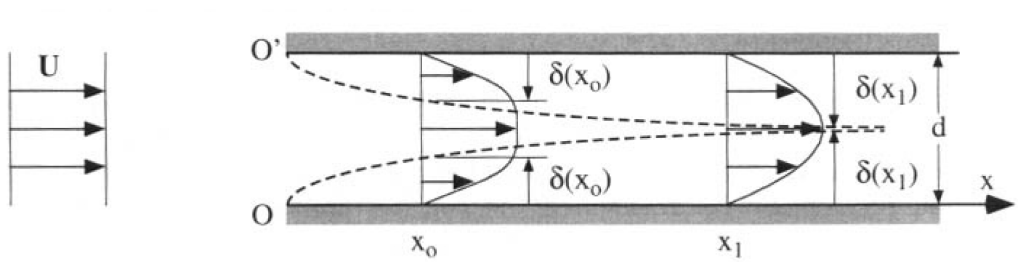
La couche limite sera d'autant plus faible que Re sera grand.

ODG couche limite sur une voiture de course à 90 km/h = 1mm.

C'est l'écoulement dans la couche limite qui détermine la force de traînée visqueuse exercée par le fluide s'écoulant autour de l'obstacle. Quand la couche limite est laminaire, la force de trainée est donnée par la formule de Stokes : $\vec{T} = -6\pi\eta RV$ pour une sphère de rayon R. Si elle est turbulente, $\vec{T} = -C_x(Re)\frac{1}{2}\mu v^2 S\frac{\vec{v}}{v}$.

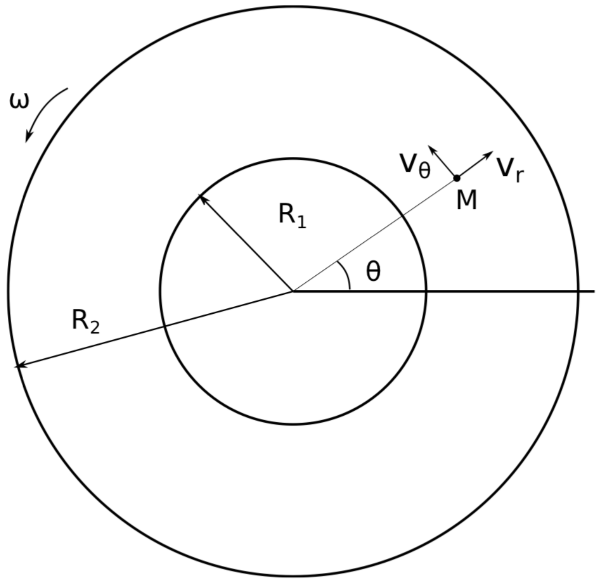
Images de couches limites laminaire et stationnaires.

Facultatif clairement, mais intéressant je trouve *GHP p511* Un phenomene etroitement lie a 1'existence de la couche limite est 1'effet de longueur d'entree, qui retarde le developpement d'un profil d'ecoulement stationnaire pres de 1'ouverture amont d'une conduite. schematise ce processus, dans le cas simple d'un ecoulement entre deux plaques semi-infinies perpendiculaires au plan de figure et distantes de d. A une faible distance x des aretes qui limitent les deux plaques, on a une vitesse presque uniforme entre les plaques avec un module egal a la valeur U en amont. La transition avec la condition de vitesse nulle a la surface des plaques se fait sur la faible epaisseur locale $d(x)$ de la couche limite. Au fur et a mesure qu'on s'eloigne vers 1'aval, 1'epaisseur $\delta(x)$ augmente, et les deux couches limites finissent par se rejoindre a une distance x_i : x_i représente donc la longueur necessaire pour que s'etablisse, entre les deux plans, le profil de vitesse stationnaire.



3 Exemple d'écoulement : écoulement de Couette cylindrique

GHP p176



On reboucle sur le viscosimètre tavu. Le calcul, expression du couple en fonciton de la viscosité Ya tout dans la leçon de Benjamin. Je pense pas qu'on aura le temps de faire d'atres exemples.

Retours

- Est-ce que c'est pas mieux de parler du principe du viscosimètre que à partir du grand 3 et juste montrer la réversibilité ?
- Insister au niveau du discours entre régime diffusif et régime convectif de la qté de mouv. (vieux rapport de jury)