

# LP9 - MODÈLE DE L'ÉCOULEMENT PARFAIT D'UN FLUIDE

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

## Niveau : Classes préparatoires

### Bibliographie

✦ *Tout-en-Un PC-PC\**, **Sanz**  
✦ *Hydrodynamique Physique*, **GHP**

Boh la base hein  
de même

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Modèle de l'écoulement parfait</b>	<b>2</b>
1.1	Fluide parfait . . . . .	2
1.2	Écoulement parfait . . . . .	3
1.3	Effet Coanda . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Théorème de Bernoulli</b>	<b>4</b>
2.1	Énoncé et démonstration . . . . .	4
2.2	Point de vue énergétique . . . . .	6
2.3	Application(s) . . . . .	7
	2.3.1 Effet Venturi . . . . .	7
	2.3.2 Tube de Pitot . . . . .	8
<b>3</b>	<b>L'effet Magnus</b>	<b>8</b>
3.1	Compréhension . . . . .	9
3.2	Modélisation . . . . .	9

## Remarques sur les leçons précédentes

**2017** La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.

**2016** Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.

**2015** Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.

A Lyon c'est toujours le même plan et il fonctionne bien (19 par Blancon/Martos l'année dernière, un 20 dans le book). Il y a de quoi faire une ou deux expériences (Coanda, Venturi et éventuellement Magnus). L'effet Magnus comme application c'est cool pour l'image du ballon de foot ou la balle de ping pong. Pitot est à mettre ou pas selon le temps je dirais mais autant le rédiger. Pour la biblio on peut prendre à peu près n'importe qui comme bonne base (tout le monde a fait pareil modulo la dernière partie), les Cléments c'est bien rédigé. Niveau bouquins c'est J'intègre PC-PC\* ou GHP pour l'essentiel et Compétences Prépa PC pour Bernoulli en approche énergétique. Si on a peur du temps, Pitot passe dans les applications pour équilibrer les parties.

## Introduction

Navier-Stokes c'est un millenium problem, on va pas la résoudre comme ça.

## 1 Modèle de l'écoulement parfait

### 1.1 Fluide parfait

↪ GHP p135 ou Blancon/Cléments

**Définition :** On appelle fluide parfait, un fluide pour lequel la viscosité ainsi que sa conductivité thermique sont strictement nulles  $\eta = 0$  et  $\lambda = 0$ .

Dans de telles hypothèses, on peut donner les caractéristiques d'un tel fluide :

- La vraie utilité c'est que l'écoulement vérifie alors l'équation d'EULER

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{gradu} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \rho \mathbf{g}$$

On a pris ici comme forces volumiques seulement la pesanteur, mais on peut imaginer plein d'autres choses sympa (coucou la MHD)

- Les conditions aux limites pour un fluide parfait ne concernent plus que la composante orthogonale de la vitesse : puisqu'il n'y a plus de viscosité, le fluide est libre de glisser le long d'une paroi. Il ne peut cependant toujours pas pénétrer le solide :

$$\mathbf{u}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n}$$

On a la même chose pour un contact entre deux fluides parfaits

- L'évolution d'un tel fluide est toujours isentropique (pas forcément besoin d'en parler et encore moins de faire la démo)

**Démo isentropie** La conservation de l'énergie est donnée (sans sources) par

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}_Q + p \text{div } \mathbf{u} = 0$$

Mais puisque la conductivité thermique est nulle, le terme de diffusion est nul lui aussi. Or on sait que

$$de = T ds - p dv = T ds + p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

Donc finalement on a

$$p \text{div } \mathbf{u} = -\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\rho T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Mais avec la conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} \implies \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

**Exemples** Bah c'est là le problème... On peut citer l'hélium 4 qui devient superfluide en dessous de 2.172 K à 37mmHg. Donc bon c'est pas hyper courant quoi.

⚡ *Ouais mais mise à part l'hélium superfluide*

## 1.2 Écoulement parfait

⚡ GHP p135

Tout le problème de l'hypothèse d'un fluide parfait c'est qu'elle est bien trop restrictive. On est donc amené à aller plus loin dans les hypothèses

**Définition :** Un écoulement parfait est un écoulement qui se comporte comme un fluide parfait : la viscosité et les pertes thermiques y sont négligeables.

Plus particulièrement, le but est que pour un écoulement parfait, l'équation d'Euler soit toujours vérifiée. Quelles conditions sont nécessaires ? On peut repartir de l'équation de NS adimensionnée

$$\rho(\partial_t u' + (u' \cdot \nabla')u') = -\nabla' p' + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' u'$$

et remarquer qu'il faut se placer à haut Reynolds pour négliger le terme visqueux. Mais alors si on est à trop haut Reynolds, l'écoulement risque d'être turbulent. Ce n'est pas gênant tant que les turbulences ne descendent pas à l'échelle de dissipation visqueuse.

En fait il faut comparer les temps caractéristiques des phénomènes visqueux  $\tau_\nu$ , thermiques  $\tau_\theta$  et de convection  $\tau_C$ , on veut

$$\tau_\nu = \frac{L^2}{\nu}, \tau_\theta = \frac{L^2}{D} \gg \tau_C = \frac{L}{U}$$

Ce qui se traduit par l'apparition de nombres de Péclet (dont le nombre de Reynolds)

$$\operatorname{Pe}_\theta = \frac{UL}{D}, \operatorname{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

**ODG**

Situation	$U$	$L$	diffusion	Nombre de PÉCLET
Jet d'eau robinet	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$1 \text{ m}$	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\operatorname{Re} = 10^6$ $\operatorname{Pe}_\theta = 10^7$
Voiture dans l'air	$10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$1 \text{ m}$	$\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\operatorname{Re} = 10^7$ $\operatorname{Pe}_\theta = 10^7$

Donc on est OK c'est bien des écoulements parfaits tant ça part pas en turbulence ! Genre le robinet tu le laisse couler doucement stp.

**Couche limite** Attention l'hypothèse du fluide parfait n'est jamais vérifiée près des parois : il existe une couche limite dans laquelle les phénomènes de dissipation visqueuses ne sont plus négligeables. On compare

- Les phénomènes de convection le long de la paroi de longueur  $L$  :  $(u \cdot \nabla)u \sim U^2/L$
- Les phénomènes de dissipation dans la couche d'épaisseur  $\delta$  :  $\nu \Delta u \sim \nu U/\delta^2$  La couche limite est délimitée par la zone où ces contributions sont comparables, son épaisseur  $\delta$  est donc telle

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}}}$$

Un petit schéma et on est bons.

↓ Résolvons un pb avec l'éq d'Euler

## 1.3 Effet Coanda

↗ Sanz p345



### Effet Coanda

↗ ⊕  
Juste imaginer avec un sèche-cheveux et une balle de ping pong.

Considérons une balle de ping-pong volant au-dessus d'un sèche-cheveux. Si on ne met pas d'angle, la position de la balle de ping-pong est stable par compensation de la force exercée par le sèche-cheveux et de la force de pesanteur. Si jamais on introduit maintenant un angle par rapport à la verticale comme montré Figure 1, on peut s'intéresser à la position d'équilibre de la balle de ping-pong.

Soit  $\vec{v} = v(r, z, t)\vec{e}_\theta$  la vitesse de la balle de ping-pong en coordonnées polaires. Pour cette étude, on néglige la force de pesanteur. L'équation d'Euler se réécrit donc comme :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} &= -g\vec{a}dP \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta + \rho v \times \frac{1}{r} \frac{\partial (v\vec{e}_\theta)}{\partial \theta} &= -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta - \rho \frac{v^2}{r} \vec{e}_r &= -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Par projection sur l'axe  $\vec{e}_r$ , on trouve finalement que :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0$$

La pression augmente lorsqu'on  $r$  augmente, c'est-à-dire lorsqu'on s'éloigne du rayon de courbure. Une différence de pression apparaît donc entre le centre et l'extrémité de la balle, d'où une force notée  $\vec{F}_p$  sur la Figure 1 qui tend à aspirer la balle vers l'intérieur du flux d'air créé par le sèche-cheveux. Cet équilibre de la balle est appelé effet Coandă et est en partie responsable de la forme des ailes d'avion, l'effet Coandă tendant à surélever l'aile pour faciliter le décollage (voir la troisième partie sur la force de portance).

**ODG** En reprenant les diffusivités thermiques et de qdm de l'air dans le tableau de la sous-partie précédente, en prenant  $L = 1$  cm et  $V = 1$  m/s on trouve  $Re = 10^3$  et  $Pe = 10^3$  donc c ok bb.

↓ On néglige la dissipation donc on s'attend à une conservation de l'énergie!

## 2 Théorème de Bernoulli

### 2.1 Énoncé et démonstration

↗ Sanz p358

Partons de l'équation d'Euler précédemment établie :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} \right) = -\text{grad } P + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

Cette équation est, on le rappelle, valable pour un écoulement parfait et incompressible. Si de surcroît on suppose que l'écoulement est stationnaire on a alors :

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\text{grad } P + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

Intégrons cette équation le long d'une ligne de courant. (L'intégrale se justifie, on veut chercher une conservation de l'énergie et Euler c'est comme un PFD. Pour la ligne de courant bah c'est la vie faut tenter des trucs parfois.) :

$$\begin{aligned} \rho \int_A^B [\mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u}] \cdot d\mathbf{l} &= - \int_A^B \text{grad} P \cdot d\mathbf{l} + \rho \int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \\ \rho \int_A^B \left[ \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \text{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \right] \cdot d\mathbf{l} &= - \int_A^B \text{grad} P \cdot d\mathbf{l} + \rho \int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (3)$$

Par définition pour une ligne de courant on a  $\vec{dl}$  qui est selon  $\vec{u}$  donc le produit scalaire avec le terme rotationnel est nul. On voit apparaître une structure du type dérivée = 0, pour aboutir à une loi de conservation on doit tout rentrer dans le gradient. Cela est possible puisque le poids est une force conservative :

$$\begin{aligned} \rho \int_A^B \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{l} &= - \int_A^B \text{grad} P \cdot d\mathbf{l} + \rho \int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \\ \int_A^B \left[ \rho \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \text{grad} P + \rho \mathbf{g} \right] \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \int_A^B \left[ \rho \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \text{grad} P + \text{grad}(\rho g z) \right] \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \int_A^B \text{grad} \left( \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + \rho g z \right) \cdot d\mathbf{l} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

donc finalement on a :

$$\left[ \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{\rho} P + g z \right]_A^B = 0 \quad (5)$$

Pour un écoulement parfait, incompressible et stationnaire on a donc conservation de la quantité suivante le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{\rho} P + g z \quad (6)$$

On remarque alors que pour un fluide immobile on retrouve la loi de la statique des fluides. Par ailleurs, on a montré ce résultat pour un fluide soumis à la pesanteur mais cela se généralise à toute autre force volumique du moment que cette dernière soit conservative.

Cette conservation de l'énergie est-elle à jeter à la poubelle dès lors que l'écoulement n'est plus stationnaire ? Non, on peut étendre ce résultat aux écoulements non stationnaires à la condition qu'ils soient cette fois irrotationnels (nécessaire si on veut mettre la dérivée temporelle sous forme de gradient). Sous cette condition, la vitesse est alors un champ de gradient et on peut définir alors le potentiel des vitesses de la même manière (enfin au signe près) que le potentiel électrostatique :

$$\mathbf{u} = \text{grad} \phi \quad (7)$$

On n'est alors plus obligé de se restreindre aux lignes de courant puisque le rotationnel est d'emblée nul et on a donc dans tout le fluide la nouvelle quantité conservée :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + P + \rho g z \quad (8)$$

! *Tout ça c'est juste de la conservation, on peut pas le voir plus physiquement ?*

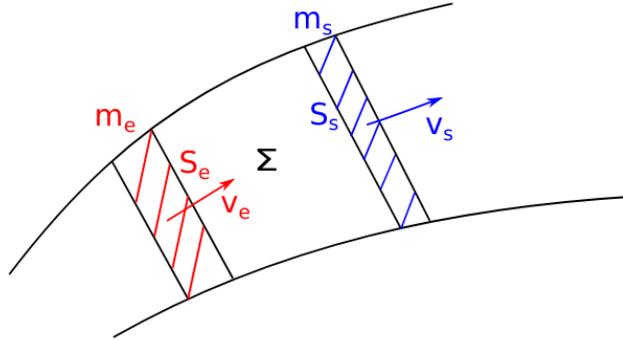


## 2.2 Point de vue énergétique

*Bilans macro en pré-requis on est là pour tracer mamène*

♣ Sanz (mais jsuis pas à l'ENS donc je vais me baser sur les anciennes leçons ici)

On a déjà vu comment on pouvait établir des bilans macroscopiques de grandeurs physiques sur des systèmes ouverts avec notamment le cas de la propulsion d'une fusée. Établissons ici un bilan d'énergie cinétique pour essayer de retrouver le théorème de Bernoulli. On considère un écoulement incompressible et stationnaire. Étudions le tube de courant suivant :



La variation d'énergie cinétique de  $\Sigma$  pendant un temps  $dt$  est donnée par :

$$dE_c = \left( E_c(t + dt) + \frac{1}{2} \delta m_s v_s^2 \right) - \left( E_c(t) + \frac{1}{2} \delta m_e v_e^2 \right) \quad (9)$$

L'écoulement étant stationnaire on a :

$$E_c(t + dt) = E_c(t) \quad (10)$$

Par ailleurs, l'écoulement étant incompressible on a :

$$\delta m_e = \delta m_s = D_m dt \quad (11)$$

avec  $D_m$  le débit massique du fluide. On a alors de par le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (v_s^2 - v_e^2) = P_{int} + P_{ext} \quad (12)$$

Reste alors à déterminer la puissance extérieure. Celle-ci correspond au poids et aux forces de pression et on a alors (on travaille pas sur les surfaces latérales car orthogonal à l'écoulement) :

$$\begin{aligned} P_{ext,p} &= P_e S_e v_e - P_s S_s v_s = D_m \left( \frac{P_e}{\rho} - \frac{P_s}{\rho} \right) \\ P_{ext,g} &= \rho g (S_e v_e z_e - S_s v_s z_s) = D_m g (z_e - z_s) \end{aligned} \quad (13)$$

on en déduit alors :

$$P_{int} = D_m \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] \quad (14)$$

Le théorème de Bernoulli correspond donc au cas où aucune puissance n'est dissipée intérieurement, ce qui correspond alors au cas de l'écoulement parfait où il n'y a aucune dissipation.

▮ *Le théorème de Bernoulli est une première approche pour expliquer pleins de phénomènes*

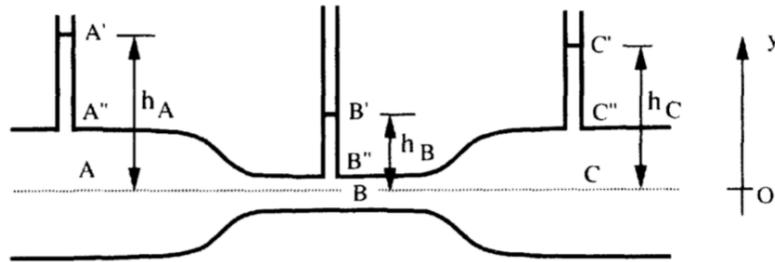


## 2.3 Application(s)

⚡ GHP p205

### 2.3.1 Effet Venturi

On considère le système suivant :



#### Effet Venturi



L'expérience se trouve dans la collection. Vous pouvez l'alimenter directement via un robinet. Expérimentalement, on a ainsi  $h_B < h_A$  entre les première et deuxième parties du tube mais aussi  $h_C < h_A$  entre la première et troisième partie du tube. On peut également alimenter le système avec un vase de Mariotte qui permet d'avoir un débit d'entrée constant.

Pourquoi ces différences de hauteurs ? En considérant l'écoulement parfait, stationnaire et incompressible on a avec le théorème de Bernoulli :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} \quad (15)$$

En considérant que l'écoulement est parallèle dans le tube principal et qu'il ne pénètre que de manière négligeable dans les tubes nanométriques on a une distribution de pression hydrostatique entre les points suivants :

$$\begin{aligned} P_A &= P_0 + \rho g h_A \\ P_B &= P_0 + \rho g h_B \\ P_C &= P_0 + \rho g h_C \end{aligned} \quad (16)$$

soit finalement :

$$\frac{u_A^2}{2} + g h_A = \frac{u_B^2}{2} + g h_B = \frac{u_C^2}{2} + g h_C \quad (17)$$

La section au niveau de B étant réduite on a par conservation du débit volumique  $u_B > u_A, u_C$  et donc on retrouve bien  $h_B < h_A, h_C$ . C'est ce qu'on appelle l'effet Venturi. Il est notamment utilisé en chimie avec la filtration Büchner ou pour aspiration du mélange air-essence dans les carburateurs de voiture.

**Remarques** Le phénomène ne pourrait pas exister sans viscosité (car écoulement non parallèle sinon et donc pas de répartition hydrostatique de la pression), on néglige juste l'énergie dissipée devant l'énergie cinétique pour pouvoir appliquer Bernoulli. De plus, on a une perte de charge par dissipation visqueuse et ce qui explique pourquoi  $h_C$  est en fait légèrement inférieur à  $h_A$ . (voir Jolidon et GHP pour ces subtilités mais pas besoin de les mentionner.)

↓ Donc on peut mesurer des vitesses ?

### 2.3.2 Tube de Pitot

↪ GHP p271

Ce principe de dépendance de la vitesse avec la pression est utilisé à profit pour mesurer des vitesses d'écoulement. C'est un enjeu très important notamment dans le domaine de l'aéronautique. Pour ça on utilise un dispositif appelé tube de Pitot :

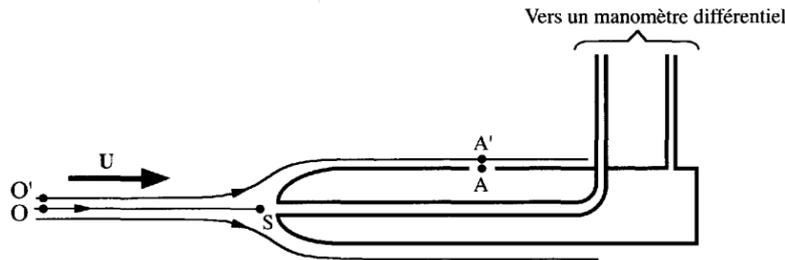


FIGURE 1 – A est dans la couche limite, A' est à l'extérieur

On peut appliquer d'abord le théorème de Bernoulli le long de OS :

$$p_0 + \rho \frac{U^2}{2} = p_S \quad (18)$$

Puis on l'applique le long de OA' : la pression variant très peu lorsque que l'on traverse orthogonalement un écoulement quasi unidirectionnel de la couche limite (ouf), A est à la même pression que A'. De plus, la vitesse en A est U si on est suffisamment en aval de S et si la section du tube est pas déconnante donc on a :

$$p_0 + \rho \frac{U^2}{2} = p_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = p_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = p_A + \rho \frac{U^2}{2} \quad (19)$$

Les points O et O' étant infiniment proches on a donc finalement :

$$\Delta p = p_S - p_A = \rho \frac{U^2}{2} \quad (20)$$

Un anémomètre différentiel permet donc de remonter à la vitesse de l'écoulement connaissant sa masse volumique.

↓ Fort-es de tout ça, on va essayer de décrire un phénomène étrange

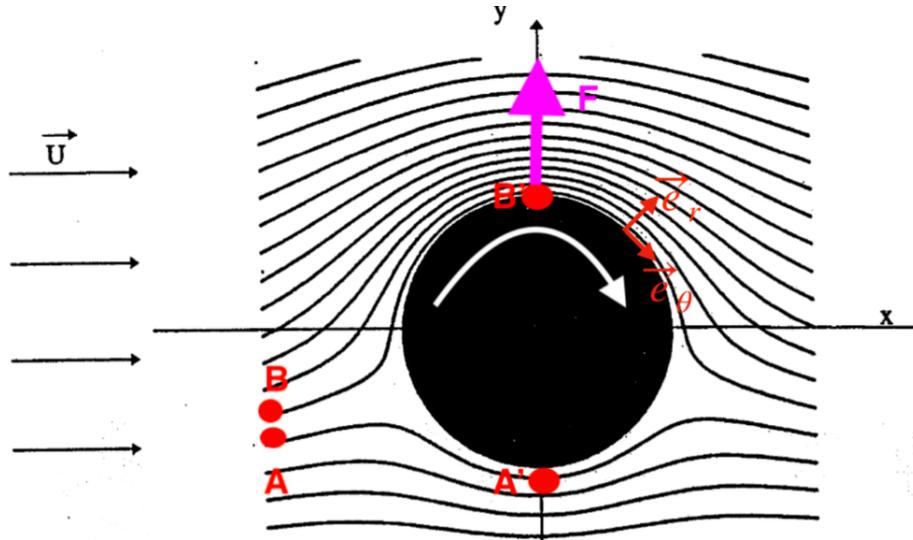
## 3 L'effet Magnus

↪ GHP p295

<https://www.youtube.com/watch?v=20SrvzNW9FE> ou coup franc/corner au foot. D'où vient cette force qui courbe la trajectoire ?

### 3.1 Compréhension

On peut comprendre cela qualitativement en étudiant les lignes de courants que l'on peut simuler ou observer expérimentalement correspondant à un écoulement unidirectionnel et uniforme rencontrant un cylindre en rotation (regarder si y'a pas une plus belle image dans l'album de jsp quoi là à la bu). Celui-ci modifie l'écoulement de la manière suivante :



Si on considère l'écoulement parfait, incompressible et stationnaire on peut alors appliquer le théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} &= P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} \\ P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} &= P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \\ P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} &= P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Or on voit que les lignes de champ sont plus resserrées au-dessus du cylindre donc  $v_{B'} > v_{A'}$  et donc  $P_{B'} < P_{A'}$ . On a donc une force de pression résultante dirigée vers le haut, i.e. une force de portance. Cela explique bien la trajectoire courbe observée de la balle en chute libre. **Schéma au tableau pour le chute de la balle de basket avec poids et Magnus au cours du trajet.**

↓ Peut-on essayer de modéliser cet écoulement dégager une expression de cette force ?

### 3.2 Modélisation

Supposons l'écoulement irrotationnel, on peut alors décrire le champ des vitesses à travers un potentiel  $\phi$ . L'enjeu est alors de trouver une forme appropriée pour ce potentiel. Il résulte de trois contributions : l'écoulement uniforme sans cylindre, l'effet de la présence du cylindre et l'effet de la rotation du cylindre. Pour l'écoulement uniforme, c'est facile il suffit d'intégrer une constante. Pour l'influence du cylindre on peut faire comme en électrostatique un développement multipolaire et essayer en s'arrêtant à l'ordre 2 (dipolaire donc). Enfin, pour la prise en compte de la rotation du cylindre c'est un peu plus compliqué. En fait, si ce mouvement a une influence sur l'écoulement c'est parce qu'au voisinage direct de la surface du cylindre, i.e. dans la couche limite, l'écoulement n'est plus potentiel et la viscosité est non négligeable. Dès lors, le mouvement de rotation du cylindre entraîne la rotation de la couche de fluide directement à son contact (rappel des CAL en visqueux). On peut alors proposer le potentiel suivant :

$$\Phi = Ur \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (22)$$

Pour justifier la forme du troisième terme on peut remarquer que :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi r v_\theta = 2\pi r \frac{1}{r} \frac{d\phi_3}{d\theta} \Rightarrow \phi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (23)$$

Le champ de vitesses correspondant est alors :

$$\begin{aligned} u_r &= U \left( 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right) \cos \theta \\ u_\theta &= -U \left( 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (24)$$

Si l'on peut supposer l'écoulement parfait et donc le théorème de Bernoulli applicable on a alors :

$$P(R) + \frac{1}{2} \rho u_\theta(R)^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (25)$$

On obtient alors l'expression des deux composantes de la force :

La force de traînée :

$$F_t = \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta = 0$$

On en déduit donc que la force de traînée est nulle ici.

La force de portance

$$F_p = \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta = \rho \Gamma U$$

On en déduit donc qu'il y a bien une force qui dévie la balle! Celle-ci est proportionnelle à la vitesse de rotation du cylindre/de la balle et est perpendiculaire au mouvement, d'où cet effet de courbure.

## Conclusion

Turbulence, profilage, jsp