

LP10 – PHÉNOMÈNES INTERFACIAUX IMPLIQUANT DES FLUIDES

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

Bibliographie

- ✚ <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document> Cours de Pierre Lidon (dont s'est inspiré Jérémy)
- ✚ <https://arxiv.org/pdf/1211.3854.pdf> Subtilités micro
- ✚ *Gouttes, Bulles, Perles et Ondes*, De Gennes g upload
- ✚ *Instabilités hydrodynamiques*, Charru

Table des matières

1	La tension de surface	2
1.1	Origine microscopique	2
1.2	Définition thermodynamique	3
1.3	Influence des facteurs extérieurs	4
2	Interfaces à l'équilibre	5
2.1	Loi de Young-Dupré	5
2.2	Loi de Laplace	7
3	Effets hydrodynamiques capillaires	9
3.1	Instabilité de Rayleigh-Plateau	9
3.2	Effet Marangoni	11

Remarques sur les leçons précédentes

- **2014, 2013** : Le lien avec les potentiels thermodynamiques n'est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l'origine microscopique de la tension superficielle. Le jury constate que trop souvent les candidats présentent des schémas où la représentation des interactions remet en cause la stabilité mécanique de l'interface. Le jury apprécie les exposés dans lesquels le/la candidat(e) ne se limite pas à la statique.

•

Basiquement une leçon sur la tension de surface. Bonne leçon en 2018 avec correction, la leçon de Francis est cool pour les applications. La première partie ya pas trop de choix à faire, et après je trouve la distinction interfaces à l'équilibre/effets dynamiques sympa. L'application effet Marangoni ça permet d'exploiter la dépendance de la tension de surface en la température ça change un peu. Voili voilou

Introduction

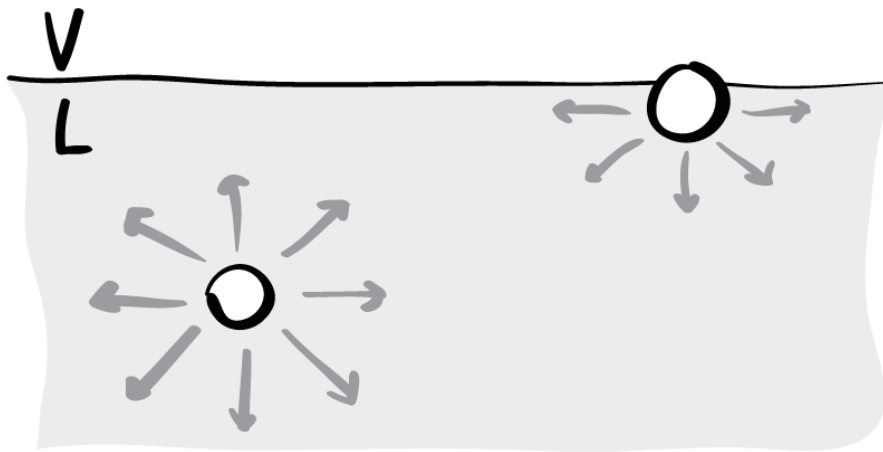
Expérience introductive pour faire sentir la force qui s'exerce à une interface entre deux fluides, ya le choix (trombone qui flotte par ex : si on le fait passer sous la surface il coule). Introduire le coeff gamma de manière phénoménologie avec l'expérience du film de savon.

1 La tension de surface

1.1 Origine microscopique

🔗 Lidon, article arXiv, GHP p53 (31 pour la nouvelle édition)

La tension superficielle dépend directement des forces de cohésion entre les molécules d'un fluide. Celles-ci peuvent être de différentes natures : forces de Van der Waals, liaisons hydrogène, liaisons ioniques, liaisons métalliques. Le fait est que si l'on compare une molécule à l'interface et une molécule dans le volume :



on voit qu'il manque à cette molécule à l'interface des interactions stabilisantes avec les molécules du liquide par rapport à une molécule dans le volume¹. C'est cette dissymétrie entre surface et volume qui est à l'origine de la tension de surface : avoir une grande interface est coûteux d'un point de vue énergétique puisque cela correspond à une perte virtuelle d'interactions stabilisantes. On comprend alors cet effet de force tendant à minimiser les interfaces qui est exprimé à travers la tension superficielle γ . Elle s'exprime en $J.m^{-2}$ et correspond alors à une énergie à fournir pour augmenter la surface d'une interface. Plus ce coefficient est grand, plus il sera difficile de déformer l'interface du liquide.

1. C'est une vision simplifiée bien sûr en réalité on a des interactions avec le gaz mais c'est bcp moins dense

La tension de surface dépend énormément des interactions mises en jeu dans le liquide. Elle est très élevée dans les métaux liquides (0,48 USI pour Hg et 2,5 USI pour Os) du fait de la grande valeur énergétique associée aux liaisons métalliques mais elle est plus faible dans les liquides où seules les interactions de Van der Waals interviennent (0,020 à 0,025 en général). Ce petit modèle microscopique nous permet néanmoins d'en estimer un bon ordre de grandeur : notons a la taille d'une molécule, U l'énergie de cohésion par particule dans le liquide et considérons que la cohésion du gaz est négligeable. Amener une molécule à l'interface augmentera l'aire de cette dernière de a^2 et fera perdre une énergie de cohésion de l'ordre de U : dès lors, $\gamma \sim U/a^2$. Pour estimer U , on peut considérer qu'à l'ébullition, l'agitation thermique compense la cohésion $U \sim k_B T_{eb}$. On peut ainsi estimer $\gamma \sim k_B T_{eb}/a^2$. Dans le cas de l'eau, on trouve $\gamma \sim 0.1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ qui se compare de façon acceptable à la valeur tabulée à 20°C : $\gamma_{\text{tab}} = 72.75 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$.

On comprend qu'une interface a un coût énergétique. La tension superficielle ne s'observe facilement que dans certains cas : pour comparer son importance aux autres termes énergétiques, construisons une approche thermodynamique

1.2 Définition thermodynamique

✦ LP10 2018, poly de Jérémy partie définition, partie compétition surfacique/volumique de Francis

La définition thermodynamique de la tension de surface est la suivante. Pour augmenter infinitésimalement de dA l'aire de l'interface du système constitué de l'ensemble des deux phases en présence, il faut lui fournir de manière réversible un travail $\delta W^{\text{rév}} = \gamma dA$. Ainsi, pour un système avec une interface, l'aire A de l'interface devient une nouvelle variable interne ⁽¹⁾ et la première identité thermodynamique s'écrit $dU = T dS - P dV + \mu dN + \gamma dA$. On définit alors la tension de surface comme la dérivée de la fonction d'état caractéristique $U(S, V, N, A)$ par rapport à l'aire de l'interface :

$$\gamma = \left. \frac{\partial U}{\partial A} \right|_{S, V, N}$$

C'est donc une définition parfaitement générale, elle s'applique à tout type d'interfaces et non pas seulement les interfaces liquide-gaz. En pratique, on sait bien que l'entropie est une variable peu contrôlable expérimentalement c'est pourquoi on peut en donner d'autres définitions grâce aux transformées de Legendre afin de se ramener à un potentiel thermodynamique pertinent :

$$\gamma = \left. \frac{\partial U}{\partial A} \right|_{S, V, N} = \left. \frac{\partial F}{\partial A} \right|_{T, V, N} = \left. \frac{\partial G}{\partial A} \right|_{T, p, N} \quad (1)$$

En général, on utilisera la définition avec G puisque la température et la pression restent les paramètres expérimentaux les plus faciles à fixer en pratique. On retrouve bien alors le fait que la minimisation du potentiel thermodynamique conduit à une minimisation de la surface de l'interface. En l'absence de forces extérieures, une masse de liquide aura donc tendance à être sphérique puisque c'est la géométrie qui minimise la surface en trois dimensions !

Mais vous allez me dire, quand je regarde une flaque d'eau c'est bof une sphère quand même, elle ne minimise pas beaucoup son interface.. Même une goutte un peu grosse n'est pas très sphérique... Cela vient en fait de notre supposition précédente "en l'absence de force extérieure". En effet, il se peut que des forces volumiques agissant sur le fluide soient en compétition avec les phénomènes de tension superficielle et c'est le cas notamment de la gravité qui tend à aplatir la masse de fluide. Détaillons cette compétition entre la force volumique de gravité et la force de tension de surface dans le cas de la goutte. On a :

$$E_g = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} \pi R^4 \cdot \rho \cdot g \quad (2)$$

$$E_\gamma = 4 \pi R^2 \gamma \quad (3)$$

Donc pour que les effets de capillarité soient prépondérants on doit avoir :

$$E_\gamma \gg E_g \quad (4)$$

ce qui fait apparaître un nombre sans dimension appelé nombre de Bond :

$$Bo = R^2 \frac{\rho g}{\gamma} \quad (5)$$

Lorsque que Bo est grand devant 1, la gravité l'emporte mais lorsque Bo est petit devant 1 c'est la tension superficielle qui l'emporte et on observe alors effectivement une minimisation de la surface de l'interface. Cette comparaison gravito-capillaire se généralise à tout système de taille caractéristique L (R pour la goutte) et on définit alors le cas limite où $L = l_c$ avec l_c la longueur capillaire où les deux forces sont comparables ($Bo = 1$). On a alors :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (6)$$

Pour $L \ll l_c$ les phénomènes de tension de surface dominant alors que pour $L \gg l_c$ c'est les effets de pesanteur qui dominant. Dans le cas de l'eau on a $l_c \sim 3 \text{ mm}$ c'est pourquoi seules les toutes petites gouttes ont une forme quasi sphérique.

1.3 Influence des facteurs extérieurs

✦ GHP p 54, GBPO p 191

La tension de surface dépend de nombreux facteurs. Le premier est évident : il dépend de la nature des deux phases mises en présence puisque les interactions dépendent de la nature de ces phases. Ainsi une interface eau-huile n'aura pas la même tension de surface qu'une interface eau-vapeur d'eau.

De manière similaire au premier facteur, un second facteur susceptible de modifier la tension de surface est la présence de surfactants. Un surfactant est un composé amphiphile composé d'une partie polaire hydrophile et d'une partie polaire hydrophobe comme les savons :

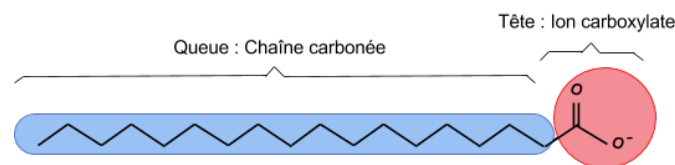


Schéma d'une molécule de savon

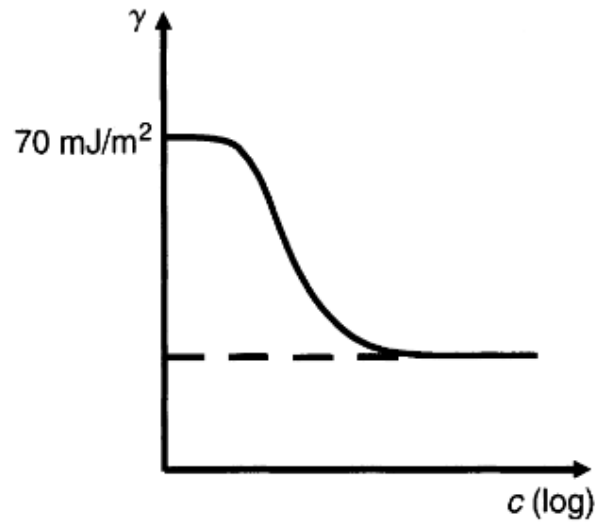
Lorsque l'on ajoute des molécules de surfactant dans un volume d'eau en contact avec de l'air, l'amphiphilie de ces molécules va faire qu'elle vont s'organiser de telle sorte à mettre leur queue dans l'air et leur tête dans l'eau. Les interactions air-queue étant plus fortes (apolaire-apolaire) que les interactions air-eau et les interactions eau-tête étant moins fortes que les interactions eau-eau en général, on a bien une diminution de la dissymétrie énergétique surface-volume. L'introduction de surfactant diminue alors drastiquement la tension de surface de l'eau (diminution d'un facteur 2 ou 3 selon le surfactant).



Ajout de surfactant dans l'eau du trombone



Hop il coule.



De la même manière, tout ajout d'impureté tend à faire diminuer la tension de surface.

Enfin un dernier facteur mais pas des moindre est la température. En général, la tension de surface décroît linéairement avec la température en accord avec la loi d'Eotvos :

$$\gamma V^{2/3} = k (T_c - T) \quad (7)$$

avec V le volume molaire, T_c la température critique. On a montré par une approche statistique que k était en fait proche de k_B . Pour l'eau on a :

$$\gamma = 0.07275 \text{ N/m} \cdot (1 - 0.002 \cdot (T - 291 \text{ K})) \quad (8)$$

donc cette dépendance n'est pas ridicule !

↓ Quelles lois fondamentales traduisent l'équilibre d'une interface vis à vis de ce terme surfacique ?

2 Interfaces à l'équilibre

2.1 Loi de Young-Dupré

⚡ GBPO p. 15 ou poly de Lidon

Le mouillage est l'étude de l'étalement d'un liquide déposé sur un substrat, solide ou liquide. Cet étalement donne lieu à une ligne de contact entre trois phases : le liquide déposé, le substrat, et le gaz environnant. Cette ligne est appelée ligne triple. L'angle θ_E entre les interfaces liquide-gaz et solide-liquide au niveau de la ligne triple, comme représenté figure 10 est appelé angle de contact.

Le mouillage résulte de la compétition entre les affinités relatives des trois phases les unes pour les autres. décrites par les tensions de surface entre solide et gaz γ_{SG} , entre solide et liquide γ_{SL} et entre liquide et gaz, γ . On appelle paramètre d'étalement S la différence d'énergie surfacique entre le substrat sec et le substrat mouillé :

$$S = E_{\text{sec}} - E_{\text{mouillé}} = \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma)$$

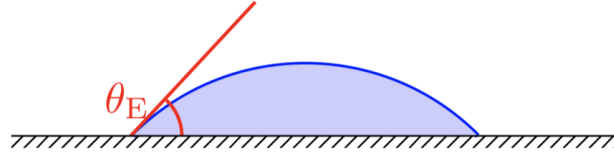


FIGURE 1 – Une goutte de liquide posée sur la surface d'un solide s'étale plus ou moins selon les affinités relatives des phases en présence. Si la goutte ne s'étale pas complètement, elle forme une calotte sphérique dont l'angle à la base est appelé angle de contact θ_E .

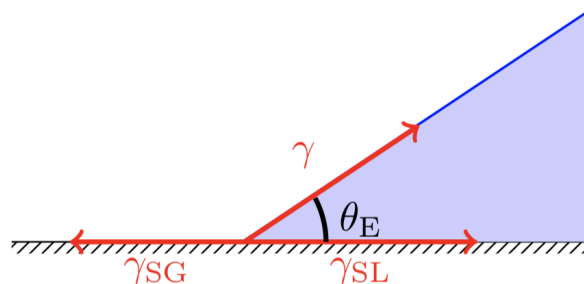
- Si $S > 0$, l'énergie surfacique est abaissée en recouvrant le substrat avec le liquide : le liquide s'étale complètement en un film, dont l'épaisseur résulte de la compétition entre la capillarité et les forces d'interaction à l'échelle moléculaire. On parle de mouillage total.
- Si $S < 0$, le liquide ne s'étale pas entièrement mais forme une calotte sphérique, faisant un angle de contact θ_E avec le substrat ⁽³¹⁾. On est dans une situation de mouillage partiel. On distingue alors un liquide plutôt mouillant, pour lequel $\theta_E \leq \pi/2$, et un liquide plutôt non mouillant, pour lequel $\theta_E \geq \pi/2$ ⁽³²⁾.



Mouillage



cf poly TP divers : on pose une goutte sur un substrat, on projette avec une lentille et on peut mesurer l'angle de mouillage pr plusieurs substrats.



À l'équilibre, les forces de traction sur la ligne triple dues aux trois tensions de surface s'équilibrent (voir figure), ce qui donne en projection dans le plan du substrat :

$$\gamma \cos \theta_E = \gamma_{SG} - \gamma_{SL}$$

Il s'agit de la loi de Young-Dupré. Elle montre que l'angle de contact résulte de la compétition entre les affinités des différentes phases en présence. Expérimentalement, cette relation permet, ayant mesuré deux des tensions superficielles et l'angle de contact, d'obtenir la troisième tension de surface. C'est une méthode commode pour obtenir les tensions de surface avec les phases solides car elles sont souvent très faibles et par conséquent difficiles à mesurer directement. On peut alors réécrire le paramètre d'étalement

$$S = \gamma (\cos \theta_E - 1)$$

On constate que l'angle de contact ne peut être défini que dans le cas d'un mouillage partiel, pour lequel $S < 0$.

A partir de là on peut aller très vite ce sont des remarques mais je laisse en entier pour les questions.

Limitation : Lorsque l'on pose une goutte sur une surface quelconque, l'angle de contact θ_E observé est souvent différent de celui prévu par la loi de Young-Dupré. En effet, celle-ci n'est valable que sur une surface idéale, sans impureté (défauts chimiques) ni rugosité (défauts physiques). Sur une surface non-idéale, l'angle de contact n'est pas unique. Si l'on injecte du liquide dans la goutte, l'angle de contact θ augmente progressivement, et la ligne triple reste immobile jusqu'à ce que θ atteigne l'angle d'avancée θ_A , supérieur à l'angle θ_E prédit par la relation de Young-Dupré. A contrario, si l'on aspire du liquide, la ligne triple ne commence à reculer que quand θ atteint l'angle de reculée θ_R , inférieur à θ_E . On parle d'hystérésis de la ligne triple.

Cette hystérèse est due à l'ancrage de la ligne triple sur les défauts du substrat. Lorsque la ligne triple rencontre un défaut, elle se déforme (pour s'y accrocher si le défaut est une zone très mouillable, ou pour l'éviter si c'est une zone peu mouillable) puis finit par s'en arracher, ce qui dissipe de l'énergie. (tavu c'est comme les domaines de Weiss)

Notons déjà qu'il est tout à fait possible de démontrer cette loi par des considérations énergétiques. Cette vision en termes de force linéique est assez intuitive, mais peut par là même se révéler trompeuse et soulever des interrogations. Pour une explication rigoureuse de ce point de vue, en regard avec les considérations thermodynamiques, on consultera l'article arXiv.

2.2 Loi de Laplace

🔗 Diu p. 220, Lidon

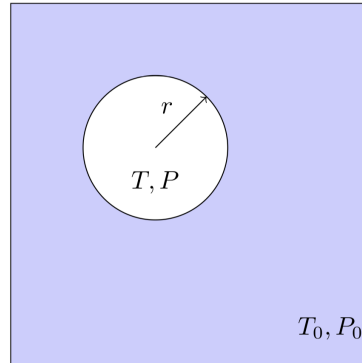


FIGURE 2 – On considère une bulle de gaz sphérique en équilibre avec la phase liquide, considérée comme un barostat. La pression à l'intérieur de la bulle est supérieure à celle du liquide du fait de la tension de surface.

Considérons la situation représentée figure 4. On s'intéresse à un système composé d'une bulle de gaz sphérique, de température T , de pression P et de rayon r , entourée de liquide. Le liquide se comporte comme un thermostat de température T_0 et de pression P_0 ⁽⁹⁾. Le système est considéré comme fermé : cela suppose soit que l'interface ne laisse pas passer les molécules, hypothèse absurde dans notre situation mais raisonnable pour le cas d'une bulle de savon (on n'oubliera alors pas qu'une bulle est constituée de deux interfaces liquide/gaz), soit que l'échelle de temps sur laquelle les équilibres mécaniques et thermiques s'établissent est petite devant celle de l'équilibre osmotique, ce qui est raisonnable⁽¹⁰⁾

Le choix d'une bulle sphérique n'est pas anodin : on sait qu'il s'agit de la forme qui minimise l'aire à volume donné, il s'agit donc de la forme d'équilibre de la goutte. On cherche alors quelle est la pression dans le gaz à rayon r donné.

On travaille en contact avec un thermostat à T_0 et un barostat à P_0 : les paramètres d'état sont la température T de la bulle, sa pression P , et son rayon r ⁽¹¹⁾, et le potentiel thermodynamique adapté à la situation est

$G^*(U, r; T_0, P_0) = U + P_0 V - T_0 S$. Sa différentielle s'écrit

$$dG^* = dU + P_0 dV - T_0 dS = (T - T_0) dS + (P_0 - P) dV + \gamma dA$$

soit

$$dG^* = (T - T_0) dS + 4\pi r^2 \left(P_0 - P + \frac{2\gamma}{r} \right) dr$$

À l'équilibre, le potentiel est extrémal : $dG^* = 0$ donc $T = T_0$ et on trouve la loi de Laplace pour une sphère

$$P = P_0 + \frac{2\gamma}{r}$$

qui traduit une surpression à l'intérieur de la bulle induite par la courbure de l'interface



Murissement d'Ostwald

🔗 Poly TP DIvers

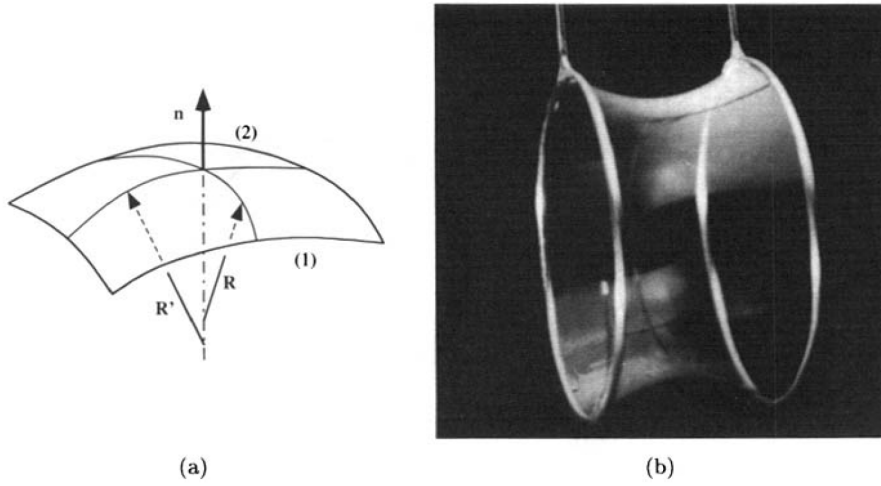


⚡ GHP p 56

Dans le cas où la surface de séparation entre les deux fluides est quelconque, la loi de Laplace prend la forme plus générale :

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \gamma C$$

où R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface au point considéré (rayons de courbure extremum des courbes, sections de la surface par deux plans perpendiculaires contenant la normale n). La somme $C = (1/R) + (1/R')$ est la courbure moyenne locale de l'interface. Les rayons de courbure R et R' sont algébriques et comptés positivement lorsque le centre de courbure correspondant est situé du côté du fluide. Sur la figure, on peut voir un film de liquide tendu sur un cadre, dans une configuration où la courbure C en chaque point est nulle, alors que R et R' sont tous deux différents de zéro, mais opposés. Cela permet de satisfaire la loi de Laplace dans le cas où la pression de part et d'autre de l'interface est la même.



(a)

(b)



Caténoïde

⚡ poly Tp Divers



jsp si on a de quoi la montrer mais ça serait rigolo

La surpression causée par la courbure de l'interface nous permet d'interpréter facilement le phénomène d'ascension capillaire

⚡ GBPO p 52

To find the height of the capillary rise, one can also use an argument in terms of pressures (Figure 2.18). In tubes that are very small compared with the capillary length, the leading meniscus (within the tube) is a portion of a sphere. The radius of curvature R of this sphere is equal to the radius R of the tube when the contact angle is equal to zero, and more generally to $R/\cos\theta_E$. The pressure immediately underneath the interface (point A in Figure 2.18) is given by Laplace's law (the curvature of a sphere of radius R is $2/R$)

$$P_A = P_0 - \frac{2\gamma \cos\theta_E}{R}$$

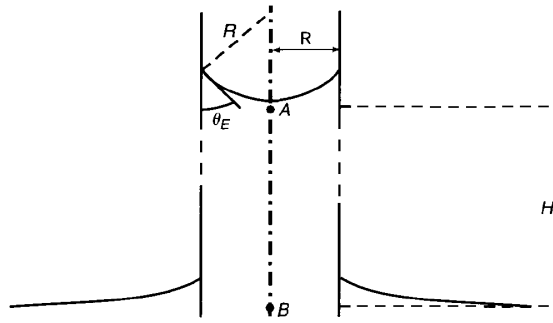
where P_0 designates the outer (atmospheric) pressure. The negative sign in equation (2.32) signifies that the interface is subject to an underpressure since its curvature is pointed toward the atmosphere (that is precisely what acts as a pump on the bath and causes the liquid to rise).

The pressure at point B (located at height $z = 0$) is P_0 . The pressure difference between A and B is purely hydrostatic, point B bearing the weight of a liquid column of height H . Expressing the equilibrium of pressures gives

$$P_0 - \frac{2\gamma \cos\theta_E}{R} = P_0 - \rho g H$$

The law of capillary rise flows directly from this equation.

$$H = \frac{2\gamma \cos\theta_E}{\rho g R}$$



Ascension capillaire

poly TP Divers



Expérience quali d'ascension capillaire avec des capillaires de tailles différentes, ou la plaque d'épaisseur variable qui fait une hyperbole.

On peut se servir de l'ascension capillaire comme mesure de tension de surface.



Etudions maintenant l'influence de la tension de surface dans des phénomènes dynamiques

3 Effets hydrodynamiques capillaires

3.1 Instabilité de Rayleigh-Plateau

La tension de surface influence de façon importante l'hydrodynamique des films minces, ce qui induit des écoulements et des instabilités des interfaces comme l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Un jet de liquide peut se déstabiliser pour former des gouttelettes : on peut l'observer sur le jet d'un robinet, s'il est assez long et à débit suffisamment faible, ou encore avec les perles de rosée sur les toiles d'araignées.

Schématiquement, il s'agit de comparer la surface d'un cylindre $A_c = 2\pi R h$, de rayon R et de hauteur h , et d'une assemblée de N gouttes sphériques de rayon r , $A_g = 4\pi r^2 N$. La conservation du volume impose $\pi R^2 h = 4N\pi r^3/3$, donc $A_c > A_g$ si $r > 3R/2$.

Avant de quantifier plus précisément cette instabilité, assurons-nous que la pesanteur n'intervient pas dans le problème en estimant le nombre de Bond. La contribution de l'énergie de pesanteur est négligeable tant que $Bo = (R/\ell_c)^2 \ll 1$: c'est très correct pour la formation de perles de rosées ou pour de fins filets d'eau.

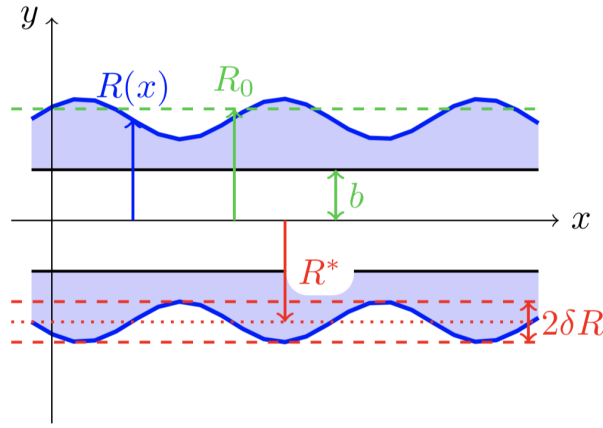


FIGURE 3 – Un film de liquide de rayon R_0 est déposé sur un cylindre de rayon b . Une perturbation axisymétrique de l'interface de longueur d'onde suffisante peut croître : le cylindre de fluide se déstabilise alors pour former un chapelet de gouttelettes.

▲ GHP p.412, Lidon, compléments dans le Charru p. 66 (parle de viscosité au début)

Considérons un film d'eau de rayon R_0 autour d'un fil cylindrique de rayon b et d'axe $\vec{e}_x$. On étudie l'évolution temporelle d'une perturbation axisymétrique de la forme $R(x) = R^* + \delta R(t) \cos(qx)$, avec $\delta R \ll R^*$. Par conservation du volume nous avons sur une longueur d'onde

$$\int_0^\lambda \pi R^2(x) dx - \pi b^2 \lambda = \pi (R_0^2 - b^2) \lambda$$

dont nous tirons

$$R^* \simeq R_0 - \frac{\delta R^2}{4R_0} + \mathcal{O}(\delta R^3)$$

La variation énergétique associée à cette perturbation s'écrit, pour une longueur d'onde,

$$\Delta E = \gamma \left[\int_0^\lambda 2\pi R(x) ds - 2\pi R_0 \lambda \right]$$

Une fois de plus, pour de petites déformations, on a $ds \simeq dx [1 + R'(x)^2/2]$ donc

$$\begin{aligned} \Delta E &\simeq 2\pi\gamma \left[\int_0^\lambda (R^* + \delta R \cos(qx)) \left(1 + \frac{q^2(\delta R)^2}{2} \sin^2(qx) \right) dx - R_0 \lambda \right] \\ &= 2\pi\gamma \left[(R^* - R_0) \lambda + \frac{R^* (\delta R)^2 q^2 \lambda}{4} \right] + \mathcal{O}(\delta R^3) \\ &= \frac{\pi\lambda\gamma}{4R_0} (\delta R)^2 \left[(qR_0)^2 - 1 \right] + \mathcal{O}(\delta R^3) \end{aligned}$$

Ainsi, les modes satisfaisant $qR_0 < 1$, donc de longueurs d'onde supérieures à $2\pi R_0$ sont instables. À nouveau, malgré l'existence d'une infinité de modes instables, seul se développe le plus rapide. Pour le déterminer, nous nous plaçons dans l'approximation de lubrification en supposant en particulier l'épaisseur $e = R - b$ du film faible devant le rayon b du cylindre. Le gradient de pression responsable de l'écoulement est le gradient de pression de Laplace. La courbure du fluide perturbé est donnée par

$$C(x) = \frac{1}{R(x)} - \frac{d^2 R}{dx^2} = \frac{1}{b + e(x)} - \frac{d^2 e}{dx^2}$$

La surface est courbée dans les dimensions : dans le plan de la figure, la courbure est celle que nous avons obtenue au paragraphe précédent, et dans le plan orthogonal, la section est circulaire donc le rayon de courbure est $R(x)$.

nous donnent les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{v}(x, y = 0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y = e(x, t)) = 0.$$

Nous pouvons alors obtenir le profil de l'écoulement. En supposant l'écoulement unidimensionnel (faible perturbation) l'équation de Stokes stationnaire s'intègre en

$$v_x(x, y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + Ay + B$$

et la prise en compte des conditions aux limites $\vec{v}(x, y = 0) = \vec{0}$ et $\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y = e(x, t)) = 0$. (continuité des contraintes tangentielles pour un fluide visqueux et impénétrabilité de la paroi) nous permet d'aboutir à l'expression

$$v_x(x, y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) [y^2 - 2e(x, t)y]$$

Calculons alors le débit volumique de l'écoulement :

$$Q(x, t) = \int_0^{e(x, t)} v_x(x, y) dy = -\frac{1}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) e^3(x, t)$$

Or, l'écoulement est incompressible, donc le débit se conserve : un bilan de matière sur une tranche fine du film de fluide nous donne $\partial_t e + \partial_x Q = 0$ soit

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial p}{\partial x} e^3(x, t) \right]$$

en injectant l'expression de la pression de Laplace il vient

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{1}{3\eta} \frac{d}{dx} \left[\gamma \left(\frac{-1}{(b+e)^2} \frac{de}{dx} - \frac{d^3 e}{dx^3} \right) e^3 \right]$$

En écrivant $e(x, t) = (R^* - b) + \delta e(t) \cos(qx)$ et en restant à l'ordre 1 dans le développement en δe , on obtient

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{\gamma e_0^3}{3\eta b^2} q^2 [1 - (qb)^2] \delta e$$

La perturbation évolue donc exponentiellement avec un temps caractéristique

$$\tau(q) = \frac{3\eta b^2}{\gamma e_0^3} \frac{1}{q^2 [1 - (qb)^2]}$$

On retrouve le critère d'instabilité : il y a croissance de la perturbation si $qb < 1$. En outre le mode le plus rapide correspond à

$$\lambda^* = \frac{2\pi}{q^*} = 2\pi\sqrt{2}b \quad \text{et} \quad \tau^* = \frac{12\eta b^4}{\gamma e_0^3}.$$

<https://www.youtube.com/watch?v=UKtz9VdYPdc> à 3min pour voir le phénomène.

Lidon : Raisonnement sur la surface des gouttes : minimisation de l'interface. Et puisque le filet d'eau est accéléré, il devient plus fin et la formation de perles est observée. Okay, on comprend bien pourquoi il y a fracture en gouttelettes. Maintenant, quel est le mécanisme de fracture ?

GHP : On pose tout bien le problème, avec un beau dessin. Dépression locale due à la loi de Laplace → Selon la longueur d'onde de la perturbation, il y a aplanissement ou croissance des bosses.

Code Py du turf Le code permet de retrouver le vecteur d'onde correspondant à l'inversion de stabilité, car pour $\lambda = 6.2 \text{ cm} \simeq 2\pi * R_0$, la pression est uniforme et au dessus, on a des surpressions au niveau des creux donc stabilisation et retour à l'équilibre. Attention cela dit ! Il y a un terme de surpression que le code n'affiche pas, celui dû à la courbure dans le plan perpendiculaire à la figure, celle due au rayon du cylindre $\Delta p = \frac{\gamma}{R_n}$.

3.2 Effet Marangoni

En fait vu la longueur de l'application précédente impossible que ça rentre malheureusement. Je laisse pour les questions. J'ai une vidéo stylée d'une goutte qui migre de mon projet labo de L3 je vais retrouver ça. Si manque de temps juste video en ouverture avec discussion vif

✚ GHP p. 403, Garing p. 705

Expérience de José Bico <https://www.youtube.com/watch?v=h3iUy4Wg8lg>, détails ici : <https://blog.espci.fr/jbico/files/2018/04/keiser17.pdf>

Comme c'est très bien expliqué dans la vidéo, l'eau ne s'étale pas car le paramètre de mouillabilité S est inférieur à 0, contrairement à l'éthanol. Donc pour un certain mélange, il y a mouillabilité, c'est la fraction critique d'étalement de 0.35, cf. figure 2. Pendant l'étalement, l'éthanol s'évapore sur les bords plus rapidement, donc il y a un effet Marangoni

-On va essayer d'expliquer tout ça : analyse du Garing. ce qui mène à une condition limite à l'interface. En supposant que le liquide est vertical, par application de l'équation de Navier-Stokes, déduction du profil de vitesse et du joli dessin d'inversion de vitesse qui en résulte.

Physiquement, il y a donc deux phénomènes :

1. L'effet Marangoni, qui force l'interface à monter sur les bords du verre par différence de tension de surface
2. La gravité, qui cause la retombée du vin en larmes, comme ce que l'on voit sur ces magnifiques images : slide.

Conclusion

Mise en évidence d'un effet souvent négligé, et pourtant à ne pas oublier. Pour un liquide pur, se manifeste aux horizons de la longueur capillaire. Pour un liquide inhomogène, il peut exister des effets importants (Marangoni). On en a vu quelques uns, mais ils sont dans des cadres bien fixés. Dans la nature on peut retrouver cela (les gerris, ou les insectes se déplaçant à l'aide de Marangoni). Et ça pose des problèmes en industrie pour plein de cas. Si on n'a pas fait Marangoni, on peut faire l'ouverture aux mélanges de liquide et à l'expérience de José Bico. Ouvertures possibles : Les MOUSSES, la physique un peu plus vénère (goutte liquide, domaines de Weiss et ses parois de Bloch)