

LP18 – PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

Bibliographie

- ⚡ *Thermodynamique*, **Diu**
- ⚡ *Thermodynamique PC-PSI*, **Choimet** (Précis)

Table des matières

1	Généralités sur le transport	2
1.1	Cadre de l'étude	2
1.2	Vecteur densité de courant	2
1.3	Équation de conservation locale	3
2	Diffusion	4
2.1	Loi de Fick	4
2.2	Analogies	5
2.3	Modèle microscopique	7
3	Compétition et couplage de différents types de transports : l'instabilité de Rayleigh-Bénard	8
3.1	Couplage	8
3.2	L'instabilité	8

Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : La leçon ne peut se limiter à la présentation d'un unique phénomène de transport.
- **2016** : Les analogies et différences entre les phénomènes de transport doivent être soulignées tout en évitant de dresser un simple catalogue.
- **2015** : Les liens et les limites des analogies entre divers domaines doivent être connus.

Je pense que c'est mieux de rester sur le transport de matière jusqu'aux analogies et à l'application parce que déjà on se le représente mieux, et ensuite parce qu'il y a vraiment que deux modes de transport (convection et diffusion), on pourra pas nous reprocher de pas avoir traité le rayonnement. Les deux premières parties sont assez classiques, cf Cléments et Francis/Gauthier ou leçon de 2018 de Léo/Lauren, Camille. En dernière partie la convection de Rayleigh-Bénard me paraît très cool pour faire intervenir le couplage entre transport de qdm et de chaleur, et la compétition entre convection et diffusion qui s'image par le développement d'une instabilité si le premier domine. Voili voilou.

1 Généralités sur le transport

↪ Diu p 466 Sanz p26

1.1 Cadre de l'étude

Imagine que je mette un sucre dans mon café... non je rigole... mais imagine quand même... Je veux alors savoir quelle est la densité de molécules de sucre dans mon café. Mais ça n'a pas de sens en fait, à l'échelle de la tasse ce n'est pas du tout homogène, moi j'aimerais bien connaître ma densité locale. Pour que cela ait un sens on a besoin de faire l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local :

Équilibre thermodynamique local

L'équilibre thermodynamique local est réalisé si on peut découper le système en volumes mésoscopiques pouvant être considérés comme des systèmes à l'équilibre thermodynamique.

Les systèmes mésoscopiques doivent être suffisamment petits pour que notre approximation soit pertinente (sinon pas d'évolution continue) mais suffisamment grand pour pouvoir y faire de la thermodynamique. Dans cette hypothèse on peut donc associer à chaque point de l'espace (ou plutôt à chaque volume mésoscopique) des grandeurs thermodynamiques d'équilibre comme la température, la pression, la densité... C'est une approximation largement utilisée dans le cas de l'air atmosphérique. Elle est valable lorsque le temps de relaxation du système est très petit devant le temps de transport des grandeurs du système.

On s'attachera ici à la description du transport des grandeurs conservées. Une grandeur conservée c'est une grandeur, nécessairement extensive, qui ne peuvent pas apparaître ou disparaître spontanément : si cette grandeur varie c'est qu'on a eu un apport ou un retrait de cette grandeur par l'extérieur. On pourra citer comme exemple le nombre de particules, la masse, l'énergie, la charge électrique (offre soumise à condition hein). Mais alors pourquoi s'intéresser au transport de ces grandeurs en particulier ? Au niveau microscopique, ces grandeurs ne sont pas modifiées par les collisions puisque celles-ci les préservent. Ainsi, si la répartition d'une grandeur conservée ne permet pas l'équilibre global du système, l'atteinte de cet équilibre se fera alors nécessairement par le transport de cette grandeur. Au contraire, pour une grandeur non conservée, celle-ci peut atteindre sa répartition d'équilibre localement grâce aux collisions et donc un phénomène de transport n'est pas forcément nécessaire.

1.2 Vecteur densité de courant

Concentrons nous d'abord sur le transport de particules. **Schéma au tableau.** Envisageons un système \mathbb{S} non isolé, qui peut échanger des molécules avec les systèmes qui l'entourent ; soit Ω le domaine de l'espace qu'il occupe. Si le nombre de molécules $N(t)$ contenues dans Ω varie, c'est que des particules sont entrées ou sorties de \mathbb{S} en traversant la surface fermée Σ qui délimite le domaine Ω . Soit Φ_N le « flux » de particules qui sortent de Ω à l'instant t en franchissant la surface Σ , c'est-à-dire le nombre de particules qui quittent le système par unité de temps à l'instant considéré. Ce flux est algébrique : il est compté positivement si les particules quittent vraiment le système, négativement si elles y

entrent. La variation dN , entre les instants t et $t + dt$, du nombre de particules contenues à l'intérieur du système est uniquement due au flux Φ_N :

$$dN = -\Phi_N(t)dt$$

On a donc la loi de conservation :

$$\frac{dN}{dt} + \Phi_N(t) = 0$$

Pour exprimer ce flux algébrique, on va utiliser la notion de vecteur densité de courant. Pour cela, on note $d\vec{\Sigma}$ le vecteur infinitésimal surface associé à Σ . On rappelle qu'un tel vecteur a pour norme l'aire de la surface infinitésimale associée et est dirigé vers l'extérieur du volume. On peut alors définir le flux de particule précédemment introduit à travers cette surface, correspondant au nombre algébrique de particules entrant (ou sortant car algébrique) de cette élément de surface par unité de temps :

$$d\Phi_n(\vec{r}, t) \hat{=} \vec{j}_n(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma} \tag{1}$$

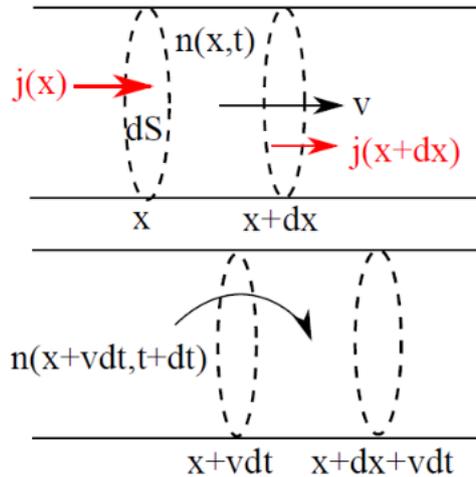
ce qui fait apparaître le vecteur densité de courant de particule. Il correspond à un flux surfacique. Le caractère algébrique du flux est alors compris dans la définition du produit scalaire : si \vec{j} est dans le même sens que $d\vec{\Sigma}$ alors le flux est positif (les particules sortent) sinon il est négatif (les particules rentrent). On peut par ailleurs remarquer que lorsque le vecteur densité de courant est tangent à la surface, le flux est nul : c'est assez intuitif.

Nous avons établi ce raisonnement dans le cas du transport de particule mais on peut le faire dans le cas d'autres grandeurs transportées : on peut toujours définir un vecteur courant de densité. Dans le cas du transport de particules on parle de vecteur densité de courant de particules, il s'exprime alors en $mol/s/m^2$ (ou pas si on travaille pas en moles). Dans le cas du transport de charge on parle de vecteur densité de courant de charges ($C/s/m^2 = A.m^{-2}$), dans le cas du transport de la chaleur on parle de vecteur densité de courant thermique ($J/s/m^2$).

↓ On a donc une équation de conservation globale bien définie, comment définir une loi de conservation locale ?

1.3 Équation de conservation locale

Considérons la situation unidimensionnelle suivante qui illustre le transport en présence d'un fluide :



Dans le volume dV compris entre x et $x + dx$ il n'y a ni sources ni puits. On a $\vec{j} = j\vec{e}_x$. Le milieu fluide se déplace à la vitesse v selon la direction x . On note $dN = n dV$ le nombre de particules dans le volume dV . La variation de dN entre t et $t + dt$ s'écrit de deux manière différentes :

$$\begin{aligned} dN(x + v dt, t + dt) &= dVn(x + v dt, t + dt) \\ dN(x + v dt, t + dt) &= S dx (n(x, t + dt) + v dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t + dt)) \\ dN(x + v dt, t + dt) &= S dx (n(x, t + dt) + v dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t)) \end{aligned}$$

(on se restreint à l'ordre 1 en dx et dt). Or on peut aussi écrire à l'aide du flux et donc du vecteur courant de densité :

$$\begin{aligned} dN(x + v dt, t + dt) &= dN(x, t) + S(j(x, t) - j(x + dx, t))dt \\ dN(x + v dt, t + dt) &= S dxn(x, t) - S \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dx dt \end{aligned}$$

En identifiant ces deux expressions il vient l'équation de conservation locale en 1D et généralisable en 3D :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + v_x \frac{\partial n}{\partial x} &= - \frac{\partial j}{\partial x} \\ \frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})n &= - \operatorname{div} \vec{j} \end{aligned}$$

Qui se simplifie si le milieu est à l'arrêt :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j} \quad (2)$$

Remarques Je suis pour m'arrêter là, rentrer la vitesse dans la divergence rajoute du calcul long à écrire pour pas grand chose je trouve (j'ai regardé, pour la suite la première suffit).

Si on prend l'équation générale on voit que l'on a deux termes de transport qui correspondent à deux modes de transport :

- La convection : c'est le second terme du membre de gauche. Il nécessite une vitesse du milieu fluide non nulle. C'est le cas notamment lorsque l'on mélange le café avec une cuillère : les molécules de sucre sont transportées par les mouvements de fluide.
- La diffusion : c'est le terme du membre de droite. Il est non nul même pour un milieu immobile. Si je laisse le sucre, la concentration finit par évoluer (déjà dire s'homogénéiser ?) sans mélanger.

Encore une fois, nous avons raisonné sur du transport de particules mais tout est transposable, par exemple au transport de charges ou de chaleur. Dans le cas du transport de la chaleur par exemple, on peut voir ces deux différents modes de transport lorsque l'on chauffe une casserole : le métal est chauffé au contact par conduction, qui correspond à de la diffusion, puis le fluide qui bouge transporte la chaleur dans tout le liquide.

↓ *Nous allons nous intéresser plus précisément à la diffusion*

2 Diffusion

2.1 Loi de Fick

↪ Diu p 476, p481

Diffusion de l'ammoniac

↪ Léo & Lauren



On prend un tube en verre fermé à ses deux extrémités par des bouchons percés dans lequel passe un fil de cuivre (ou peu importe, il sert juste de support), sur lequel on accroche des petits morceaux de papier à la phénolphtaléine. Ces papiers sont blancs dans l'air mais se colorent en rose en milieu basique. On introduit à l'une des extrémités du tube un coton imbibé dans de l'ammoniac (fameux pour ses propriétés basiques!) et on referme le tube. On observe une coloration des bouts de papier au fur et à mesure de la diffusion du gaz d'ammoniac dans le tube.

Pour pouvoir pleinement exploiter l'équation de conservation précédente, il faut se donner une expression de \vec{j} . D'un point de vue phénoménologique, on peut penser que la réponse du système (matérialisée par \vec{j} est une fonction de l'écart à l'équilibre (matérialisée par $\vec{\text{grad}}n$). On néglige aussi tout phénomène de retard de la réponse et d'effet à distance, de manière à ce que \vec{j} ne dépende que du gradient au même point. On suppose également que le gradient est suffisamment faible pour que les termes d'ordres supérieurs soient négligeables devant le terme d'ordre 1. Le terme d'ordre 0 étant nul (pas de flux meso à l'équilibre) on obtient la loi de Fick :

$$\vec{j}_n = -D \text{grad } n$$

Où D est le coefficient de diffusion, homogène à L^2T^{-1} . Il dépend de la température : plus la température augmente plus l'agitation thermique augmente, augmentant la diffusion. Il dépend a priori de la pression, et de la densité mais on supposera par la suite qu'il ne varie pas dans la région de l'espace qu'on étudie. Il dépend aussi de la nature des composants du milieu et de l'espèce qui diffuse.

		T (°C)	D (cm ² s ⁻¹)
Gaz (pression atmosphérique)	Hydrogène dans l'air	25	0,63
		400	3,24
	Vapeur d'eau dans l'air	25	0,24
		400	1,13
Liquides	Dioxyde de carbone dans l'eau	25	1,6 · 10 ⁻⁵
	Éthanol dans l'eau	25	1,2 · 10 ⁻⁵
	Éthanol dans le benzène	25	3,0 · 10 ⁻⁵
	Cuivre dans l'aluminium fondu	700	7,2 · 10 ⁻⁵
	Or dans l'argent fondu	980	2,5 · 10 ⁻⁵

FIGURE 1 – Caption

En combinant la loi de Fick avec l'équation locale de conservation du nombre de particules, il vient facilement l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

Remarques :

- Cette équation n'est pas invariante par retournement du temps $t \rightarrow -t$ contrairement à l'équation de d'Alembert, cela traduit ici un phénomène de diffusion irréversible, ie qui ne va pas spontanément changer de sens d'évolution. Exemple du sirop dans l'eau, qu'on peut faire en manip illustrative d'ailleurs, le sirop ne va jamais se reconcentrer en un point
- Cette équation n'est pas invariante par retournement du temps $t \rightarrow -t$ contrairement à l'équation de d'Alembert, cela traduit ici un phénomène de diffusion irréversible, ie qui ne va pas spontanément changer de sens d'évolution. Exemple du sirop dans l'eau, qu'on peut faire en manip illustrative d'ailleurs, le sirop ne va jamais se reconcentrer en un point
- Par analyse dimensionnelle avec D et t , on peut construire une longueur $\delta \sim \sqrt{Dt}$. Si la distribution de substance diffusante est initialement concentrée à l'origine, sa largeur au temps t est donnée par $\delta(t)$, proportionnelle à \sqrt{t} : la distribution s'étale et la variation en \sqrt{t} est caractéristique de la diffusion. OdG : temps associé à un étalement de 1 m. Dans un milieu gazeux avec $D = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $t \sim 6$ heures alors que pour un milieu liquide avec $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, $t \sim 32$ ans ! Or, dans la vie quotidienne, les diffusions dans des liquides sont plutôt rapides (on attend pas des années pour un sucre dans le café), ce sont des mouvements hydrodynamiques d'ensemble comme les vibrations de la table qui étalent plus efficacement la tache.

Illustration Py : avec étalement d'une gaussienne (tache d'encre). La faut bien expliquer et faire de la physique askip (retour de Francis sur la leçon des Cléments) : là où la courbure est négative (vers le centre) la densité diminue au cours du temps. Inversement vers l'extérieur la courbure est positive, la densité augmente. Plus la distribution est piquée, plus elle s'étalera vite pour les mêmes raisons. Le pic baisse par conservation de l'aire sous la courbe = quantité de matière totale, jsp quoi dire d'autre mdr.

2.2 Analogies

↪ Choimet p 97, Diu p 481, DGLR p.492

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de mouvement	Diffusion de charges
Grandeur conservée	Particules [N] = 1	Energie interne [E] = [J]	Quantité de mouvement [p] = [kg · m/s]	Charge ; [Q] = [C]
Inhomogénéité	$\vec{\text{grad}}n \neq 0$	$\vec{\text{grad}}T \neq 0$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \neq 0$	$\vec{\text{grad}}V \neq 0$
Loi de transport	$\vec{j}_n = -D\vec{\text{grad}}n$	$\vec{j}_Q = -\kappa\vec{\text{grad}}T$	$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\eta\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$	La loi d'Ohm \neq diffusion
Coefficient de transport	D [m ² · s ⁻¹]	κ [W · m ⁻¹ · s ⁻¹]	η [kg · m ⁻¹ · s ⁻¹]	Cela se retrouve pour l'effet de peau.
Coefficient de diffusion	D [m ² · s ⁻¹]	$D_{th} = \frac{\kappa}{\rho C}$ [m ² · s ⁻¹]	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ [m ² · s ⁻¹]	

Avec des bilans de grandeurs conservées et une loi de transport, on peut établir des équations de transports dans d'autres domaines. Toutes ces équations permettent un retour à l'équilibre thermodynamique global. Mais si le principe de conservation se fait sur une variable extensive, pour en arriver à l'équation de diffusion, il faut utiliser la loi de transport qui ne couple pas toujours les bonnes valeurs. Ainsi, l'équation pour la chaleur et la quantité de mouvement se font sur des variables intensives.

L'analogie entre la diffusion particulaire et la diffusion thermique est flagrante :

- même équation de conservation locale
- même loi de réponse linéaire phénoménologique qui définit la conductivité thermique
- on a aussi une équation de diffusion (donc mêmes commentaires et solutions) qui diffèrent juste des valeurs prises par D. On peut encore faire une comparaison de temps pour s'étaler sur 10 cm : métal : 100 s vs bois 28 h (cuillère en bois)

Malgré cette analogie, les phénomènes de transport de matière, de chaleur et de quantité de mouvement ont leurs spécificités. Premièrement, les valeurs des différents coeffs de diffusion n'ont rien à voir, et n'ont pas forcément la même dépendance en T $\frac{\partial D}{\partial T} > 0$ (plus d'agitation thermique). $-\frac{\partial \nu_{gaz}}{\partial T} > 0$ (idem) MAIS $\frac{\partial \nu_{liq}}{\partial T} < 0$ (interactions cohésives moins fortes devant la température?)... On avait vu ça pour la viscosité dynamique, pas cinématique et comme ρ est décroissante avec T ça pose problème pour les phases condensées Enfin, les ordres de grandeur de variation de D selon les phases sont très grands comparés à ν et D_{th}

D'autre part, les mécanismes de la conduction thermique multiples : pour les métaux, il y a le transport des électrons et la vibration du réseau (seulement le deuxième pour les isolants), contrairement aux autres phénomènes.

Le cas de la conduction électrique est complexe et mérite de s'y attarder. Revenons à l'équation de conservation globale $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j} + n\vec{v}) = 0$ Oublions tout de suite la convection, qui correspondrait ici à de la Magnéto-Hydro-Dynamique où le fluide en mouvement emporte les charges. La diffusion de particules chargées quant à elle correspond à un cas particulier de la diffusion de particules déjà vue dans le cas particulier où les particules en mouvements sont chargées. Cependant on parle de conduction électrique et non pas de diffusion électrique, pourquoi ?

Mathématiquement, les équations de conservation et loi de réponse électriques s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$$

$$\vec{j}_e = ne\vec{v} = -\sigma \text{grad} V$$

avec ρ la charge volumique, σ la conductivité du milieu et V le potentiel électrostatique. L'équation de conservation implique donc une dérivée temporelle de ρ et la loi de réponse une dérivée spatiale de V , en combinant les deux équations on aura donc deux variables non proportionnelles différentes et donc pas une équation de diffusion qui suppose la même variable dans les dérivées temporelle et spatiale.

la conservation des particules et de la charge ont les mêmes causes. Mais la loi d'Ohm obéit à une vraie force extérieure due à \vec{E} .

Dans le cas de la diffusion particulaire, les particules ne sont soumises à aucune force ! On peut avoir l'impression qu'elles se repoussent puisque les particules "fuient" les hautes concentrations, mais ce n'est qu'un résultat purement

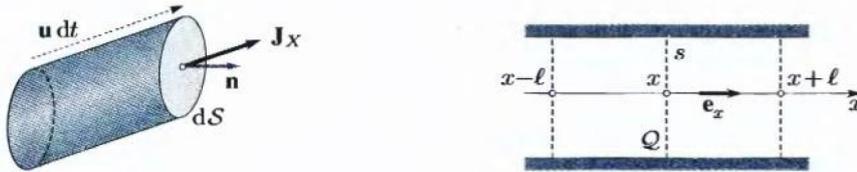
statistique. Imaginons une zone où la densité est élevée... Alors des particules en sortent (par agitation thermique), mais certaines y rentrent aussi. Il y a juste plus de particules qui sortent puisqu'il y a plus de particules tout court ! Dans le cas critique, où la densité est nulle en dehors d'une zone, aucune particule ne rentre. La diffusion de particules est donc un mécanisme piloté par l'agitation thermique.

Pour la loi d'Ohm, le courant est dû à un mouvement global des électrons imposé par un champ extérieur.

2.3 Modèle microscopique

➤ Pérez ch. 4, p.79 Modèle micro pour expliquer la diffusion de particules (y'a le Sanz p103 qui est bien aussi comme modèle)

Il s'agit de relier le courant volumique \vec{j}_n à la densité volumique de particules à partir d'un modèle microscopique simple unidimensionnel, sachant qu'il n'y a pas de convection.



Considérons une portion de plan \mathcal{Q} normale à l'axe des x , située à l'abscisse x (Fig. 4.6). Si le nombre de molécules par unité de volume est n_v , il y a en moyenne, par unité de volume, $n_v/3$ molécules qui ont une vitesse dirigée selon l'axe des x ; par conséquent, $n_v/6$ molécules se déplacent suivant les x croissants et autant suivant le sens opposé.

Pendant une durée élémentaire dt , les particules qui traversent la portion de plan \mathcal{Q} , dans le sens de \mathbf{e}_x , sont celles qui se trouvaient dans le cylindre de hauteur égale à $v_m dt$ centré au point de coordonnée $x - \ell$; leur nombre est donc $sv_m dt n(x - \ell)/6$, s étant l'aire de \mathcal{Q} . Quant aux particules qui traversent le plan dans le sens opposé, ce sont celles qui se trouvaient dans le cylindre de hauteur égale à $v_m dt$ centré au point de coordonnée $x + \ell$; leur nombre est $sv_m dt n(x + \ell)/6$. On en déduit le flux élémentaire de n suivant \mathbf{e}_x :

$$\Phi_n = \frac{1}{dt} \frac{1}{6} v_m s dt [n(x - \ell) - n(x + \ell)]$$

Comme ℓ est supposé faible devant les distances de variation significative de X , on a, en faisant un développement de Taylor :

$$n(x - \ell) - n(x + \ell) \approx \left[n(x) - \ell \frac{\partial n}{\partial x} \right] - \left[n(x) + \ell \frac{\partial n}{\partial x} \right] = -2\ell \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)$$

Finalement :

$$\Phi_n = -\frac{\ell v_m}{3} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) s$$

d'où le courant volumique \vec{j}_n :

$$\vec{j}_n = \mathbf{e}_x \frac{\Phi_n}{s} = -\frac{\ell v_m}{3} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x$$

- Pour la diffusion de particule dans l'air dans les CNTP cela donne un coefficient de diffusion $D = \frac{v_m \ell}{3} \simeq 10^{-5}$ (avec $v_m = \sqrt{3k_B T/m}$, $\ell = 1/n_v \sigma$ et $n_v = P/k_B T$, cf Pérez page 61 odg)

Nous avons compris les mécanismes de transports lorsqu'ils sont indépendants. Cependant c'est rarement le cas dans la réalité physique. Nous allons voir comment traiter ces problèmes sur l'exemple de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.



3 Compétition et couplage de différents types de transports : l'instabilité de Rayleigh-Bénard

↗ GHP chap 10

3.1 Couplage

Dans les solides, on veut facilement s'affranchir du terme d'advection et dire que le transport de chaleur est purement conductif mais dans un fluide, la chaleur peut être transportée par advection et par conduction. L'équation de transport de la chaleur est alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \kappa \Delta T$$

On sent déjà dans l'équation de la diffusion thermique qu'il va y avoir un couplage entre le mouvement du fluide (et donc la diffusion de quantité de mouvement de celui-ci) et le transport de chaleur.

Écrivons Navier-Stokes pour voir où apparaît le couplage en température

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho(T)}\vec{\nabla}P + \vec{g} + \nu(T)\vec{\nabla}^2\vec{v}$$

Ici le couplage se fait au niveau des dépendances en température de ρ et ν . En effet on sait par exemple que la densité d'un gaz diminue avec la température, et que celle de l'eau est minimale à 4°C. On mélange alors dans ce problème la diffusion et convection de chaleur et de quantité de mouvement.

3.2 L'instabilité

Présentation du phénomène Nous considérons le problème d'un fluide contenu entre deux plaques horizontales à des températures différentes. Dans cette situation, où le gradient de température est vertical, nous allons montrer que le terme $(\vec{v} \cdot \text{grad})T$ de transport de chaleur par convection contrôle l'écoulement (il était nul dans le cas précédent)

Supposons que la densité ρ du fluide dépende de la température, mais non de la pression (fluide incompressible), avec une variation :

$$\rho(x) = \rho_0 + \delta\rho(z) = \rho_0 [1 - \alpha(T(z) - T_0)] = \rho_0 \left[1 - \alpha\Delta T \frac{z}{a}\right]$$

où T_0 est la température uniforme du fluide en l'absence de gradient de température et α le coefficient de dilatation positif.

Si la température de la plaque inférieure est plus faible que celle de la plaque supérieure, la stratification de densité (fluide dense par dessous) est stable. Dans le cas opposé d'un fluide chauffé par en-dessous, on se trouve dans une situation instable, car les particules de fluide de plus faible densité sont situées au-dessous de celles de plus grande densité (en effet, la masse volumique diminue lorsque la température augmente). Un mouvement du fluide apparaît lorsque la différence de température excède une certaine valeur, appelée seuil de l'instabilité. Pour un fluide limité par deux plaques horizontales parallèles, ce problème est appelé instabilité de Rayleigh-Bénard.

Tant que la différence de température $T_2 - T_1 = \Delta T$ est inférieure à une valeur critique ΔT_c , les échanges de chaleur sont purement diffusifs (comme dans le cas où l'on chauffe le fluide par le dessus). À une valeur $\Delta T = \Delta T_c$, on observe une mise en mouvement du fluide : un ensemble de rouleaux contrarotatifs parallèles apparaît simultanément dans l'ensemble de la cellule.

Mécanisme Supposons qu'une perturbation initiale θ de température par rapport à la température d'équilibre $T(z)$ apparaisse en un point du volume. Par la poussée d'Archimède, un mouvement vertical est induit sur les particules de fluide correspondantes : ainsi, si θ est positif, la densité des particules diminue et le mouvement est ascendant. Il en résulte un apport convectif local de fluide ascendant chaud entraîné par ces particules : il vient des couches inférieures plus chaudes et renforce la perturbation initiale de température. Le processus pourra alors s'auto-entretenir si la diffusion de la chaleur et le freinage visqueux ne le modèrent pas suffisamment.

Cette boucle de réaction positive conduit à l'instabilité convective si les mécanismes stabilisants, que sont la conductivité thermique (qui diffuse la perturbation de température) et la viscosité (qui atténue la perturbation de vitesse), ne sont pas trop importants. Les conditions de démarrage de l'instabilité sont étroitement contrôlées par les valeurs relatives des constantes de temps d'échange de chaleur et de quantité de mouvement qui interviennent dans le problème. Un paramètre très important est le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$, qui caractérise les diffusivités relatives de la quantité de mouvement et de la chaleur. Dans la suite on suppose $Pr \gg 1$, de sorte pouvoir considérer la vitesse de la particule fluide s'équilibre rapidement et soit égale à sa valeur stationnaire, et que le mouvement de la particule fluide soit entièrement piloté par la diffusion thermique avec le fluide environnant.

Critère physique d'apparition de l'instabilité Dans notre cas, l'instabilité peut se développer lorsque la force déstabilisante est plus forte que la force stabilisante. Supposons une perturbation de taille R et étudions le mouvement d'une particule sphérique de taille R (attention c pas une pf mdr). On fait un bilan des forces à cette sphère

- La force stabilisante est la force de trainée de Stokes $F_S = -6\pi\eta Rv$.
- La force déstabilisante est la poussée d'Archimède : $F_D = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta\rho g$, avec $\delta\rho = -\alpha\rho_0\delta T = -\alpha\rho_0\Delta T = -\alpha\rho_0\Delta T \frac{\delta z}{d}$
 δz est la variation d'altitude avant thermalisation, donc en ordre de grandeur $\delta z \simeq v\tau_Q \simeq v \cdot \frac{4\pi R^2}{\kappa}$
- On considère de plus que la taille maximale de la perturbation est $R = a/2$, et on se place à cette valeur de R .

Finalement $R_a = \frac{\alpha g \Delta d^3}{\nu \kappa}$, qui décrit l'équilibre entre la poussée d'Archimède et les phénomènes de dissipation, doit être plus grand qu'un nombre de Rayleigh critique, qui vaut typiquement 3000 pour de l'eau avec $\Delta T = 10^\circ\text{C}$.