

LP26 – PROPAGATION AVEC DISPERSION

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : PSI

Bibliographie

✦ *Ondes*, Hprépa

Prérequis

- Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

Table des matières

1	Phénomènes ondulatoires	2
1.1	Corde de Melde	2
1.2	Câble coaxial	3
1.3	Analogies	4
2	Solution progressive	5
2.1	Forme des solutions	5
2.2	Étude énergétique sur la corde de Melde	6
3	Solution stationnaire.	7
3.1	La base des solutions stationnaires	7
3.2	Modes propres	7
3.3	Analyse harmonique	8

Remarques sur les leçons précédentes

- **2015** : Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui, d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles.
- **2014** : À l'occasion de cette leçon, le jury tient à rappeler une évidence : avec un tel titre, la leçon doit être équilibrée et ne peut en aucun cas se limiter pour l'essentiel aux ondes progressives.
- **2009** : Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
- **2008** : Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.
- **1999** : Les notions d'onde progressive, d'onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l'onde stationnaire de l'onde stationnaire résonante dans un système fermé.

Et ben ya pas mille solutions. Il faut faire électrique et mécanique, au moins une étude énergétique. A mon avis attendre de distinguer les différents types de solution pour l'étude énergétique puisque un coup tu propages et un coup non. Ya tout dans le Hprépa ou le cours de jérémy.

Introduction

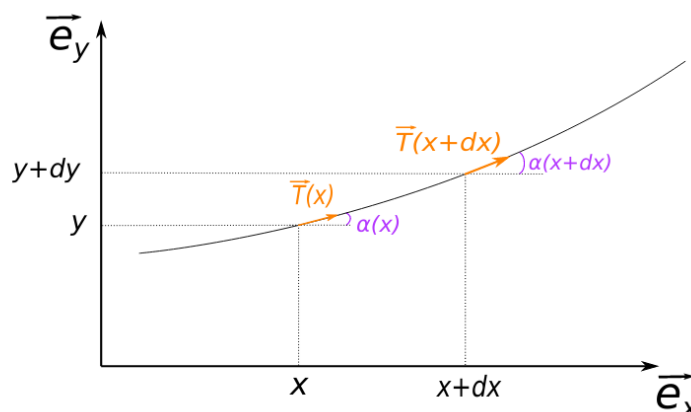
Exemples d'ondes diverses. Dire la définition physique d'une onde ? Perso je trouve qu'elle ne veut rien dire pck bon un champ avec variations spatio-temporelles couplées par EDP...

1 Phénomènes ondulatoires

Pour les deux exemples cf poly de jérémy rien à inventer hein. Aboutir à l'équation de d'Alembert à chaque fois.

1.1 Corde de Melde

Prenons un premier exemple : l'onde mécanique transversale se propageant le long d'une corde. Pour ça on va appliquer le principe fondamental de la dynamique d'un point de vue local, sur un morceay infinitésimal de corde :



Pour simplifier les calculs on va faire les hypothèses suivantes :

- On néglige les effets de la pesanteur
- On néglige tout phénomène élastique comme la torsion et l'élongation
- On considère des faibles déformations et on néglige les déplacements longitudinaux
- La corde est homogène et de masse linéique μ

Dans l'approximation des faibles déformations on a :

$$\alpha(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dx} \ll 1 \quad (1)$$

et

$$\sin \alpha \simeq \alpha, \cos \alpha = 1 \text{ et } dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \quad (2)$$

On va donc appliquer le PFD à cet élément infinitésimal de longueur dl . Selon l'axe $\vec{e}_x$, on a :

$$\begin{aligned} \mu dx a_x &= 0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) \\ 0 &= \frac{\partial(T \cos \alpha)}{\partial x} \\ \implies T(x, t) \cos \alpha(x, t) &= C^{\text{st}} \\ \implies T(x, t) &= C^{\text{st}} = T_0 \end{aligned}$$

Selon l'axe $\vec{e}_y$, on a :

$$\begin{aligned} \mu dx a_y &= T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t) \\ \mu dx a_y &= T_0 (\sin \alpha(x + dx, t) - \sin \alpha(x, t)) \\ \mu dx a_y &= T_0 (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) \\ \mu a_y &= T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

On trouve alors une équation de la forme :

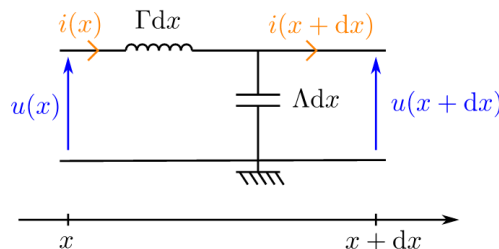
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (3)$$

Cette équation est appelée équation de D'Alembert, c'est l'équation centrale de la physique des ondes. **Faire l'analyse dimensionnelle sur c .** L'équation de D'Alembert couple donc les variations spatiales et temporelles par le biais d'une constante homogène à une vitesse. On verra plus tard que cette vitesse correspond en fait à la vitesse de propagation de l'onde en question.

Les ondes mécaniques sont des exemples très parlant car on voit les perturbations à notre échelle. Toutefois il existe d'autres types d'ondes présent dans notre quotidien.

1.2 Câble coaxial

On peut montrer en effet que la tension et le courant se propageant le long d'un câble coaxial correspondent aussi à des ondes dont l'évolution est régie par une équation de D'Alembert. Pour cela, on va reprendre le modèle des constantes réparties que l'on avait déjà évoqué précédemment et on va utiliser les lois de l'électrocinétique pour déterminer l'évolution de la tension et du courant.



On peut écrire la loi de mailles :

$$u(x + dx) = u(x) - (\Lambda dx) \frac{\partial i}{\partial t}$$

Et la loi des noeuds :

$$i(x) = i(x + dx) + (\Gamma dx) \frac{\partial u}{\partial t}$$

De sorte à avoir les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Avec Schwarz on parvient alors à l'équation de D'Alembert suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \quad (4)$$

Pour des valeurs constructeur données : $\Gamma \sim 100 \text{ pF/m}$ et $\Lambda \sim 0.15 \mu\text{H/m}$ on a $c \sim 3.10^8 \text{ m/s}$. Soit une propagation à une vitesse proche de celle de la lumière. Pour montrer que cette vitesse issue de l'équation de d'Alembert correspond à la vitesse de déplacement de la perturbation, on peut faire l'expérience suivante :



Mesure de c dans un câble coaxial



Envoyer un pulse avec un oscilloscope sur lequel est mis un T. Deux câbles sont reliés à l'oscilloscope : un court et un long. En notant ΔL leur différence de longueur et Δt la différence de temps d'arrivée à l'oscillo on a :

$$c = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Attention ! Bien mettre l'impédance de l'oscilloscope sur 50 Ohms pour ne pas avoir une réflexion ! Utiliser le mode Single.

On trouve bien une vitesse de l'ordre de c donc, tout est OK !

Ce phénomène n'est donc pas propre à un domaine physique, il est transversal (lol). Quelles analogies peut-on donc faire entre eux ?



1.3 Analogies

Un phénomène ondulatoire fait appel à un couplage de deux grandeurs physiques. Dans le cas de la corde vibrante c'est la vitesse transversale et la tension alors que dans le câble coaxial ce sont le courant et la tension. D'autres phénomènes ondulatoires font intervenir d'autres grandeurs d'une toute autre nature comme les OEM avec le champ B et le champ E et les ondes acoustiques avec le champ de vitesse et le champ de surpression.

	Corde vibrante	Câble coaxial	Onde acoustique	Onde EM
Grandeurs couplées	v_y et T_y	i et u	$\vec{v}_1$ et p_1	$\vec{E}$ et $\vec{B}$
Equation	$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y$	$\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u$	$\partial_x^2 \vec{v}_1 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{v}_1$	$\partial_x^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$
Vitesse	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$
Ordre de grandeur	$c \approx 100 \text{ m/s}$	$c \approx 3.10^8 \text{ m/s}$	$c \approx 300 \text{ m/s}$	$c = 3.10^8 \text{ m/s}$

(5)

En pratique on définira une onde comme le perturbation spatiale d'une grandeur physique se propageant à travers le temps. Ou encore plus mathématiquement, un champ dont les dérivées spatiales et temporelles sont couplées par une équation aux dérivées partielles (mais bon dans ce cas là, la définition est assez... peu définissante)

↓ Bon très bien d'avoir des équations mais nous ce qu'on veut pour décrire le réel c'est des solutions !

2 Solution progressive

2.1 Forme des solutions

↗ Hprépa p29

Visuellement, quand on excite la corde temporairement, la perturbation ne change pas de forme, mais se déplace simplement le long de son axe à une vitesse c . Prenons une photo de la corde à un instant $t = 0$. On note alors $y(x, 0)$ son profil. On peut prévoir simplement son profil à instant $t > 0$: ce sera le même, mais décalé d'une distance ct .

$$y(x, t) = y(xct, 0)$$

De même si la perturbation se déplaçait dans le sens opposé, on aurait

$$y(x, t) = y(x + ct, 0)$$

Cherchons donc des solutions qui ne dépendent que de $u = x - ct$ et $v = x + ct$. Il faut réécrire l'équation de d'Alembert selon ces variables :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_x = \partial_u \partial_u + \partial_v \partial_v = \partial_u + \partial_v \\ \partial_t = \partial_t u \partial_u + \partial_t v \partial_v = c(\partial_v - \partial_u) \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_x^2 = \partial_u^2 + \partial_v^2 + 2\partial_u \partial_v \\ \partial_t^2 = c^2 (\partial_v^2 + \partial_u^2 - 2\partial_u \partial_v) \end{cases}$$

Donc l'équation devient :

$$\partial_u \partial_v y = 0$$

Donc on peut intégrer par rapport à v :

$$\partial_v y = f(u)$$

Où $f(u)$ est une fonction quelconque dérivable, on peut nommer $F(u)$ une de ses primitives de sorte que, la deuxième intégration donne

$$\begin{aligned} y(u, t) &= F(u) + G(v) \\ y(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) \end{aligned}$$

Où F et G sont deux fonctions $\mathcal{C}^2$ à une variable. On a donc montré que toutes les solutions se mettaient sous la forme d'une somme d'un profil F se déplaçant à c dans le sens des x croissants et d'un profil G se déplaçant à la même vitesse mais dans le sens opposé. Ce sont ces ondes que l'on appelle progressives.

Onde progressive : onde se propageant sans déformation à la vitesse c constante.

Dans le cas d'une propagation dans un milieu en 3D on peut observer plusieurs types d'ondes progressives. On appelle surface d'onde la surface qui à un instant t correspond à une même valeur de l'onde. On pourra se ramener au cas précédent d'une propagation en 1D si l'onde est plane, c'est à dire les surfaces d'onde sont des plans. On pourra également observer des ondes sphériques, dont les surfaces d'onde sont des sphères.

D'autre part, l'équation de propagation étant linéaire, on peut chercher des solutions progressives harmoniques : en effet ce type de solution est pertinent dans le cas d'une équation linéaire car l'analyse de Fourier affirme qu'on peut écrire une perturbation quelconque comme une somme d'ondes monochromatiques. Si on résout l'équation de d'Alembert pour une pulsation, alors comme l'équation est linéaire on obtiendra la solution pour un signal quelconque en superposant les solutions monochromatiques.

Les ondes progressives monochromatiques sont de la forme :

$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{x}{c}\right) &= \psi_{01} \cos(\omega t - kx + \phi_{01}) \\ g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= \psi_{02} \cos(\omega t + kx + \phi_{02}). \end{aligned}$$

Ces solutions possèdent une périodicité temporelle et spatiale $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. En injectant les solutions dans l'équation de d'Alembert on peut vérifier qu'elles respectent la relation de dispersion $\omega = kc$.

2.2 Étude énergétique sur la corde de Melde

🔗 Garing ya les photos sur le site de Francis.

Aussi possible d'admettre l'expression de l'énergie et de l'interpréter vite-fait

L'onde progressive étant la communication de proche en proche d'un mouvement, elle s'accompagne également d'un transport d'énergie. Nous allons étudier la propagation de l'énergie associée à une onde progressive dans le cas de la corde de Melde.

L'élément de masse $dm = \mu dx$ de vitesse $\frac{\partial y}{\partial t}$ possède l'énergie cinétique

$$dE_c = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

d'où la densité $e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$

$$L = \int ds \text{ avec } ds^2 = dx^2 + dy^2$$

soit

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx \simeq \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad \text{car } \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$$

d'où

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Le travail de l'opérateur (on rappelle que par hypothèse, T reste constant) pendant cet allongement est $W_{0p} = T(L - l) = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$. En effet, T est le module de la force que devrait exercer un opérateur extérieur à la corde pour obtenir son allongement. Son travail (positif) s'identifie donc à la variation d'énergie potentielle de la corde. E_p étant prise nulle pour la corde au repos, il vient

$$E_p = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

soit $e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$

Finalement :

$$e = e_c + e_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

On remarque qu'il y a équipartition entre énergie cinétique et potentielle.

Or la puissance transmise s'écrit $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot T_0 \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c} y(x, t)^2$

Les puissances transmises et l'énergie se propagent donc à la vitesse c comme y , et sont en valeur moyenne non nulles.

On retrouve aussi l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\frac{de}{dt} + \frac{dP}{dx} = 0$$

Finir le tableau

	Corde vibrante	Cable coaxial	Onde acoustique	Onde EM
Grandeurs couplées	v_y et T_y	i et u	$\vec{v}_1$ et p_1	$\vec{E}$ et $\vec{B}$
Equation	$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y$	$\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u$	$\partial_x^2 \vec{v}_1 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{v}_1$	$\partial_x^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$
Vitesse	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$
Puissance	$P = T_y \cdot v_y$	$P = u \cdot i$	$P = \langle p_1 \vec{v}_1 \rangle$	$P = \langle \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \rangle$
Densité d'énergie	$e = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$	$e = \frac{1}{2} \Gamma u^2 + \frac{1}{2} \Lambda i^2$	$e = \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_S p_1^2$	$e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2$

(6)

Ha mais si on fixe le bout de la corde regardez ça se propage pas... Shit on dirait qu'il faut chercher une autre base.

3 Solution stationnaire.

3.1 La base des solutions stationnaires

⚡ Hprépa 3.2

Corde de Melde



On fixe un bout et on excite sinusoidalement

On observe des oscillations dans le temps dont l'amplitude dépend uniquement de la position, et plus du temps. Les dépendances en l'espace et le temps sont découplées. Mathématiquement, de telles ondes s'écrivent :

$$\psi(x, t) = F(x)G(t)$$

Si cette onde est solution de l'équation de d'Alembert, nous obtenons :

$$F''(x)G(t) - \frac{1}{c^2}F(x)G''(t) = 0$$

donc :

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = A$$

avec $A = \text{cte}$ car les deux premiers membres, égaux quels que soient x et t , ne peuvent donc plus en dépendre.

Si nous cherchons une solution acceptable pour toutes les valeurs de x et t , nous devons rejeter les solutions qui divergent quand t tend vers l'infini, donc ne considérer que le cas où la constante est strictement négative : $A = -\omega^2$ (le cas d'une constante nulle est sans intérêt et de toute façon diverge). ω peut a priori pour l'instant prendre n'importe quelle valeur. Nous obtenons alors :

$$G(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi_G) \\ F(x) = F_0 \cos(kx + \varphi_F) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Donc $\psi(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi_G) \cos(kx + \varphi_F)$

On trouve alors une autre bases des solutions de l'équation de d'Alembert, qui est en fait équivalente à celles des OPPH $\cos \omega t \cos \frac{c}{\omega} x = \frac{1}{2} (\cos(\omega t - \frac{c}{\omega} x) + \cos(\omega t + \frac{c}{\omega} x))$.

Passage d'une base à l'autre (code python)

Python somme onde

Les ondes stationnaires sont cependant très différentes des OPPH car elles ne transportent en moyenne pas d'énergie : calcul de la puissance moyenne.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \propto \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

Cette nouvelle base correspond à ce qu'on observe expérimentalement avec la corde de Melde dès qu'on fixe des conditions limites. Étudions l'importance de ces CL

3.2 Modes propres

Calcul des modes propres

Corde de Melde.



On montre la corde de Melde avec un stroboscope (relié à un autre GBF). Prendre le temps de soigner l'arrière-plan avec un panneau. Montrer à la main l'existence d'harmoniques : avec un signal triangle en input de la corde de Melde on ne voit que le mode fondamental (un seul ventre de taille L), mais quand on impose un noeud à $L/3$ on observe encore un ventre de taille $L/3$

Considérons les solutions trouvées précédemment. La résolution avec les CL $y(0, t) = y(L, t) = 0, \forall t$ donne, avec évidemment L la longueur de la corde,

$$\varphi = 0 \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad ; \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On a ici une structure en modes indicés par n , cette quantification provient des conditions aux limites. Avec la définition de $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ on obtient une condition de quantification sur la longueur de la corde :

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L$$

Un mode de vibration n'est alors possible que si la longueur d'onde associée est un sous multiple de la longueur de la corde. Il est important de noter que l'origine de cette structure en modes provient directement des conditions aux limites, ces mêmes conditions qui ont nécessité l'utilisation des ondes stationnaires. On peut généraliser ce résultat : toute onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert possède une structure en modes.

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad ; \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, f_n = n \frac{c}{2L}$$

3.3 Analyse harmonique

🔗 Hprépa p 44

Possibilité pour gagner du temps : projeter ce qui est en accolade et les calculs de l'exemple

À nouveau grâce à l'analyse de Fourier, on peut écrire que la forme générale des ondes qui vérifient l'équation de propagation le long d'une corde fixée à ses extrémités est la superposition des modes de la corde :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \cos 2\pi\nu_n t + B_n \sin 2\pi\nu_n t) \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda_n} \right) \right]$$

Nous nous proposons de calculer l'amplitude des composantes harmoniques qui la constituent. Il est, en effet, intéressant de les déterminer afin de pouvoir agir sur les paramètres qui les contrôlent : il faut savoir contrôler le spectre des vibrations de cette corde qui détermine le timbre de l'instrument (répartition des harmoniques excités). Ceci s'obtient en jouant sur les conditions initiales (par exemple emplacement de l'archet du violon, du marteau du piano...).

Les coefficients A_n et B_n de la décomposition en série de Fourier compatibles avec les conditions aux limites peuvent, par exemple, être déterminés à partir des conditions initiales imposées à la corde vibrante.

Nous supposons connues les valeurs, pour x compris entre 0 et L , de $\psi(x, 0)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0)$, soit :

$$\begin{cases} \psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right) \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \frac{\pi c}{L} B_n \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right) \right] \end{cases}$$

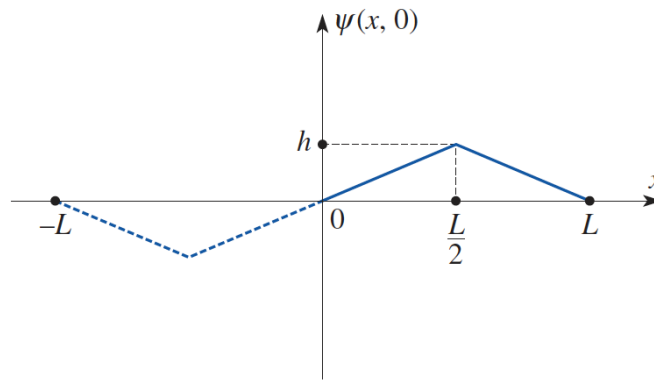
À la lecture de ces relations, nous constatons que :

- les A_n sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique $Y(x)$, impaire (pas de terme en cosinus) et de période $2L$, obtenue en prolongeant par périodicité la fonction $\psi(x, 0)$
- les B_n sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique $V(x)$, impaire et de période $2L$, obtenue en prolongeant par périodicité la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0)$

Nous pouvons donc déterminer les amplitudes A_n et B_n à l'aide des conditions initiales, en calculant les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \left(n \pi \frac{x}{L} \right) \psi(x, 0) dx \\ B_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L \sin \left(n \pi \frac{x}{L} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) dx \end{cases}$$

Exemple : spectre d'une corde pincée

FIGURE 1 – Corde pincée à $t = 0$

Pour cette corde, le coefficient B_n est nul. Le coefficient A_n étant, par symétrie, nul pour n pair, il nous faut déterminer :

$$\begin{aligned} A_{2p+1} &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{L}x\right) \psi(x, 0) dx \\ &= \frac{8}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{L}x\right) h \frac{x}{L} dx \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne :

$$A_{2p+1} = \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}$$

Les harmoniques présents sont tous impairs : $n = 1$ (fondamental), $3, 5, 7, 9, \dots$, et leurs amplitudes décroissent très rapidement en $\frac{1}{n^2}$.

Le spectre sonore perçu par l'oreille sera ainsi essentiellement limité aux premiers harmoniques. Considérons quelques valeurs numériques.

$$\begin{aligned} A_1 &= 8,11 \cdot 10^{-1}h; & A_3 &= -9,00 \cdot 10^{-2}h; \\ A_5 &= 3,24 \cdot 10^{-2}h & A_7 &= -1,65 \cdot 10^{-2}h \end{aligned}$$

etc.

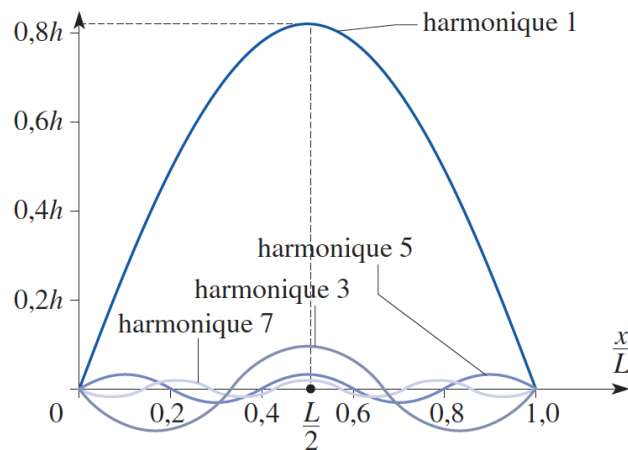


FIGURE 2 – Harmoniques 1,3,5,7 de la corde pincée

Conclusion

Cadre d'utilisation des deux bases, réflexion à un interface.