

# LP26 – PROPAGATION AVEC DISPERSION

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L3

## Bibliographie

- ✦ [http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID\\_fiche=12685](http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=12685), BUP 649
- ✦ *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, Garing
- ✦ *Hydrodynamique physique*, Guyon, Hulin, Petit

## Prérequis

- Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

## Table des matières

|          |                                             |          |
|----------|---------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Propagation des ondes dans un plasma</b> | <b>2</b> |
| 1.1      | Modélisation . . . . .                      | 2        |
| 1.2      | Équation de propagation . . . . .           | 3        |
| 1.3      | Relation de dispersion . . . . .            | 3        |
| <b>2</b> | <b>Propagation d'un paquet d'onde</b>       | <b>4</b> |
| 2.1      | Notion de paquet d'onde . . . . .           | 4        |
| 2.2      | Vitesse de groupe . . . . .                 | 5        |
| 2.3      | Étalement du paquet d'onde . . . . .        | 6        |
| <b>3</b> | <b>Conséquences de la dispersion</b>        | <b>6</b> |
| 3.1      | Propagation dans le câble coaxial . . . . . | 6        |
| 3.2      | Ondes gravito-capillaires . . . . .         | 7        |
| <b>4</b> | <b>Remarques</b>                            | <b>8</b> |

## Remarques sur les leçons précédentes

- **2016** : Il s'agit d'une leçon qui porte sur la dispersion et non sur la propagation.
- **2015** : Le jury invite les candidats à réfléchir sur les notions de vitesse de groupe et de vitesse de l'énergie qu'ils ne s'identifient pas forcément. Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.
- **2012,2013** : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
- **2009,2010** : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.
- **2007,2008** : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- **2001** : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que  $k$  et  $\omega$  sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.
- **2000** : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que  $k_x, k_y, k_z$  et  $\omega$  sont reliés par la relation de dispersion.

Du coup le bail c'est I. Exemple d'un milieu dispersif (plasmas ou câble coax) II. Conséquences sur un signal réel : déformation du paquet d'onde. III. Exemples. C'est mieux de commencer par les plasmas pour pouvoir discuter de la physique d'un milieu dispersif je pense le câble coax c'est pas hyper intéressant. La deuxième partie elle est obligée, sans oublier d'y inclure une petite animation et après on peut faire câble coax et ondes gravitocapillaires en exemple (pour l'application au transport d'information pour le premier et pour montrer deux régimes de dispersion pour le deuxième). Ya pas mal d'infos dans la correction de Valentin sur le pde. Je sais pas trop si c ok de pas du tout parler de dispersion à cause des CL.

## Introduction

D'Alembert n'explique pas la déformation des signaux (trouver une illustration/exemple)

## 1 Propagation des ondes dans un plasma

### 1.1 Modélisation

Un plasma est un ensemble macroscopiquement neutre de charges positives (ions positifs de masse  $M$  et de charge  $+e$ ) et d'électrons (de masse  $m$  et de charges  $e$ ) de densité commune  $n$ . C'est le cas de l'ionosphère par exemple, partie de l'atmosphère comprise entre 60 et 1000 km d'altitude. Nous allons étudier la propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPH) dans un tel milieu. On supposera l'onde polarisée rectilignement  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$ . Le champ électrique incident va mettre en mouvement les charges, créant un courant qui devient source de champ EM. La propagation ne sera visiblement pas aussi simple que dans le vide.

On fait les hypothèses suivantes sur le milieu (**sur slide**) :

- On suppose le plasma dilué de sorte à négliger les interactions entre les charges
- On suppose les charges non relativistes.

Les charges n'étant soumises qu'à la force de Lorentz, le principe fondamental de la dynamique appliqué aux électrons et aux ions donne :

$$m \frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \wedge \mathbf{B}) \quad M \frac{d\mathbf{v}_+}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_+ \wedge \mathbf{B})$$

Dans le plasma les normes des champs sont liés par la relation  $E = v_\phi B$  avec  $v_\phi$  la vitesse de phase. Or les charges étant supposées non relativistes,  $\mathbf{v} \ll c \simeq v_\phi$  (hypothèse à vérifier a posteriori) alors la composante magnétique de la force de Lorentz est négligeable et donc en se plaçant en notation complexe on trouve les équations :

$$\frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = -e\mathbf{E} \quad \frac{d\mathbf{v}_+}{dt} = e\mathbf{E}$$

De plus, comme  $\frac{m}{M} \ll 1$ , alors  $\frac{\mathbf{v}_-}{\mathbf{v}_+} \gg 1$ . On peut négliger le mouvement des ions devant celui des électrons.

↓ Pour étudier la propagation de l'OEM, établissons la relation entre le courant créé par l'onde qui deviendra source de champ, et le champ électrique incident.

## 1.2 Équation de propagation

On a

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -ne \frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}$$

On obtient la loi d'Ohm complexe, avec la conductivité du plasma

$$\gamma = \frac{ne^2}{im\omega} = \frac{\omega_p^2 \epsilon}{i\omega}$$

où  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$  est la pulsation du plasma.

On observe que la densité de courant et le champ  $\mathbf{E}$  sont en quadrature de phase : d'après la loi d'Ohm locale, il n'y a pas de puissance dissipée donc pas d'absorption

Comme dans le cas de la propagation dans le vide, repartons des équation de Maxwell pour établir l'équation de propagation de l'onde.

**Équation de Maxwell-Faraday**  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

**Équation de Maxwell-Ampère**  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  On prend le rotationnel de la première et on reporte la seconde :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

$$\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

or puisque le champ incident est transverse, on a  $\text{div} \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu_0 m e^2}{m} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On observe l'apparition d'un terme supplémentaire par rapport à l'équation de d'Alembert. L'équation reste néanmoins linéaire, ce qui nous permet de chercher des solutions sous forme d'ondes planes  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - k z)) \vec{e}_x$ .

## 1.3 Relation de dispersion

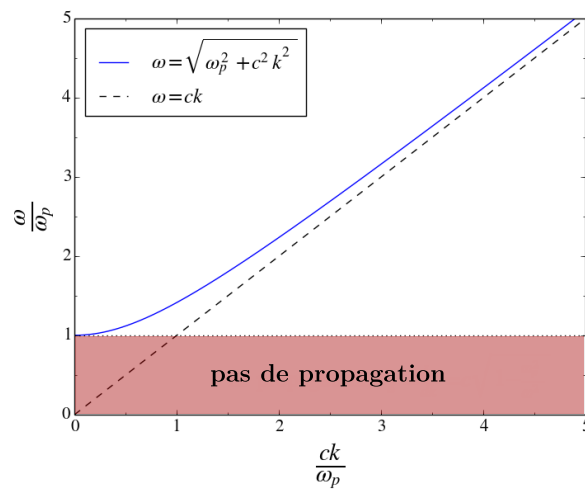
En injectant cette solution dans l'équation de propagation, on trouve

$$k = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

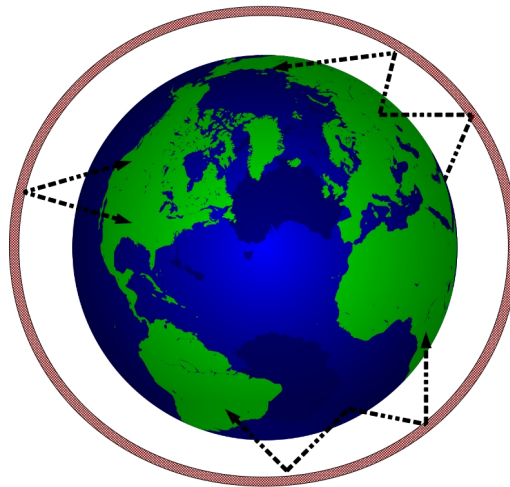
C'est l'équation de Klein-Gordon qu'on retrouve dans d'autres domaines de la physique, comme la chaîne d'oscillateurs couplés. On remarque que pour  $\omega \gg \omega_p$ , on retrouve l'équation de d'Alembert : le champ varie trop vite pour que les charges suivent le mouvement, le milieu est transparent. On voit qu'a priori  $k$  pourra prendre des valeurs complexes. On note  $k = k' + ik''$  et la solution s'écrit  $\vec{E} = E_0 \exp(-k'' z) \exp(i(\omega t - k' z)) \vec{e}_x$ . Ainsi, on voit que la propagation se fait à la vitesse de phase dans l'exponentielle :  $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$ . On peut distinguer plusieurs cas :

- $\omega > \omega_p$  alors  $k^2 > 0$  donc  $k = k'$  est réel. On obtient une OPPH, l'onde se propage dans le plasma à la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

- $\omega < \omega_p$  lors  $k^2 < 0$  donc  $k = k''$  est imaginaire pur. L'onde est atténuée exponentiellement dans le plasma et ne se propage pas : on parle d'onde évanescence.



On peut donc dire que le plasma agit comme un passe bas sur les ondes électromagnétique : en dessous de  $\omega_p$  les ondes ne se propagent pas dans le plasma. Cette propriété est utilisée pour propager les ondes radio par réflexion sur l'ionosphère ( $\omega_p \simeq 10^7$  Hz).



Je parle pas encore de la vitesse de groupe parce qu'elle s'interprète pas vraiment sans le paquet d'onde

↓ *Damn vitesses de phase qui dépend de la fréquence Conséquences sur un signal réel constitué de plein de fréquences ?*

## 2 Propagation d'un paquet d'onde

### 2.1 Notion de paquet d'onde

Une OPPH ne peut pas décrire une onde physique réaliste, car elle est d'extension spatiale et temporelle infinie, et possède donc une énergie infinie. C'est néanmoins un outil mathématique essentiel si on résout l'équation de propagation pour une OPPH, l'équation étant linéaire on peut la résoudre pour un signal quelconque en le décomposant en somme d'OPPH.

On peut décrire un signal périodique par une somme discrète d'OPPH, mais un signal réel est composé d'un ensemble continu de fréquences. S'il est solution de l'équation de propagation, alors par linéarité les OPPH de la somme vérifient la relation de dispersion  $\omega = \omega(k)$ . Le signal s'écrit donc

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

Le coefficient  $\hat{A}(k)$  est la transformée de Fourier de  $A(x, t)$ . Ainsi défini, l'inégalité d'Heisenberg spatiale montre qu'on obtient bien un signal d'extension spatiale finie.

↓ Étudions comment se propage cette somme d'ondes de fréquences différentes, et donc de vitesses différentes

## 2.2 Vitesse de groupe

Étudions maintenant la façon dont un tel paquet d'ondes se propage. Pour cela, on le suppose de faible extension spectrale :  $\hat{A}(k)$  ne prend des valeurs non-nulles que dans l'intervalle  $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$  avec  $k_0 > 0$  et  $\delta k \ll k_0$ . On peut alors écrire un développement limité de la relation de dispersion :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2)$$

Injectons ce développement dans l'expression complexe du paquet d'ondes précédent.

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i \left[ k_0 x + (k - k_0)x - \omega(k_0)t - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)t \right]} \end{aligned}$$

De plus,  $\hat{A}(k)$  est a priori complexe et on peut également en développer la phase au premier ordre en  $(k - k_0)$  :

$$\hat{A}(k) = |\hat{A}(k)| e^{i\phi(k_0)} e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)}$$

Tous les termes en  $k_0$  peuvent sortir de l'intégrale :

$$A(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{A}(k)| e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} e^{i \left( (k - k_0)x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)t \right)}$$

Posons alors le changement de variable  $K = k - k_0$  et on pose la nouvelle fonction  $\hat{A}_e(K) = |\hat{A}(k_0 + K)| e^{i\phi'(k_0)K}$  alors :

$$A(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \hat{A}_e(K) e^{iK \left( x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right)}$$

L'intégrale est alors la transformée de Fourier réciproque de la fonction  $\hat{A}_e(K)$ , prise en  $x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t$ . Il vient alors :

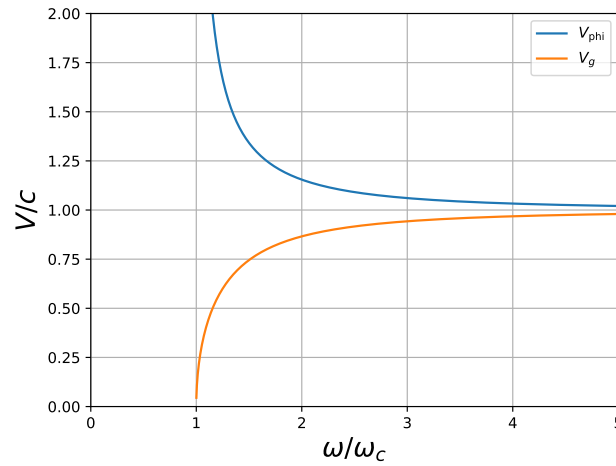
$$A(x, t) = A_e \left( x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))}$$

On observe que le paquet d'onde est le produit d'une onde plane progressive sinusoïdale se propageant à la vitesse  $v_{\phi 0} = \frac{\omega_0}{k_0}$ , et d'une enveloppe  $A_e$  qui se propage à la vitesse  $v_{g0} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0$ . C'est à cette vitesse que se propage le paquet d'onde.

Dans le cas de l'équation de d'Alembert ces deux vitesses sont égales mais pour la propagation dans un milieu dispersif comme les plasmas, elles sont différentes :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$$

Si on trace les deux :



On voit qu'elles sont égales dans la limite  $\omega \gg \omega_p$  de l'équation de d'Alembert, mais bien différentes sinon. C'est la vitesse de groupe qui correspond à la vitesse de propagation de l'information portée par le signal : elle est bien inférieure à  $c$  tout va bien.

**Animation py : régler un grand temps typique d'étalement si on ne veut montrer que le glissement de phase.**

## 2.3 Étalement du paquet d'onde

Que se passe-t-il si le signal n'est pas bien piqué dans son extension spatiale ? Il faut pousser le développement limité de la relation de dispersion à l'ordre 2. On obtient alors  $\Omega = \omega(k) - \omega(k_0)$ ,  $\Delta k = k - k_0$  et  $P = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \Big|_{k_0}$

$$\Omega(\Delta k) = v_g \Delta k + P \Delta k^2 + \mathcal{O}(\Delta k^3)$$

et le signal s'écrit

$$A_e(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \tilde{A}_e(K, t=0) e^{i(K\xi - PK^2 t)}$$

où  $\xi = x - v_g t$

Pas facile à interpréter mais en pratique on observe un étalement du paquet d'onde qui dépend à la fois du milieu mais aussi du paquet d'onde au départ. Plus le paquet d'onde sera étroit spatialement, plus l'étalement sera rapide. ya un exemple qualitatif avec un paquet rectangle dans la leçon de Francis et Gauthier mais j'ai pas compris

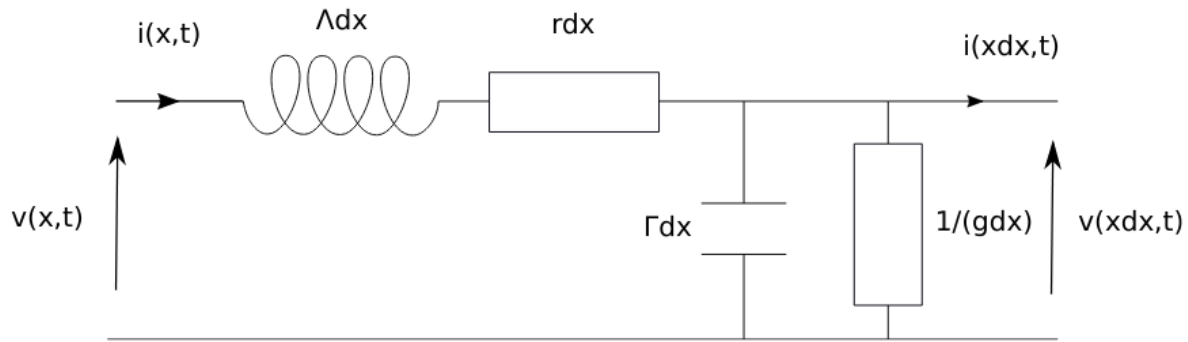
**Code py avec étalement.**

## 3 Conséquences de la dispersion

### 3.1 Propagation dans le câble coaxial

Poly Ondes p39

Les effets dispersifs peuvent se retrouver sur les lignes de transmission. C'est le cas notamment du câble coaxial. On peut le modéliser par le schéma électrocinétique suivant. Au modèle bien connu, on ajoute des résistances représentant les pertes par effet Joule d'une part et le fait que l'isolant n'est pas parfait entre l'âme et la gaine d'autre part.



Avec loi des noeuds et loi des mailles on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial i}{\partial x} &= -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}\end{aligned}$$

Ce qui mène à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\Gamma + g\Lambda) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu$$

C'est l'équation des télégraphistes.

Si on injecte une solution onde plane pseudo-progressive harmonique, on obtient la relation de dispersion :

$$-k^2 + \Gamma \Lambda \omega^2 = rg + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) \quad (1)$$

La relation de dispersion n'est clairement pas linéaire et le vecteur d'onde est complexe, on s'attend donc à de la dispersion et de l'atténuation. On peut le vérifier expérimentalement :



### Transmission par un câble coaxial

Ce qui serait chouette c'est d'envoyer deux pulses assez proches et qu'il se soient recouverts à l'arrivée. Comme ça on montre que c'est la dispersion qui limite le débit. (est-ce vraiment le cas dans la vraie vie? Je ne trouve pas grand chose dessus)

En supposant que l'information transportée est sous-forme de bits modélisés par des pulses, si le câble est trop dispersif, on peut avoir à l'arrivée recouvrement des deux bits et donc une perte d'information. (OdG de débit d'information limité par la dispersion à voir dans le Garing Ondes mais je l'ai pas là).

*être au courant de la condition de Heaviside (choix des paramètres du câble tq on est plus dispersif) qui n'est pas retenue car elle implique une trop grande dissipation*

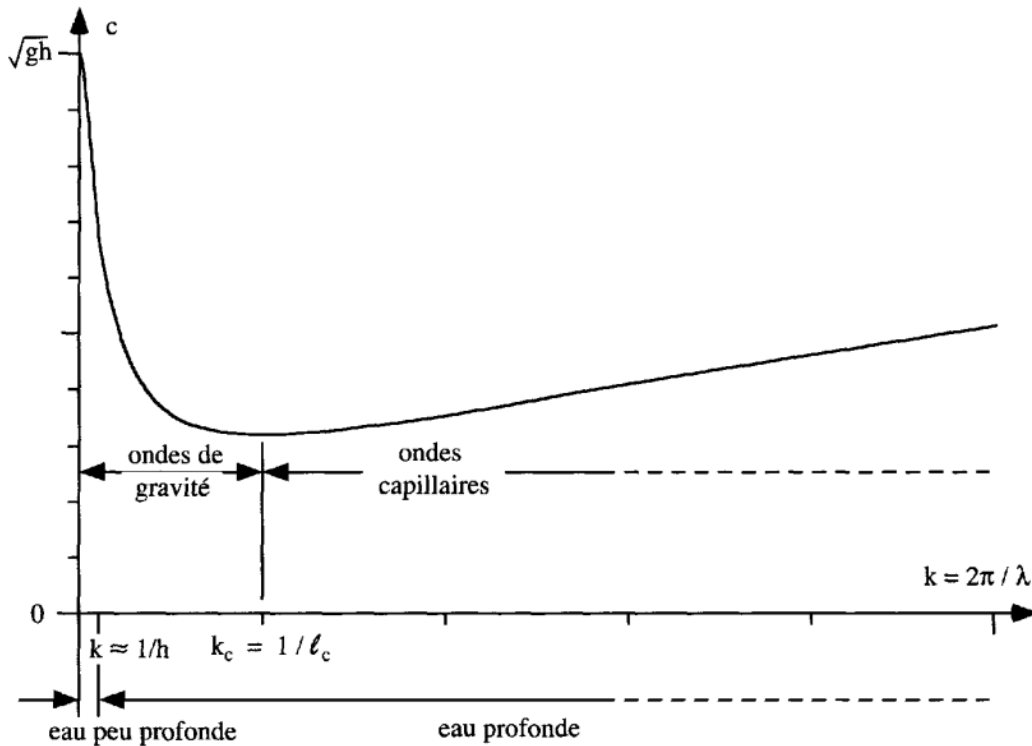
## 3.2 Ondes gravito-capillaires

🔗 GHP p328

À la surface d'un liquide, plusieurs phénomènes peuvent s'opposer à la déformation de l'interface : la gravité (abaissement d'énergie potentielle) et la tension de surface (résistance à la courbure/augmentation de surface). Par ces phénomènes de rappel, une perturbation peut se propager le long de la surface. On parle alors d'ondes gravito-capillaires. Dans le cas d'une onde gravito-capillaire, la relation de dispersion est la suivante :

$$\omega^2 = k \left( g + \frac{\gamma k^2}{\rho} \right) \tanh kh = gk (1 + k^2 l_c^2) \tanh kh \quad (2)$$

on a alors plusieurs régimes possibles :



Dans la relation de dispersion, le terme multiplicatif en  $\tanh(kh)$  est voisin de l'unité pour des ondes à la surface d'une couche d'épaisseur  $h$  grande devant la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ , dites ondes en eau profonde. Dans ce cas, la relation de dispersion devient :

$$\omega^2 \approx gk (1 + k^2 \ell_c^2)$$

Le premier terme du membre de droite, qui domine aux longueurs d'onde grandes devant la longueur capillaire  $\ell_c$  ( $k\ell_c \ll 1$ ), correspond à une onde de gravité. Ses vitesses de phase et de groupe sont :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad v_g = \frac{v_\phi}{2}$$

Elles décroissent lorsque le vecteur d'onde croît. Cette onde correspond à la houle à la surface de la mer.

Dans l'autre limite des courtes longueurs d'onde ( $k\ell_c \gg 1$ ), le second terme domine. La vitesse de phase de l'onde capillaire est donnée par :

$$v_\phi \approx \sqrt{gk\ell_c} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} \quad v_g = \frac{3}{2} v_\phi$$

Dans le cas où la longueur d'onde est grande, à la fois devant l'épaisseur  $h$  et la longueur capillaire  $\ell_c$  (c'est-à-dire  $kh \ll 1$  et  $k\ell_c \ll 1$ ), l'expression de la vitesse de phase prend la forme approchée :

$$v_\phi \approx \sqrt{gh}$$

On a donc plus de dispersion. Pour ces ondes, dites en eau peu profonde, l'épaisseur de la couche de liquide contrôle la vitesse. C'est là l'origine du déferlement des vagues, qui est du à ce que la vitesse de propagation est plus grande à la crête d'une vague qu'à sa base.

## Conclusion

Ouvrir sur les possibilités de compenser la dispersion par la non-linéarité (solitons, effet Kerr)

## 4 Remarques

- Réfléchir à comment on fait le calcul de la vitesse de groupe