

# LP28 - ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

## Bibliographie

- ⚡ *Electromagnétisme 4*, **BFR**
- ⚡ *Ondes*, **Brébec (Hprépa)**
- ⚡ *La physique par les objets du quotidien*, **Ray**
- ⚡ *Physique PC-PC\**, **Olivier**
- ⚡ [http://ressources.agreg.phys.ens.fr/media/ressources/RessourceFichiers/24-Raimond\\_-\\_Electromagnetisme\\_et\\_relativite.pdf](http://ressources.agreg.phys.ens.fr/media/ressources/RessourceFichiers/24-Raimond_-_Electromagnetisme_et_relativite.pdf) Cours Ulm
- ⚡ *Électromagnétisme*, **Mauras**,
- ⚡ *Optique*, **Houard**

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Propagation dans les milieux diélectriques</b>	<b>2</b>
1.1	Les équations de Maxwell dans les diélectriques . . . . .	2
1.2	Équation de propagation . . . . .	4
1.3	Relation de dispersion . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Dispersion et absorption</b>	<b>5</b>
2.1	Interprétation de l'indice du milieu . . . . .	5
2.2	Application : le four à micro-ondes . . . . .	7
2.3	Interprétation microscopique : modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Interface entre deux diélectriques</b>	<b>8</b>
3.1	Relations de passage . . . . .	8
3.2	Loi de Snell-Descartes . . . . .	9

## Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques ; cela n'en est pas l'objet
- **2009-2010** : Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.
- **2006** : Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation
- **2001** : Dans un diélectrique l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité  $\epsilon_r$  dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.
- **1998** : Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans un long calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.

Peu de retours pertinents. La première partie pour établir l'équation de propagation est obligatoire (on met électromagnétique dans la matière en prérequis pour pas reparler des histoires de champ moyenné ou jsp quoi). On fait apparaître un indice complexe ce qui nous amène à la deuxième partie dispersion et absorption ou on interprète, on applique au micro-onde ça nous fait une application dans cette leçon calculatoire et on fait le modèle de l'électron élastiquement lié pour expliquer. Et je pense que c'est important de parler des interfaces entre diélectriques, pas aller jusqu'à Brewster mais montrer que les relations de passage changent et démontrer la loi de Descartes c cool pour rester sur le délire des indices et revenir à un résultat connu. En gros c'est le plan de Coentim mais on fait notre marché un peu partout comme d'hab tu connais.

## Introduction

La matière peut avoir une réponse c comme ça que ça marche le micro onde la réponse de l'eau ui ui.

## 1 Propagation dans les milieux diélectriques

### 1.1 Les équations de Maxwell dans les diélectriques

⚡ BFR4 p. 198, Olivier p. 741, cours d'Ulm p. 307

Dans la matière, nous avons vu que l'électromagnétisme était régi par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{libres}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1}$$

avec  $\vec{D}$  le déplacement électrique et  $\vec{H}$  l'induction magnétique définis par la polarisation  $\vec{P}$  et l'aimantation  $\vec{M}$  du milieu selon :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\tag{2}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\tag{3}$$

Dans ce cours, nous allons nous intéresser à la propagation dans un milieu diélectrique, i.e. dans un milieu vide de charges et de courants libres. On se retrouve alors avec un système de 12 équations<sup>1</sup> pour  $6 \times 3$  inconnues  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{P}, \vec{M})$ . Afin de fermer ce système nous devons détailler la réponse du milieu diélectrique dans des équations dites constitutives :

$$\vec{P} = f(\vec{E}) \quad \vec{M} = g(\vec{B})\tag{4}$$

1. Les équations vectorielles sur les rotationnels comptent pour deux équations, on peut comprendre ça plus simplement en passant dans l'espace de Fourier

On considérera tout d'abord des milieux non magnétiques, ce qui est une bonne approximation pour un grand nombre de matériau, de telle sorte que :

$$\vec{M} = 0 \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5)$$

Pour l'équation reliant le champ  $\vec{E}$  au champ  $\vec{P}$  nous allons nous placer dans l'espace de Fourier (temporel) et faire quelques hypothèses supplémentaires. Tout d'abord nous allons supposer le matériau linéaire. Cela implique que dans l'espace de Fourier la polarisation du milieu est linéairement reliée au champ électrique, et donc sous la forme d'une relation matricielle/tensorielle :

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 [\chi_e(\vec{r}, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (6)$$

$\chi_e$  est alors appelée la susceptibilité électrique du milieu. Elle est a priori à valeurs complexes. Si de surcroît on se restreint aux milieux homogènes, cette matrice ne dépend pas de  $\vec{r}$  :

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 [\chi_e(\omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (7)$$

Enfin si on considère un milieu isotrope, i.e. toutes les directions sont équivalentes, la susceptibilité électrique est un scalaire :

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (8)$$

On peut donc finalement relier le déplacement électrique au champ électrique dans le milieu :

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (9)$$

on appelle alors  $\epsilon_r$  la constante diélectrique ou permittivité diélectrique du milieu.

Toutes ces approximations semblent très restrictives mais elle permettent une description efficace d'un grand nombre de matériaux expérimentalement que ce soit des gaz comme l'air ou des solides comme le verre :

gaz (20°C-1 atm)	$10^6 \chi_e$	liquides (20°C)	$\epsilon_r$	solides	$\epsilon_r$
Hélium	65	Eau	80,36	Diamant	5,5
Néon	127	CCl <sub>4</sub>	2,238	Silice pure	3,78
Argon	517	Benzène	2,284	Paraffine	2,20
Hydrogène	254	Nitrobenzène	35,74	Nylon	3,5
Oxygène	495	Acide acétique	6,15	Polyéthylène	2,3
Azote	547	Éthanal	4,34	Verres	4 à 7
Gaz carbonique	921	Éthanol	25,1	Plexiglass	3,4
Air sec	537	Glycérol	43,5	Téflon	2,1
		Acétone	21,2	Titane	
				de Baryum	~1500

! Comment peut se propager la lumière dans un tel milieu ?



## 1.2 Équation de propagation

Pour être cohérent il faut faire le calcul dans l'espace de Fourier directement, on arrive à Helmholtz au lieu de D'Alembert c'est pareil

⚡ BFR p 200, Brébec p 265.

On va établir l'équation de propagation d'une onde dans un milieu DLHI non magnétique de la même façon qu'on le fait dans le vide. Simplement, la relation constitutive que l'on a établi est valable dans l'espace de Fourier donc on va passer les équations de Maxwell dans l'espace de Fourier (flemme de mettre des chapeaux partout) :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -i\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega \mathbf{E}\end{aligned}\tag{10}$$

on utilise alors l'astuce classique :

$$\begin{aligned}\text{rot rot } \mathbf{E} &= \text{rot}(-i\omega \tilde{\mathbf{B}}) \\ &= -i\omega \text{rot } \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{D}} \\ &= \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}\end{aligned}\tag{11}$$

On a donc finalement dans l'espace de Fourier :

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0\tag{12}$$

On retrouve donc l'équation de Helmholtz/D'Alembert dans l'espace de Fourier pour les ondes EM dans le vide à ceci près que :

- $\epsilon_r$  dépend de  $\omega$  donc deux ondes de fréquence différente ne se propageront pas de la même manière.
- $\epsilon_r$  est complexe.



Pour voir ce que cela change, étudions la relation de dispersion

## 1.3 Relation de dispersion

De la redite avec la partie d'après, peut-être juste s'arrêter à la définition de l'indice ici

⚡ Brébec tjrs, BFR

Pour obtenir la relation de dispersion il suffit alors de considérer une onde plane et on a :

$$\underline{k}^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}\tag{13}$$

Avec  $\underline{n}$  l'indice complexe du matériau (définition). Le vecteur d'onde est alors lui aussi complexe, on peut alors le décomposer en deux parties :

$$k = k' - ik'' = n' \frac{\omega}{c} - in'' \frac{\omega}{c}\tag{14}$$

Dans l'espace réel, le champ électrique est donc de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})\tag{15}$$

La partie imaginaire du vecteur d'onde (et de l'indice) représente donc l'absorption du milieu diélectrique conduisant à une diminution d'amplitude du champ électrique et donc de la puissance transportée. Quant à elle, la partie réelle correspond à la partie propagative. A partir de celle-ci on peut donc définir une vitesse de phase et une vitesse de groupe de la même manière que habituellement :

$$\begin{cases} v_\phi = \frac{\omega}{k'} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk'} \end{cases} \quad (16)$$

## 2 Dispersion et absorption

### 2.1 Interprétation de l'indice du milieu

✦ Brébec, BFR p204

Le champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens et la direction de l'axe ( $Ox$ ) s'écrit :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad \left( \text{avec } k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \text{ et } k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \text{ positifs} \right)$$

soit en revenant à une notation réelle (et en supposant  $\underline{E}_0$  réel :  $\underline{E}_0 = \vec{E}_0$ ) :

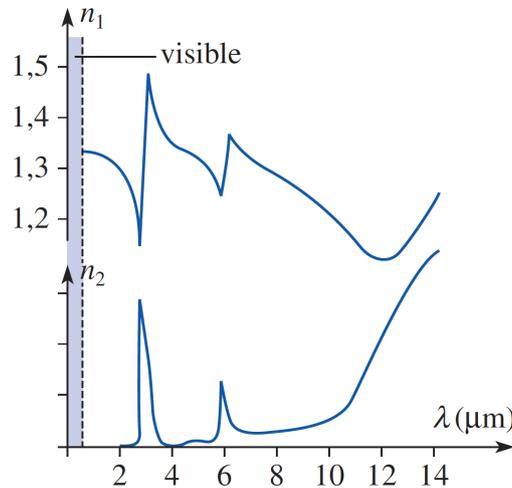
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x)$$

- L'indice  $n_1$  est l'indice de réfraction, que nous utilisons en optique. Il permet d'exprimer la vitesse de phase d'une onde plane :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}$$

où  $n_1$  caractérise la dispersion du milieu (si  $n_1$  dépend bien de  $\omega$ ). - Le coefficient  $n_2$  caractérise l'absorption de l'onde par le milieu. C'est l'indice d'extinction.

Il est possible d'accéder expérimentalement aux indices de réfraction  $n_1$  et d'extinction  $n_2$  du milieu (ici l'eau), en fonction de la longueur d'onde dans le vide.) On distingue deux types de zone différents :



**Zones de transparence** Une zone de transparence correspond à un domaine de pulsation où l'absorption est très faible. Cela correspond donc à des faibles valeurs de  $n_2$ . L'onde se propage sans atténuation, le milieu est transparent à ces longueurs d'onde L'indice est alors réel, et les courbes montrent que dans ces domaines  $n_1$  varie peu avec la fréquence, donc la dispersion est faible. Nous pouvons alors écrire  $\underline{\varepsilon}_r \approx \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ . L'indice du milieu s'identifie à son indice de réfraction :

$$\underline{n} \approx n_1 \gg n_2$$

L'indice variant relativement peu en fonction de la fréquence, un paquet d'ondes se propageant dans un tel milieu sera peu déformé. Utilisant la relation de dispersion, nous avons :

$$k = n \frac{\omega}{c}, \text{ donc } dk = \frac{d\omega}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

La vitesse de groupe d'un paquet d'ondes est donc :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

en introduisant la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{c}{n}$ . L'indice restant supérieur à 1, hormis à de très hautes fréquences (et éventuellement dans les zones d'absorption), la vitesse de phase  $v_\varphi$  est en général inférieure à  $c$ .

Dans ce domaine de transparence,  $n$  est une fonction croissante de la pulsation, de sorte que  $v_g$  est aussi inférieure à  $c$ . Dans ces zones où vitesses de phase et de groupe sont inférieures à  $c$ , la dispersion est dite « normale ». Dans une zone de transparence, la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes correspond à la vitesse de propagation de l'énergie associée à ce paquet d'ondes, inférieure à  $c$ .

**Zone d'absorption** Dans certaines zones piquées, les parties imaginaires de la permittivité diélectrique et de l'indice du milieu ne sont plus négligeables. L'amplitude d'une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$  qui se propage dans le milieu dans la direction et le sens de l'axe ( $Ox$ ) décroît exponentiellement avec la distance parcourue dans le milieu, car elle est proportionnelle à :

$$e^{-k_2 x} = e^{-n_2 \frac{\omega x}{c}}$$

Complétons cette étude en explicitant le vecteur de Poynting de l'onde plane progressive. Le champ  $\mathbf{B}$  se déduit de  $\mathbf{E}$  (cf. §2 - 2) :

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = \frac{n}{c} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0) e^{i(kx - \omega t)}$$

Passons aux notations réelles :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-k'' x} \cos(k' x - \omega t + \varphi) \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0) e^{-k'' x} [n' \cos(k' x - \omega t + \varphi) - n'' \sin(k' x - \omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

d'où le vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{u} c \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2k'' x} [n' \cos^2(k' x - \omega t + \varphi) \\ &\quad - n'' \sin(k' x - \omega t + \varphi) \cos(k' x - \omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

En moyennant sur une période et en remplaçant  $k''$  par  $n'' \omega / c$  :

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{u} c n' \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \exp\left(-2n'' \frac{\omega}{c} x\right)$$

expression qui nous montre que le flux énergétique de l'onde décroît exponentiellement en fonction de la distance parcourue, avec le coefficient d'extinction  $2k'' = 2n'' \omega / c$ . Dans un domaine de fréquences où la permittivité relative d'un milieu  $\underline{\varepsilon}_r$  est complexe (l'indice défini par  $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$  l'est aussi), le milieu absorbe les ondes électromagnétiques qui le traversent. Par exemple, l'eau absorbe le rayonnement infrarouge dont la longueur d'onde est supérieure à 1 400 nm.



### Loi de Beer Lambert



Avec une eau de Dakin askip

Dans une zone d'absorption,  $n_1$  peut être inférieur à 1, et la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}$  peut être supérieure à  $c$ . D'autre part, la dérivée  $\frac{dn_1}{d\omega}$  peut prendre des valeurs négatives. En extrapolant l'expression de la vitesse de groupe obtenue dans le cas de la dispersion normale, nous constatons que la vitesse de groupe correspondante peut aussi devenir supérieure à  $c$ . Ces résultats surprenants conduisent à parler ici de dispersion anormale.

En fait, dans une zone d'absorption, la dispersion est très importante. Un paquet d'ondes est donc fortement déformé au cours de sa propagation si bien que son amplitude (« sommet » de l'enveloppe) peut ne plus être définie. Même si nous la définissons par  $v_g = \frac{d\omega}{dk_1}$ , la vitesse de groupe n'a plus de signification physique simple (et sa valeur numérique peut être supérieure à  $c$ !) et ne correspond surtout pas à la vitesse de propagation de l'énergie du paquet d'ondes.

## 2.2 Application : le four à micro-ondes

✦ Ray p61, Olivier p425

Fréquence de fonctionnement d'un four à micro-onde : 3 GHz. Pourquoi? On montre les courbes de l'indice de l'eau : <http://www.philiplaven.com/p20.html> Fig 6 On voit donc que l'eau à une très forte absorption à cette fréquence/longueur d'onde Le champ électrique ne pénètre en fait que sur quelques centimètres. L'énergie est absorbée sur cette distance-là puis communiquée par diffusion thermique au reste.

## 2.3 Interprétation microscopique : modèle de l'électron élastiquement lié

✦ Brébec p 259-261, cours Ulm p256 pour les subtilitay

Pour exprimer la permittivité diélectrique d'un milieu, grandeur macroscopique, nous devons étudier, à l'échelle microscopique, l'interaction du champ électromagnétique avec les charges liées du milieu.

Nous considérerons donc un modèle extrêmement simpliste d'atome : un seul électron, lié par une force harmonique isotrope. Ce modèle a connu une certaine faveur au tournant du siècle. Il était assez naturel d'essayer de comprendre les fréquences discrètes rayonnées ou absorbées par les atomes en termes de résonances d'oscillateurs harmoniques. Les expériences de Rutherford n'existaient pas encore. Il n'y avait donc aucune raison de postuler une structure planétaire pour l'atome. En revanche, des coïncidences entre les raies de l'hydrogène et les harmoniques élevées d'une fréquence fondamentale pouvaient suggérer que les raies observées étaient les harmoniques de la fréquence de résonance d'un oscillateur.

Le modèle de Thomson (dit encore modèle du "plum-pudding") s'appuyait sur cette interprétation. On considère l'atome comme constitué d'une "gelée" positive, uniformément chargée, portant une charge totale unité. Dans cette gelée, un électron unique se déplace librement. Le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée étant, à l'intérieur de la sphère, linéaire en fonction de la distance au centre, l'électron se trouve lié par une force harmonique.

Dans le cadre de ce modèle, une charge liée (masse  $m$  et charge  $q$ ) est donc soumise à :

- une force de rappel élastique, proportionnelle à son déplacement  $\vec{r}$  par rapport à sa position d'équilibre :  $\vec{f} = -k\vec{r}$ ;
- une force destinée à rendre compte des phénomènes dissipatifs d'énergie (collisions, rayonnement, ...) soit, en introduisant un temps de relaxation  $\tau$  :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

- la force de Lorentz créée par le champ électromagnétique de l'onde, où nous négligeons classiquement, pour une charge non relativiste, l'influence du terme magnétique :  $\vec{f} = q\vec{E}$ .

### Remarques

- Le champ de l'onde est uniforme à l'échelle de la molécule si la longueur d'onde est nettement supérieure aux dimensions des particules du milieu (les dimensions d'un atome sont de l'ordre de 0,1 nm).
- Pour un milieu peu dense (cas d'un gaz), nous négligeons a priori l'influence des champs créés (car ils peuvent être statiques) par les atomes ou les molécules voisines. Le cas échéant (liquide, solide) nous admettrons que le fait de les négliger ne change pas fondamentalement les résultats que nous nous proposons de trouver.

L'équation du mouvement de la charge est donc :

$$m\vec{a} = -k\vec{r} - m\frac{\vec{v}}{\tau} + q\vec{E}, \text{ soit } \ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{m},$$

où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre de cet oscillateur amorti et  $Q = \omega_0\tau$  son facteur de qualité.

En régime sinusoïdal établi, le déplacement de la charge est, en notation complexe :

$$\vec{r} = \frac{\frac{q}{m\omega_0^2} \vec{E}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

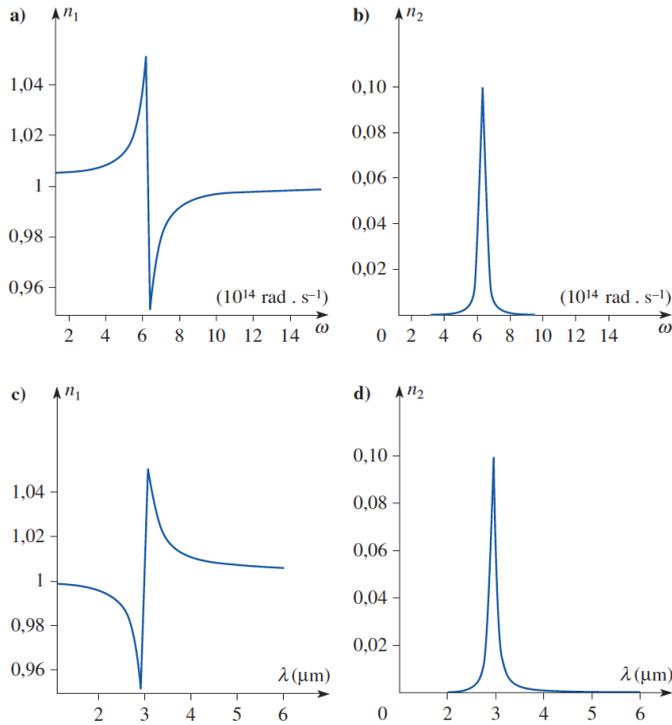
Le vecteur polarisation du milieu l.h.i., contenant  $N$  charges liées (supposées identiques) par unité de volume, est  $\vec{P} = N\vec{p}$ . Nous obtenons donc :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{avec} \quad \chi_e = \frac{\chi_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où  $\chi_0 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$  est la susceptibilité diélectrique statique ( $\omega \approx 0$ ).  $\underline{\chi}_e$  est complexe ; posons  $\underline{\chi}_e = \chi_1 - j\chi_2$  avec :

$$\chi_1 = \chi_1(\omega) = \chi_0 \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

$$\chi_2 = \chi_2(\omega) = \chi_0 \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$



◀ **Doc. 13.** Simulation des courbes  $n_1$  et  $n_2$  pour  $\chi_0 = 10^{-2}$  (milieu dilué) avec une seule pulsation propre  $\omega_0$  correspondant à  $\lambda_0 = 3 \mu\text{m}$  (I.R., polarisation atomique) et  $Q = 10$  (pour la lisibilité des courbes).  
**a)**  $n_1 = f(\omega)$     **b)**  $n_2 = f(\omega)$ .  
**c)**  $n_1 = f(\lambda)$     **d)**  $n_2 = f(\lambda)$ .

Sachant que  $\epsilon_r = 1 + \chi = n^2$  on peut en déduire les parties réelles et imaginaires de l'indice optique. Les courbes théoriques restituent bien l'allure des courbes expérimentales pour l'eau..

Nous venons d'étudier un mécanisme de polarisation électronique. Il en existe d'autres (ionique et d'orientation) dont l'étude est nécessaire pour comprendre toute la réponse d'un matériau.

Nous avons considéré jusque-là la propagation dans un milieu linéaire homogène. Nous allons maintenant, en route vers l'optique géométrique, nous poser le problème d'une discontinuité plane (au moins localement) entre deux milieux linéaires de caractéristiques différentes. Nous aurons à l'esprit surtout les interfaces entre diélectriques transparents mais la plupart de nos résultats s'appliqueront à des milieux arbitraires. Nous commencerons par établir les relations de continuité vérifiées par les champs électrique et magnétique de part et d'autre de l'interface. Nous en déduirons ensuite, en considérant le passage d'une onde plane d'un milieu à l'autre, les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction.

### 3 Interface entre deux diélectriques

#### 3.1 Relations de passage

↪ Ulm p 336, Mauras p 264

Dans la zone de transition à l'interface de deux milieux, sur quelques distances interatomiques, il peut y avoir des charges libres et des courants de charges libres en plus des charges et courants de polarisation et d'aimantation. Les distributions volumiques de charge et de courant de la zone de transition sont remplaçables par des distributions

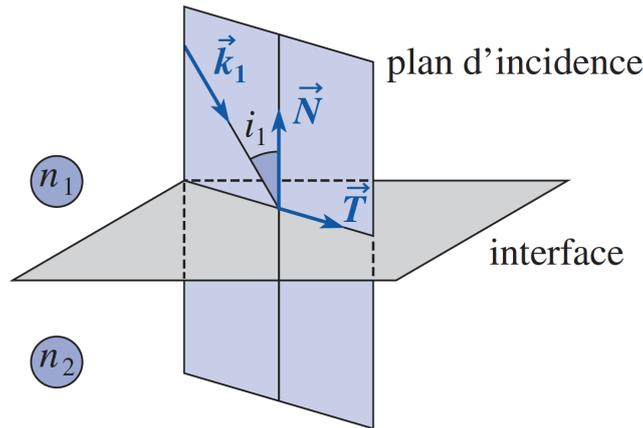


FIGURE 1 – Caption

surfaiques équivalentes. Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-flux dans un milieu sont les mêmes que dans le vide :

$$\mathbf{E}_{2T} - \mathbf{E}_{1T} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{B}_{2N} - \mathbf{B}_{1N} = \mathbf{0}$$

Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère dans un milieu sont modifiées par rapport au vide ; par analogie entre les équations de Maxwell-Gauss dans le vide et dans un milieu puis entre les équations de Maxwell-Ampère dans le vide et dans un milieu :

$$\mathbf{D}_{2N} - \mathbf{D}_{1N} = \sigma_s \text{ charges libres } \mathbf{N}_{12} \text{ et } \mathbf{H}_{2T} - \mathbf{H}_{1T} = \mathbf{j}_s \text{ charges libres } \wedge \mathbf{N}_{12} .$$

Finalement les équations de continuité s'écrivent

$$\mathbf{E}_{2T} - \mathbf{E}_{1T} = \mathbf{0} \quad \mathbf{D}_{2N} - \mathbf{D}_{1N} = \sigma_s \text{ charges libres } \quad \mathbf{N}_{12} \quad \mathbf{H}_{2T} - \mathbf{H}_{1T} = \mathbf{j}_s \text{ charges libres } \wedge \mathbf{N}_{12} \quad \mathbf{B}_{2N} - \mathbf{B}_{1N} = \mathbf{0}$$

Pour un interface entre deux diélectriques,  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ; les diélectriques sont des isolants; si l'on n'a mis aucune charge libre à l'interface, les densités de charge et de courant de charge libre sont nulles. Pour des ondes sinusoïdales, en milieu transparent,  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}$  d'où :

$$\mathbf{E}_{2T} - \mathbf{E}_{1T} = \mathbf{0}, \varepsilon_{r2}(\omega) \mathbf{E}_{2N} - \varepsilon_{r1}(\omega) \mathbf{E}_{1N} = \mathbf{0}, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$$

### 3.2 Loi de Snell-Descartes

➤ Brébec pp271-273, Houard p 266 Houard scanné LP30 Francis

L'onde plane progressive monochromatique incidente se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_1$  dans le milieu (1). Le champ électromagnétique de cette onde plane progressive harmonique s'écrit :

$$\vec{E}_1 = \underline{E}_{01} e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B}_1 = n_1 \frac{\vec{u}_1 \wedge \underline{E}_1}{c} \text{ avec } \vec{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_1$$

L'onde plane progressive monochromatique réfléchi dans le milieu (1) se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}'_1$  :

$$\vec{E}'_1 = \underline{E}'_{01} e^{j(\omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B}'_1 = n_1 \frac{\vec{u}'_1 \wedge \underline{E}'_1}{c} \text{ avec } \vec{k}'_1 = n_1 \omega \vec{c}'_1$$

L'onde plane progressive monochromatique transmise dans le milieu (2) se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_2$  :

$$\vec{E}_2 = \underline{E}_{02} e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B}_2 = n_2 \frac{\vec{u}_2 \wedge \underline{E}_2}{c} \text{ avec } \vec{k}_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_2$$

Ces trois ondes satisfont, par "construction", aux équations de Maxwell, dans leurs milieux respectifs. Il reste à vérifier que les conditions aux limites sur l'interface séparant les deux milieux sont effectivement satisfaites.

Si tel est le cas, ces ondes vérifient alors toutes les conditions du problème posé et forment nécessairement la solution de celui-ci.

Le vecteur d'onde  $\vec{k}_1$  de l'onde incidente et le vecteur unitaire  $\vec{N}$  normal à la surface plane de séparation entre les deux milieux définissent le plan d'incidence.

Traduisons l'une des conditions aux limites, la continuité de la composante tangentielle  $\vec{E}_T$  de  $\vec{E}$  en tout point  $M_0$  ( $\vec{r}_0 = \vec{OM}_0$ ) de la surface de séparation et à tout instant ; il vient

$$\vec{E}_{01\ T} e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0)} + \vec{E}'_{01\ T} e^{j(\omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}_0)} = \vec{E}_{02\ T} e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)}$$

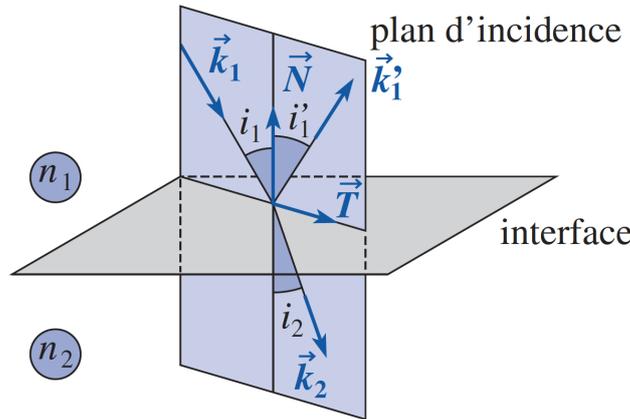
**Remarque :** La continuité doit être vérifiée à tout instant, donc les trois ondes ont la même pulsation. Mettons la relation précédente sous la forme suivante

$$\vec{E}_{01\ T} + \vec{E}'_{01\ T} e^{j(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \cdot \vec{r}_0} = \vec{E}_{02\ T} e^{j(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}_0}$$

En prenant l'origine  $O$  sur le plan de séparation (le vecteur  $\vec{r}_0$  est alors un vecteur quelconque de ce plan), nous pouvons affirmer que cette relation est vérifiée si les différences de phases  $(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \cdot \vec{r}_0$  et  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}_0$  sont indépendantes de  $\vec{r}_0$ , ce qui est réalisé si

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \cdot \vec{r}_0 = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}_0 = \vec{0}$$

Ainsi, les vecteurs  $(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1)$  et  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$  doivent être colinéaires à  $\vec{N}$ , d'où  $\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \alpha \vec{N}$  et  $\vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \beta \vec{N}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  constantes réelles. Les vecteurs d'onde  $\vec{k}'_1$  et  $\vec{k}_2$  des ondes réfléchies et réfractées sont donc dans le plan d'incidence, définis par les vecteurs  $\vec{k}_1$  (vecteur d'onde de l'onde incidente) et  $\vec{N}$  (normale locale au dioptre).



En optique géométrique, les rayons lumineux s'identifient aux directions des vecteurs d'ondes correspondantes. Nous pouvons énoncer la première loi de Descartes Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence En décomposant chaque vecteur d'onde en un vecteur  $\vec{k}_T$  tangent à la surface de séparation et un vecteur  $\vec{k}_N$  normal à cette même surface, les relations précédentes imposent ( doc. 20 et 21)  $\vec{k}_{1\ T} = \vec{k}'_{1\ T} = \vec{k}_{2\ T}$

Les composantes tangentielles  $\vec{k}_{1\ T}$ ,  $\vec{k}'_{1\ T}$  et  $\vec{k}_{2\ T}$  des vecteurs d'onde des ondes incidente, réfléchi et réfractée sont égales

$$\vec{k}_{1\ T} = \vec{k}'_{1\ T} = \vec{k}_{2\ T}$$

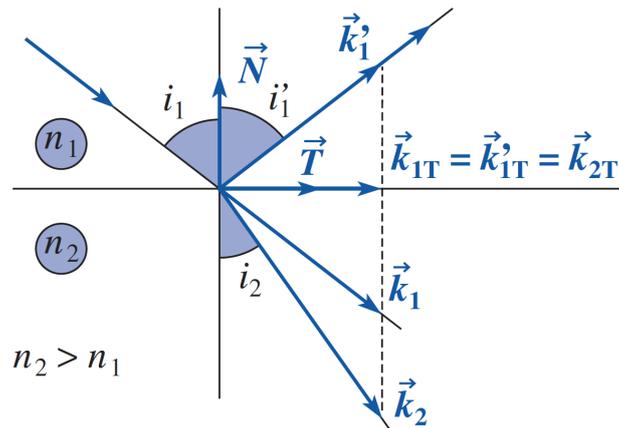
Introduisant le vecteur unitaire  $\vec{T}$  tangent à la surface de séparation et situé dans le plan d'incidence, nous pouvons aussi écrire les conditions imposées aux vecteurs d'onde réfléchi  $\vec{k}'_1$  et transmis  $\vec{k}_2$  sous la forme :

$$\vec{k}_{1\ T} = k_1 \sin i_1 \vec{T} = \vec{k}'_{1\ T} = k'_1 \sin i'_1 \vec{T} = \vec{k}_{2\ T} = k_2 \sin i_2 \vec{T}$$

Dès lors, en utilisant les relations de dispersion dans les milieux (1) et (2), soit :

$$k_1 = k'_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

nous pouvons énoncer la seconde loi de Descartes. Les angles de réflexion et d'incidence sont égaux :  $i'_1 = i_1$ . Les angles de réfraction et d'incidence vérifient :  $n_1 \sin i_2 = n_2 \sin i_1$ .



## Conclusion

Ouverture sur les diélectriques anisotrope qui donnent les milieux birefringents

## Retours

- Ça serait bien de souligner la différence entre le vide et un milieu de propagation matériel dès le début même si c'est un peu con. Simplement dire que ça va être plus compliqué parce que le champ interagit avec le milieu de propagation et que du coup champ et milieu sont couplés un peu (on peut le voir directement dans les eq de Maxwell)
- Quand on présente les équations de Maxwell et qu'on dit qu'il ya pas de trucs libre, dire que par contre la réponse de la matière peut faire apparaître des charges et des courants liés.
- Le calcul du vecteur de Poynting peut être fait avec la formule toute faite, le calcul n'apport pas grand chose ici. ok c vré mdr
- Loi de Beer-Lambert ? bah absorption qu'oient non mais l'expérience c quoi ? Ben on fait des mesures d'absorbance en faisant varier la longueur je pense sinon ya ondes centimétriques ds le PVC mais bizarre t'as une réf? Francis mais il dit r
- Peut être repasser en réel pr l'équation de propagation à la fin pour qu'on voit mieux d'alemb en fait le pb c'est que epsilon est défini dans l'espace de fourier ah oui c pa ouais y'en a qui passent ça sous le tapis et qui font comme si ça dépendait pas de la fréquence dans le calcul oui mais c pas rigoureux et jury vouloir rigueur oui do je nc suis
- Je donnerais que les relations de continuité qui nous intéresse (les deux qui changent pas du vide) si on démontre pas les autres (et si on s'en sert pas, ça fait moins lourd)
- $P = np$  est une hypothèse de milieu dilué d'après les éléments.
- le micro-onde ça peut être intégré à l'interprétation je pense