

LP29 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX CONDUCTEURS

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L2

Bibliographie

- ✦ *EM dans le vide*, **Jérémy** Basiquement toute la leçon
- ✦ *Ondes EM dans le vide et les milieux conducteurs*, **Ga-** Deuxième source éventuellement
ring
- ✦ LP des Cléments, Camille et Benjamin aussi bcp.

Table des matières

1	Modèle de Drude et régimes de conduction	2
1.1	Modèle de Drude et loi d'Ohm locale	2
1.2	Electroneutralité	4
1.3	Approximation des régimes quasi stationnaires	5
2	Conduction dans les métaux : limite des basses fréquences	5
2.1	Effet de peau	5
2.1.1	Isolation d'un four micro-ondes	6
2.1.2	Communication avec les sous-marins	6
2.2	Limite du métal parfait	6
3	Conduction dans les plasmas	7
3.1	Mise en équation	8
3.2	Relation de dispersion	8

Remarques sur les leçons précédentes

2017 Les analogies et différences observées entre les différents milieux étudiés méritent d'être clairement soulignées. Il est intéressant d'évoquer les aspects énergétiques.

2015 Cette leçon ne doit pas se réduire à la présentation exclusive du modèle de Drude. Les métaux ne sont pas les seuls milieux conducteurs.

2014 Cette leçon ne doit pas être confondue avec la leçon 47 [qui était Mécanismes de la conduction électrique dans les solides].

Plan cool et complet chez les Cléments/Benjamin. Basiquement on présente Drude et on repose les deux approximations d'électroneutralité et d'ARQS (ne pas lire le gars du book qui dit que l'EN est toujours vérifiée dans les métaux il a fumé) on va alors se placer dans deux régimes différents : basses fréquences avec les métaux (conductivité indépendante de la pulsation) puis hautes fréquences avec le plasma (pulsation plasma). Ce plan permet de tout bien comprendre. Une analyse énergétique est attendue à chaque fois. On veut des applications et des OdG à chaque fois aussi sinon le jury boude (mais c'est bien fait par les autres déjà). Les leçons que je trouve le mieux notent pas bien leur réf c'est chiant mais le Cap Prépa a l'air bien (sinon leur leçon est assez complète). Pour la première partie c'est le poly de JérémY on va pas faire semblant hein. (et d'ailleurs c'est une bonne ressource pour toutes les autres.) Pourquoi pas faire la pression de radiation pour les métaux ? (du coup j'ai retrouvé la démo c'est bon lol) Ça ferait une partie tempon avec une application concrète. Petite remarque au passage : on a pas d'expérience donc il faut faire des programmes là où on peut (basiquement électroneutralité et effet de peau, rien de très ouf quoi).

Introduction

Définition de conducteur. Régime statique : on a vu la loi d'Ohm locale -> ok nous on va se placer en dynamique là.

1 Modèle de Drude et régimes de conduction

1.1 Modèle de Drude et loi d'Ohm locale

✦ Poly de JérémY

Pour modéliser l'action d'un champ électrique sur un métal conducteur, Drude propose en 1900 un modèle simple. Celui-ci suppose que les électrons de conduction, se comporte comme un gaz. La théorie cinétique des gaz suppose que les molécules de gaz sont des sphères dures se déplaçant en ligne droite jusqu'à rentrer en collision les unes avec les autres (ou les parois mais ce n'est pas le cas des électrons). Le temps d'une seule collision est négligeable et les forces qui agissent lors des collisions sont les seules forces prises en compte. Les hypothèses sont alors les suivantes :

- Les électrons sont les seuls responsables du transport de l'électricité, on peut dès lors écrire que si les électrons vont à une vitesse moyenne $\langle v \rangle$ et que leur densité est n alors on a $j = nev$
- Les électrons n'interagissent pas entre eux.
- On modélise l'interaction d'un électron avec le solide par des chocs instantanés qui redistribuent aléatoirement la vitesse de l'électron. Entre les collisions, les électrons n'interagissent pas avec le réseau. On note τ le temps moyen entre deux chocs, qu'on suppose constant.
- Les électrons sont soumis à un champ électrique E égal au champ extérieur.
- Les vitesses mises en jeu sont non relativistes.
- Les électrons sont classiques.
- L'équilibre thermodynamique local est assuré par le biais des chocs : les électrons sont thermalisés, on a une théorie cinétique des gaz.

Mettons alors en équation l'action du champ électrique sur un électron. Soit $\mathbf{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant. Calculons la quantité de mouvement à un instant $t + dt$ soit $\mathbf{p}(t + dt)$. La probabilité de collision est dt/τ et la probabilité que rien ne se passe est $(1 - dt/\tau)$. S'il n'y a pas de collision, l'électron est soumis à la force électromagnétique qu'on appellera $\mathbf{f}(t)$ et acquiert donc une quantité de mouvement supplémentaire $\mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2$. La contribution des électrons qui ont subi une collision dans l'intervalle dt est d'ordre $(dt)^2$ et ne contribue pas au premier ordre. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t + dt) &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2] \\ &= \mathbf{p}(t) - \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2\end{aligned}$$

Donc la variation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2$$

et donc :

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{f}(t)$$

Cela montre simplement que l'effet des collisions individuelles des électrons est d'introduire un terme d'amortissement dans l'équation du mouvement de la quantité de mouvement par électron. Les électrons étant supposés non relativistes, on peut réduire la force de Lorentz à la force de Coulomb. Vérifions que cela semble cohérent à l'aide de la formule $\vec{j} = -ne\vec{v}$. Pour un courant de 1A traversant un fil de section 1 mm^2 , on obtient une vitesse de $v \approx 0.1 \text{ cm/s} \ll c$. La force magnétique est donc bien négligeable. En considérant un champ électrique sinusoïdal en notation complexe on a :

$$m_e \dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - \frac{m_e}{\tau} \mathbf{v}$$

avec $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$ on trouve :

$$-m_e i\omega \mathbf{v}_0 = -e\mathbf{E}_0 - \frac{m_e}{\tau} \mathbf{v}_0$$

On trouve alors :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0/m_e}{1/\tau - i\omega}$$

et donc :

$$\mathbf{j}_0 = -ne\mathbf{v}_0 = \frac{ne^2\tau/m_e}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0$$

On retrouve alors une loi d'Ohm locale avec une conductivité dépendante de la pulsation du champ électrique :

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (1)$$

A basses fréquences, la conductivité ne dépend pas de la fréquence d'excitation : les électrons suivent le champ sans retard. A hautes fréquences par contre les électrons ont du mal à suivre l'excitation périodique, on a un déphasage et la conductivité tend vers 0 pour les très hautes fréquences. Dans cette limite on a :

$$\sigma(\omega) = i \frac{ne^2}{m_e\omega} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (2)$$

avec :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sim (10^{16} \text{ rad/s})^2 \quad (3)$$

une pulsation caractéristique appelée pulsation plasma.

En ordres de grandeur, pour le cuivre on a :

$$n \approx 10^{-29} \text{ m}^{-3}, \tau \approx 10^{14} \text{ s} \text{ et } \sigma_0 = 59.6.10^6 \text{ S.m}^{-1} \quad (4)$$



On a une dépendance en fréquence dans notre nouvelle loi d'Ohm, différents régimes possibles.

1.2 Electroneutralité

✎ Poly de Jérémie

Le courant étant caractérisé à travers la loi d'Ohm, il reste encore à déterminer la densité de charges ρ . On sait que globalement le milieu est neutre mais qu'en est-il localement ? Si l'on applique une perturbation locale de densité dans le milieu, s'estompe-t-elle naturellement ? Si oui selon quelle échelle de temps ? Pour répondre à cette question repartons des équations fondamentales, à savoir l'équation de conservation de la charge, l'équation de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm précédemment déterminée :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Exploitions alors l'équivalence entre les représentations temporelle et fréquentielle. Pour cela, on cherche le comportement forcé d'un conducteur soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}(M, \omega)e^{-i\omega t}$$

La loi d'Ohm locale injectée dans la conservation de la charge donne :

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = i\omega \rho \Rightarrow \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = i\omega \rho$$

On déduit en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss que :

$$\sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} = i\omega \rho$$

Or on a vu que $\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}$ donc :

$$-\tau\omega^2\rho - i\omega\rho + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\rho = 0$$

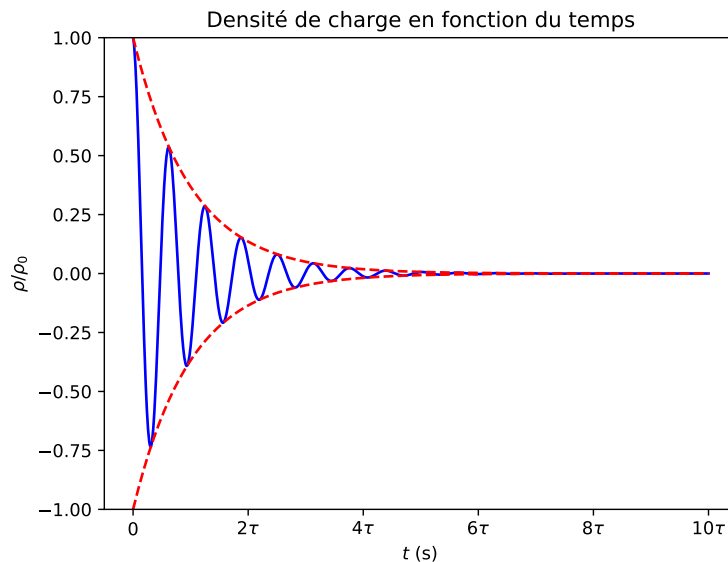
En repassant dans le domaine temporel on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} \rho = 0$$

On trouve alors une équation différentielle sur la densité de charge du métal

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad Q = \omega_p \tau$$

On retrouve une équations d'oscillateur harmonique amorti : l'excès de charge est neutralisé sur un temps τ durant lequel il oscille avec $Q \sim 100$. En une centaine d'oscillations à la pulsation ω_p , le système est relaxé.



En conclusion, on pourra considérer que le métal est localement neutre pour :

$$\omega \ll \omega_{en} \sim 10^{14} \text{ rad/s} \quad (6)$$

1.3 Approximation des régimes quasi stationnaires

✚ Poly de Jérémie, Cléments

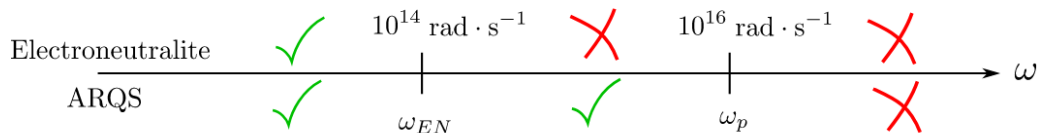
Tant qu'on y est, une autre hypothèse qu'on aime beaucoup faire c'est celle de l'ARQS. Dans les conducteurs, ce sont naturellement les courants qui dominent sur les charges (d'après ce que l'on vient de voir) donc ce qu'on va essayer de conditionner (oui ça veut pas dire ça mais je trouve ça approprié) c'est l'ARQS magnétique. On cherche donc à savoir quand est-ce que le courant de déplacement est négligeable devant les autres courants. On définit alors le nombre sans dimension comparant ces deux termes :

$$\xi = \frac{\|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \mathbf{j}\|} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{|\sigma|} \quad (7)$$

Ce nombre n'est très petit devant 1 que pour des pulsations excitatrices suffisamment faibles. Pour définir la condition, on se place dans un cadre défavorable et donc $\omega\tau \gg 1$ soit :

$$\xi = \frac{\epsilon_0 \omega^2 \tau}{\sigma_0} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \quad (8)$$

La condition d'ARQSM est donc vérifiée pour des pulsations excitatrices très inférieures à la pulsation plasma. Finalement on peut alors définir les régimes suivants :



Pour résumer, lorsque l'on peut faire l'approximation d'électroneutralité on a $\rho = 0$ et lorsque l'on peut faire l'approximation d'ARQSM on a $\vec{j}_D = \vec{0}$.

On a donc différents régimes de conduction possibles. Étudions d'abord le plus simple, celui qui vérifie toutes les approximations, celui des basses fréquences.

2 Conduction dans les métaux : limite des basses fréquences

2.1 Effet de peau

Dans l'approximation des basses fréquences, la conductivité prend sa valeur statique : elle ne dépend plus de la pulsation de l'excitation. Les équations de Maxwell sont alors les suivantes :

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (10)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma_0 \mathbf{E} \quad (12)$$

En utilisant comme d'habitude la formule d'analyse vectorielle associée au double rotationnel il vient :

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13)$$

On n'a donc plus une équation de d'Alembert comme dans le vide mais une équation de diffusion !

Pour constater les implications de cette nouvelle EDP, on considère une OPPH transverse qui se propage selon l'axe z et qui rencontre l'interface air / métal en $z = 0$. En notation complexe, on a :

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{E}(z)e^{i\omega t}\mathbf{u}_x$$

On injecte cette expression de $\mathbf{E}$ dans l'équation de diffusion et on obtient l'équation suivante sur $\underline{E}(z)$:

$$\frac{d\underline{E}}{dz} = i\omega\mu_0\sigma_0\underline{E}(z)$$

dont les solutions sont :

$$\underline{E}(z) = A \exp \left[+(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}z \right] + B \exp \left[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}z \right]$$

La consistance physique du résultat interdit la divergence en $z \rightarrow +\infty$, on a alors : $A = 0$ et $B = E_0$. On a finalement l'expression finale du champ électrique, en notation réelle :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \mathbf{u}_x \quad (14)$$

On obtient donc une onde pseudo-progressive amortie dont l'amortissement se fait sur une distance caractéristique δ appelée épaisseur de peau et telle que :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}} \quad (15)$$

Si on calcule la puissance volumique dissipée dans le métal associée on a :

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\vec{j} \cdot \vec{E}^* \right) = \frac{\sigma_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad (16)$$

Et donc on a une décroissance exponentielle selon la même (à un facteur 2 près) longueur caractéristique, l'énergie transportée par l'onde est dissipée jusqu'à atténuation complète. En général, on considère que l'atténuation est totale pour $z = 5\delta$.

2.1.1 Isolation d'un four micro-ondes

Dans un micro-onde, les ondes utilisées ont une fréquence de de l'ordre de $f \simeq 10^5$ Hz, d'où $\delta \simeq 10\mu\text{m}$. En pratique, les parois métalliques du micro-onde sont donc largement assez épaisses pour isoler l'extérieur de l'appareil. Seul problème, la paroi vitrée qui n'est pas métallique et pour laquelle l'effet de peau n'existe pas. L'isolation de cette paroi est réalisée avec un grillage métallique aux mailles suffisamment fines pour stopper les ondes EM (pour un trou très petit devant la longueur d'onde on ne diffracte pas, rien ne passe. Fin c'est évanescent sur le trou quoi).

2.1.2 Communication avec les sous-marins

L'eau de mer est un milieu légèrement conducteur, de conductivité $\gamma = 4\text{S.m}^{-1}$. Pour 1 MHz on a une épaisseur de peau de 0,25 m et pour 1 kHz on a une épaisseur de peau d'environ 8 m. C'est un problème pour la communication avec les sous-marins. Durant la guerre froide, les USA et la Russie ont donc conçu des canaux de communication extrêmement basse fréquence. Le système de l'US Navy appelé « Seafarer » émettait sur 76 hertz, et son équivalent russe appelé « Zeus », sur 82 hertz. Toutefois, la conception d'émetteur pour des ondes de longueurs d'onde aussi gigantesques (supérieures au rayon demi-équatorial terrestre) est très complexe et ces systèmes ont été démantelés. On peut aussi envisager la communication par onde sonore qui est bien moins atténuée! (https://fr.wikipedia.org/wiki/Communication_avec_les_sous-marins)

2.2 Limite du métal parfait

✎ Poly de Jérémie

Dans la limite d'un métal parfait, c'est-à-dire la conductivité qui tend vers l'infini, la longueur de peau tend vers 0 et l'onde électromagnétique ne pénètre pas dans le conducteur. On peut également voir que pour la puissance dissipée, si $\sigma \rightarrow \infty$ alors il faut nécessairement que $E = 0$ pour éviter la divergence de la dissipation. En appliquant les relations de continuité (mises en pré-requis) dans le cas d'un champ nul dans le métal on a :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n} \quad (17)$$

On considère le cas d'une onde plane qui arrive sur une plaque métallique qu'on considère comme un conducteur parfait. La question est de savoir quelle est la force exercée par l'onde incidente sur la plaque métallique. Comme précédemment, la plaque occupe le plan yOz . On a $\mathbf{E}$ selon $\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{B}$ selon $\mathbf{e}_y$. Le champ va engendrer des courants surfaciques qui sont dirigés selon $\mathbf{e}_z$. Ces courants subissent à leur tour l'action du champ. On revient alors à une description volumique de la plaque à laquelle on donne une épaisseur a . Dans cette couche on a :

$$\mathbf{B} = B_y(x)\mathbf{e}_y$$

En négligeant le courant de déplacement on a :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{e}_z$$

Un volume infinitésimal dans la plaque est donc traversé par un courant :

$$di = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy$$

qui se traduit par l'élément de courant :

$$di \, d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy dz \mathbf{e}_z$$

Cet élément subit alors une force :

$$d^2\mathbf{F} = di \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = -\frac{dx dy dz}{2\mu_0} \frac{\partial B_y^2}{\partial x} \mathbf{e}_x$$

En intégrant sur l'épaisseur a de la plaque :

$$d\mathbf{F} = -\frac{dy dz}{2\mu_0} (B_y^2(x=a) - B_y^2(x=0)) \mathbf{e}_x$$

On a un champ magnétique nul en $x = a$ car pas de pénétration du champ et en $x = 0$ on a $B_y(0) = -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t)$ pour une onde plane. Et donc :

$$d\mathbf{F} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) dy dz \mathbf{e}_x$$

La force est dirigée vers l'intérieur du métal, normale à sa surface et proportionnel à l'élément de surface : on a une force de pression. La moyenne temporelle de cette pression s'écrit :

$$\langle d\mathbf{F} \rangle = P \, d\mathbf{S}$$

$$P = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0^2$$

qui est la pression de radiation.

Pour ordre de grandeur, NanoSail-D2 est une petite voile solaire de 10 m² réalisée pour la NASA et qui a été lancée en 2011 . Elle subit une poussée de 0.1mN. C'est donc une interaction qui peut être mise à profit pour de vraies applications. La force résultante étant assez faible, sa mise en place dans l'espace est plus aisée (car on a bcp moins de frottements).

↓ *Les voiles solaires dans l'espace, mais on se propage comment dans le ciel/espace d'ailleurs ? (Jean-Michel transition)*

3 Conduction dans les plasmas

Hmm ok vu que le jury veut pas que les métaux on est obligé de développé le modèle du plasma et pas juste faire les métaux à HF à partir de Drude...

3.1 Mise en équation

✚ Garing p144

Un plasma est un ensemble macroscopiquement neutre de charges positives (ions positifs de masse M et de charge $+e$) et d'électrons (de masse m et de charges e) de densité commune n . Les charges sont libres, c'est bien un conducteur. C'est le cas de l'ionosphère par exemple, partie de l'atmosphère comprise entre 60 et 1000 km d'altitude. Nous allons étudier la propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPH) dans un tel milieu. On supposera l'onde polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$. Le champ électrique incident va mettre en mouvement les charges, créant un courant qui devient source de champ EM. La propagation ne sera visiblement pas aussi simple que dans le vide.

On fait les hypothèses suivantes sur le milieu (**sur slide**) :

- On suppose le plasma dilué de sorte à négliger les interactions entre les charges
- On suppose les charges non relativistes.

Les charges n'étant soumises qu'à la force de Lorentz, le principe fondamental de la dynamique appliqué aux électrons et aux ions donne :

$$m \frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \wedge \mathbf{B}) \quad M \frac{d\mathbf{v}_+}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_+ \wedge \mathbf{B})$$

Dans le plasma les normes des champs sont liés par la relation $E = v_\varphi B$ avec v_φ la vitesse de phase. Or les charges étant supposées non relativistes, $\mathbf{v} \ll c \simeq v_\varphi$ (hypothèse à vérifier a posteriori) alors la composante magnétique de la force de Lorentz est négligeable et donc en se plaçant en notation complexe on trouve les équations :

$$\frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = -e\mathbf{E} \quad \frac{d\mathbf{v}_+}{dt} = e\mathbf{E}$$

De plus, comme $\frac{m}{M} \ll 1$, alors $\frac{\mathbf{v}_-}{\mathbf{v}_+} \gg 1$. On peut négliger le mouvement des ions devant celui des électrons. On a

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -ne \frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}$$

On obtient la loi d'Ohm complexe, avec la conductivité du plasma

$$\gamma = \frac{ne^2}{im\omega} = \frac{\omega_p^2 \epsilon}{i\omega}$$

où $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ est la pulsation du plasma.

On observe que la densité de courant et le champ $\mathbf{E}$ sont en quadrature de phase : d'après la loi d'Ohm locale, il n'y a pas de puissance dissipée donc pas d'absorption.

D'après la conservation de la charge, l'équation de Maxwell-Gauss ainsi que la loi d'Ohm on obtient

$$i\sigma \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} - i\omega\rho = 0 \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

soit

$$(\omega_p^2 - \omega^2) \rho = 0$$

Si la pulsation est différente de la pulsation plasma alors le plasma est neutre, sinon il n'y a pas de raison d'avoir électroneutralité mais on verra que dans ce cas le vecteur d'onde est nul et qu'il n'y a pas de propagation possible.

3.2 Relation de dispersion

✚ Poly de Jérémie

Établissons à présent la relation de dispersion à partir des équations de Maxwell en se plaçant en notation complexe $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \left(\mu_0 \sigma - \frac{i\omega}{c^2} \right) \mathbf{E}$$

Ainsi on a

$$i\mathbf{k}^2\mathbf{E} = i\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = \frac{i\omega}{c^2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega \right) \mathbf{E}$$

Donc

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

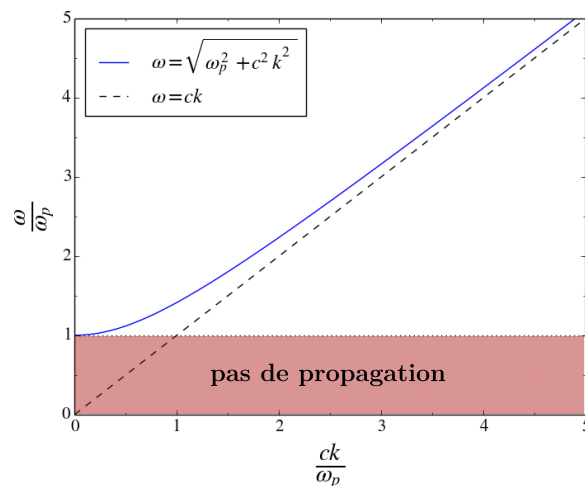
On retrouve la relation de dispersion de la propagation dans les métaux à hautes fréquences, car la conductivité des métaux tend alors vers la conductivité plasma. Tout se passe comme si on négligeait le terme de frottement dans les métaux.

On distingue alors naturellement deux cas :

- $\omega > \omega_p$ Dans ce cas, $\mathbf{k}$ est réel et ainsi, vu la tête de l'onde plane qu'on a choisit, ça veut juste dire qu'on a propagation (dispersive) avec

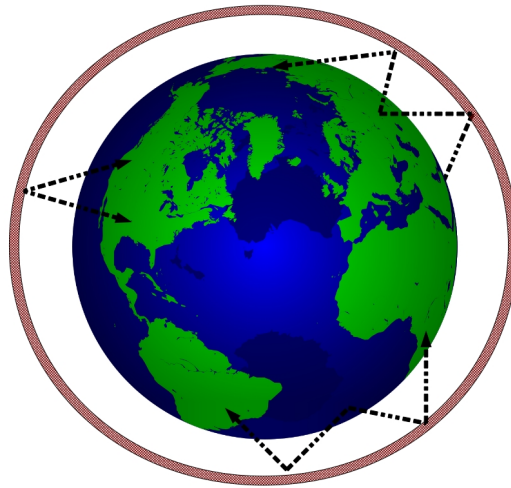
$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + (ck)^2}$$

On parle de dispersion, puisqu'en effet, la vitesse de phase n'est pas égale à la vitesse de groupe. On remarque que pour ω qui devient vraiment grand, la relation revient à quelque chose de non dispersif (cf. plot ci-dessous : la vitesse de phase tend vers c).



- $\omega < \omega_p$ Ceci implique que $\mathbf{k}$ est imaginaire pur, donc il n'y a plus de propagation, mais seulement de l'atténuation. On parle d'onde évanescente. L'énergie ne se propage plus (le vecteur de Poynting est de moyenne nulle). Ainsi pour des raisons énergétiques, il y a réflexion totale (code py).

Une application possible est la propagation dans la ionosphère qui est un plasma de pulsation plasma de l'ordre de 10MHz. Elle constitue une couche supérieure de l'atmosphère. Ainsi en se plaçant à des pulsations inférieures à la pulsation plasma on aura réflexion sur celle-ci et elle peut se comporter comme un guide d'onde pour des ondes type radio (200 kHz pour RTL) qui vont se réfléchir sur la ionosphère puis sur la Terre. Il faut en revanche faire attention lorsqu'on veut envoyer des signaux dans l'espace à utiliser des ondes de pulsations plus grandes que la pulsation plasma.



Conclusion

Ouverture sur les autres domaines où on rencontre Klein-Gordon (dispersion par conditions aux limites).