

LP35 – DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L3

Bibliographie

✦ *Optique MP-PC-PSI-PT, Brenders , Brenders (Précis chapitre 6 Bréal)*

✦ *Optique, Hecht*

✦ *Optique physique, Taillet*

✦ *Optique : fondements et applications, Pérez*

✦ <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>

✦ *Physique expérimentale, Fruchart*

TD Diffraction 1 pour pas mal de discussion intéressantes sur l'importance de la diffraction de Fraunhofer, et le 2 sur le filtrage optique.
La base qu'oient

Prérequis

- Changement de référentiel et formules de composition des vitesses/accélérations

Table des matières

1	De Huygens à Fraunhofer	2
1.1	Le principe de Huygens	2
1.2	Le régime de Fraunhofer	3
1.3	Obtention pratique : le montage 4f	5
2	La figure de diffraction	5
2.1	Diffraction par une fente fine	5
2.2	Généralisation à un objet quelconque : notion de transparence	6
2.3	Propriétés de la figure de diffraction	7
3	Applications	7
3.1	Filtrage optique	7
3.2	Le critère de Rayleigh	8

Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : Les conditions de Fraunhofer et leurs conséquences doivent être présentées, ainsi que le lien entre les dimensions caractéristiques d'un objet diffractant et celles de sa figure de diffraction.
- **2009-2010** : Les phases associées aux amplitudes doivent être traitées avec soin.
- **2006-2008** : Le principe de Huygens-Fresnel doit être exposé clairement, sans débordements mathématiques excessifs. Il faut expliquer pourquoi la diffraction de Fraunhofer est pertinente dans la formation des images.
- **2005** : Rappelons que la diffraction de Fraunhofer accompagne l'image géométrique d'une source initiale et que l'écriture du principe de Huygens-Fresnel dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer doit être rigoureuse. Les applications ne doivent pas se limiter au trou circulaire et à la fente fine. Dans ce dernier cas, il faut justifier le calcul qui est mené.

Bong c'est quand même souvent le même plan (cf Francis-Camille-Corentin). Pour les applications filtrage et critère de Rayleigh ça me paraît le plus pertinent hein Abel et sa microscopie à contraste de phase bon voilà quoi. On peut réutiliser l'expérience d'Abbe pour illustrer le filtrage hop la zéro déchet. Attention à ne pas passer trop de temps sur la théorie du I faut que le vrai arrive vite.

Introduction

Manip avec une fente réglable : on diminue la largeur de la fente progressivement : l'optique géométrique tombe en défaut en dessous d'une certaine largeur. Comment décrire ce phénomène ?

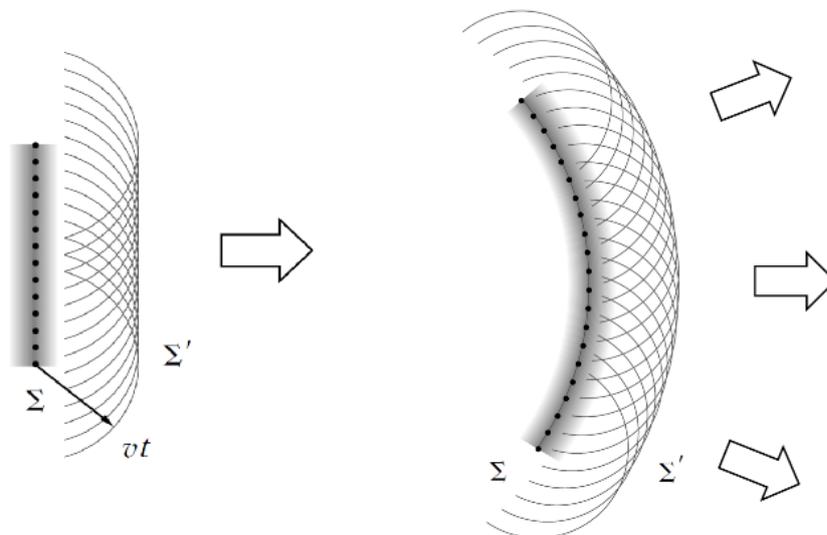
1 De Huygens à Fraunhofer

1.1 Le principe de Huygens

➤ Hecht p110 et chap 10 (surtout les leçons et Wikipédia en vrai, le Hecht me transcende pas)

Dans son manuscrit *Traité de la Lumière* paru en 1690¹, Huygens propose une théorie pour expliquer la propagation de la lumière jusqu'alors peu expliquée :

"Tout point d'un front d'onde se comporte comme une source secondaire d'ondelettes sphériques, telles qu'à un instant plus tard, le front d'onde soit l'enveloppe de ces ondelettes"



1. rpz l'oral d'Ondes et Optique en L3 bb

avec ce principe, on comprend alors pourquoi une onde plane reste plane lors de sa propagation et pourquoi une onde sphérique reste sphérique. En supposant que la vitesse de propagation des ondelettes dépend du milieu on peut même retrouver les lois de Snell-Descartes! Mais le problème c'est que ce principe n'explique pas tout... Par exemple si l'on considère deux ondes électromagnétiques, une onde lumineuse et une onde radio, croisant comme obstacle un poteau, l'onde lumineuse va se retrouver stoppée (ombre portée derrière le poteau) alors que l'on capte très bien l'onde radio juste derrière le poteau (sinon chaud les téléphones). La longueur d'onde semble alors avoir une influence.

Il a fallu alors attendre Fresnel en 1818 avec la publication de son ouvrage *Mémoire sur la diffraction de la Lumière* et qui incorpora le phénomène d'interférence au principe de Fresnel, mettant alors ainsi en exergue le rôle de la longueur d'onde. Cette amélioration peut alors se résumer de la sorte :

"Les sources secondaires sont toutes cohérentes entre elles et il faut considérer une sommation des amplitudes en prenant compte leur phase."

Ce principe reste alors pendant quelques années un postulat jusqu'à ce qu'il fut démontré par Kirchhoff. En utilisant les formules de Green², on peut montrer que si une perturbation sinusoïdale représentée par un champ $U(M)$ satisfait à l'équation de d'Alembert alors on peut exprimer la valeur de ce champ en un point M dès lors que l'on connaît U et $\vec{\nabla}U$ sur une surface fermée S entourant le point M . On a alors :

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla}U - U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

Si on applique alors ce théorème dans le cas où l'on a une source ponctuelle située en S émet une onde sphérique rencontrant un objet opaque contenant une ouverture et que l'on suppose $\lambda \ll r, s$ alors on a **schéma au tableau pour définir les angles et les distances** :

$$U(M) = -\frac{iu_0}{\lambda} \iint_S K(\theta) \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} dS \quad (2)$$

avec le facteur d'obliquité K .

$$K(\theta) = \frac{1}{2} \left(\cos(\vec{dS}, \vec{e}_r) - \cos(\vec{dS}, \vec{e}_s) \right) \quad (3)$$

On voit alors apparaître cette notion de sommation d'ondelettes sphériques mais cette expression reste encore un peu compliquée.

↓ Il va falloir faire quelques approximations pour essayer de s'en sortir...

1.2 Le régime de Fraunhofer

♣ Précis Bréal + Pérez + Born Wolf p. 383. Plus les Cléments niveau leçon, les calculs sont les mêmes partout, seules les notations changent.

Les phénomènes que l'on veut expliquer comme la diffraction de la lumière par une fente ou un rideau en tissu fin sont des cas où la source se situe loin de l'objet et où le plan d'observation se situe loin de l'objet si l'on compare ces deux distances s et r à la longueur d'onde λ . On peut donc pousser un peu plus l'approximation déjà réalisée en considérant :

$$\cos(\vec{dS}, \vec{e}_s) \sim 1 \quad \cos(\vec{dS}, \vec{e}_r) \sim 1 \quad (4)$$

On a donc un facteur d'obliquité égal à 1. Si de surcroît on suppose que la distance ouverture source varie de manière négligeable à l'échelle de l'objet, et que donc l'amplitude incidente est supposée constante sur l'ouverture, on peut intégrer le facteur en s à u_0 et on a alors :

². ou théorème de Green d'après Wikipédia mais Magro disait formules de Green

$$U(M) = \frac{U_0}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikMP}}{MP} dS \quad (5)$$

P désignant un point sur la surface d'intégration.

La paroi rencontrée étant opaque et le champ s'annulant à l'infini par propagation non instantanée de la lumière, le champ n'est non nul sur Σ qu'au niveau de l'ouverture diffractante. Si on paramétrise cette surface supposée plane par les coordonnées $(x,y,z=0)$ on a alors :

$$U(M) = \frac{U_0}{i\lambda} \iint_{x,y} \frac{e^{ikMP}}{MP} dx dy \quad (6)$$

et en notant $(X,Y,z=d)$ les coordonnées du point M dans le plan d'observation on a :

$$MP = \sqrt{d^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2} \quad (7)$$

Pour continuer le calcul, nous allons nous placer dans l'approximation paraxiale :

$$X, Y \ll d \quad (\text{petite pupille}) \quad (8)$$

$$x, y \ll d \quad (\text{observation proche de l'axe}) \quad (9)$$

on va alors pouvoir poursuivre notre développement de l'amplitude diffractée et simplifiant l'expression de MP . Celle-ci intervient deux fois : une fois au dénominateur et une fois dans l'exponentielle en facteur de phase. On ne va pas développer ces deux termes de la même façon. En effet, avec MP varie très peu autour de d lorsque le point d'intégration parcourt la pupille on peut donc arrêter le développement du dénominateur à l'ordre 0 :

$$\frac{1}{MP} \approx \frac{1}{d} \quad (10)$$

Par contre dans le facteur de phase nous nous devons d'être plus précis ! En effet, il suffit que MP varie de $\frac{\lambda}{2}$ pour que l'exponentielle change de signe... On va donc développer un petit peu plus loin³ :

$$MP = \sqrt{d^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2} \approx d + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2d} \quad (11)$$

en développant alors finalement les carrés on a :

$$MP \simeq \underbrace{d + \frac{X^2 + Y^2}{2d}}_{\text{terme constant dans l'intégrale}} + \underbrace{\frac{Xx + Yy}{d}}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{\frac{x^2 + y^2}{2d}}_{\text{terme quadratique}} \quad (12)$$

Le terme constant MP_0 va juste donner lieu à un facteur de phase donc on peut le rentrer dans U_0 . Pour simplifier les notations on pose $\alpha = \frac{X}{d}$, $\beta = \frac{Y}{d}$ et $\rho = x^2 + y^2$ et on a alors :

$$MP \approx MP_0 + \alpha x + \beta y + \frac{\rho^2}{2d} \quad (13)$$

on introduit alors le nombre de Fresnel \mathcal{F} permettant d'évaluer le terme quadratique de phase :

$$\mathcal{F} = \frac{\rho^2}{2\lambda d} \quad (14)$$

Dans le cas où l'on a $\mathcal{F} \ll 1$ on peut négliger ce terme et on se retrouve alors dans le régime dit de Fraunhofer :

$$U(\alpha, \beta) = U'_0 \iint_{x,y} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (15)$$

3. Ce qu'il faut comprendre c'est qu'on pourrait très bien développer les deux termes au même ordre le plus grand, le dénominateur a juste des variations de moindre importance avec la distance

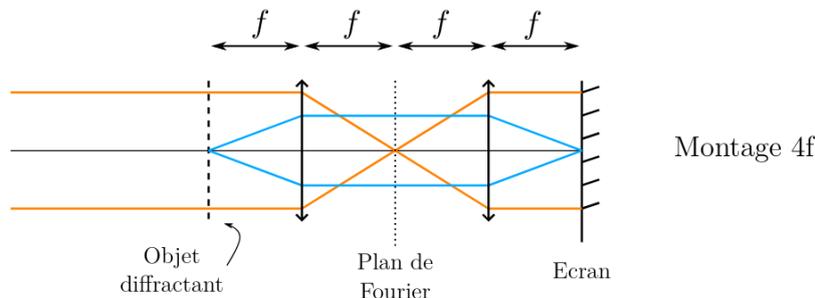
Remarque J'ai préféré simplifier directement en considérant une onde plane incidente (ce que tout le monde fait) dès le début. Sinon ça devient trop compliqué en partant de Kirchoff. Être tout de même au courant du "vrai" nombre de Fresnel (Cf MP9) mais le mentionner dans la leçon je suis pas fan, c'est déjà assez la foire au calcul comme ça.

↓ On a fait ici beaucoup d'approximations, comment les vérifie-t-on en pratique ?

1.3 Obtention pratique : le montage 4f

Selon nos hypothèses, il faut donc se placer en incidence normale, ce qui peut se réaliser avec une source ponctuelle dans un plan focal objet d'une première lentille et observer l'image à l'infini, donc placer simplement une lentille après l'objet pour observer la figure de diffraction de Fraunhofer dans le plan image de cette deuxième lentille. On appelle alors ce plan **plan de Fourier**, nous verrons juste après pourquoi. Si l'on veut de surcroît observer l'image de l'objet, il faut rajouter une lentille qui conjugue l'objet sur un écran.

En oubliant le système pour créer la source à l'infini, on peut donc utiliser deux lentilles de focales égales à f . Le montage prend alors une place $4f$ ce qui lui vaut le fameux nom de montage 4f.



Montage 4f

2 La figure de diffraction

2.1 Diffraction par une fente fine

↪ Taillet pp133-134

Là c le calcul qu'on fait rigoureusement et on fait l'expérience Jolidon p323

Appliquons l'expression que nous avons obtenue pour l'onde diffractée à l'expérience introductive avec le fente simple. Nous nous étions arrêtés à, dans le cadre d'une onde incidente plane :

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

où l'intégrale sur Σ est l'intégrale sur l'objet diffractant. Mais justement, ici notre objet diffractant est une fente simple de dimensions a et b . On peut alors préciser les limites d'intégration avec une onde plane incidente :

$$A(x, y) = A'_0 \int_{X=-a/2}^{X=a/2} \int_{Y=-b/2}^{Y=b/2} e^{-ik\frac{xX}{d}} e^{-ik\frac{yY}{d}} dX dY$$

$$A(x, y) = \mathcal{A} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikxX/d} dX \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikyY/d} dY$$

$$A(x, y) = \mathcal{A} \left(\frac{d}{-ik} \right)^2 \left[e^{-ikax/2d} - e^{ikax/2d} \right] \left[e^{-iky/2d} - e^{iky/2d} \right]$$

$$A(x, y) = \mathcal{A} \left(-\frac{d^2}{k^2} \right) \times 4 \sin \left(\frac{kxa}{d2} \right) \sin \left(\frac{k y b}{d2} \right)$$

$$A(x, y) \propto \text{sinc} \left(\frac{kxa}{d2} \right) \text{sinc} \left(\frac{k y b}{d2} \right)$$

L'intensité lumineuse s'écrit donc :

$$I(x, y) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi yb}{\lambda d}\right)$$

Une fente fine (ou mince) est caractérisée par une dimension très grande devant l'autre. Ainsi, une fente avec $a \ll b$ est une fente simple et on peut alors négliger la variation selon y . On se retrouve alors avec :

$$I(x) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right)$$

On peut s'amuser à montrer une courbe théorique de cette expression. La première annulation de l'intensité nous permet de retrouver une formule vue au lycée : les annulations sont données par $x = \frac{\lambda d}{a}$.

la diffraction n'est pas seulement dans ce cône comme on a pu le voir en L1. Le formalisme de Fraunhofer restitue bien nos observations.



Montrer expérimentalement l'influence de la largeur de la fente.

↓ Essayons de d'appliquer ce formalisme à un objet de forme plus compliquée.



2.2 Généralisation à un objet quelconque : notion de transparence

✎ Taillet p 139

Pour décrire un objet de forme et d'opacité quelconque, on définit la transparence :

La transmittance (ou transparence) $\underline{t}(X, Y)$ de l'objet diffractant est définie comme le rapport des amplitudes de l'onde avant et après l'objet : $\underline{t}(X, Y) = \frac{A(X, Y, z=0^+)}{A(X, Y, z=0^-)}$

Remarques :

- ça ressemble beaucoup à une fonction de transfert
- si $\underline{t} \in \mathbb{R}$, l'objet est dit objet d'amplitude, comme la fente qui ne modifie que l'amplitude ce qu'on vérifie avec la transmittance réelle comme produit de deux portes
- $\underline{t} \in \mathbb{C}$, l'objet est dit objet de phase comme il ne modifie que la phase de l'onde

Maintenant qu'on a défini la transmittance, on peut voir qu'elle apparaît dans l'expression de l'onde diffractée :

$$A(x, y) = \frac{-i}{\lambda d} e^{ikd} \iint_{\Sigma} A(X, Y, z=0^+) e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

$$A(x, y) = \frac{-i}{\lambda d} e^{ikd} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) A(X, Y, z=0^-) e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

On est encore dans le cas d'une onde plane incidente donc $A(X, Y, z=0^-) = A_0$ donc

$$A(x, y) = \frac{-i}{\lambda d} e^{ikd} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) A(X, Y, z=0^-) e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

$$A(x, y) = A_0 \frac{-i}{\lambda d} e^{ikd} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)} dX dY$$

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-i2\pi\left(\frac{\theta_x X}{\lambda} + \frac{\theta_y Y}{\lambda}\right)} dX dY$$

où on a défini les angles θ_x et θ_y en les prenant égaux à leur sinus.

Comme on a précisé dans le DL de Huygens-Fresnel, dans l'approximation de Fraunhofer on regarde à l'infini mais en gardant les angles constants, il est donc tout à fait normal de voir apparaître ces angles.

On définit les fréquences spatiales $\nu_x = \theta_x/\lambda$ et $\nu_y = \theta_y/\lambda$ dont on verra toute la pertinence dans ciiniinq minutes

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-i2\pi\left(\frac{\theta_x X}{\lambda} + \frac{\theta_y Y}{\lambda}\right)} dX dY$$

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) e^{-i2\pi(\nu_x X + \nu_y Y)} dX dY$$

$$A(x, y) = A'_0 \mathcal{TF}[\underline{t}(X, Y)](\nu_x, \nu_y)$$

comprendre la dernière ligne comme Transformée de Fourier de la transmittance prise en les variables ν_x et ν_y .

Ainsi, la figure de diffraction de Fraunhofer n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet. On remarque la cohérence avec le calcul mené plus tôt pour la fente : la TF d'une fonction porte (qui est la transmittance de ladite fente) est bien une sinus cardinal).

Remarque : si on prend une transparence de 1 partout on a un delta de Dirac et on retrouve l'optique géométrique

↓ Utilisons les propriétés mathématiques de la transformée de Fourier pour établir celles de la figure de diffraction.

2.3 Propriétés de la figure de diffraction

↗ Taillet, p.144 Fruchart p 329.

A illustrer avec l'expérience cf Fruchart en utilisant notre expérience déjà montée

Translation La translation de l'objet introduit donc un terme de phase dans la transformée de Fourier, donc celui-ci disparaîtra quand on regardera l'intensité. La figure de diffraction n'est donc pas modifiée par translation de l'objet (attention toutefois à garder une incidence normale pour ne pas sortir du cadre de notre étude).

Changement d'échelle Augmenter la taille de l'objet va donc diminuer les fréquences spatiales. On comprend également pourquoi, lorsque l'objet est trop grand, on n'observe plus de diffraction, puisque les fréquences se rapprochent trop de la tache centrale.

Produit de convolution Grâce à cette propriété, on peut simplement prédire la figure de diffraction d'objets assez complexes, comme la double fente

Théorème de Babinet La figure de diffraction d'un objet est la même que celle de son objet complémentaire (où le complémentaire d'un objet est défini comme étant un objet de transparence $t_0 = 1 - t$), au terme de fréquences spatiales nulles (au centre) près..

Conséquences de translation, changement d'échelle, produit de convolution et théorème de Babinet

3 Applications

3.1 Filtrage optique

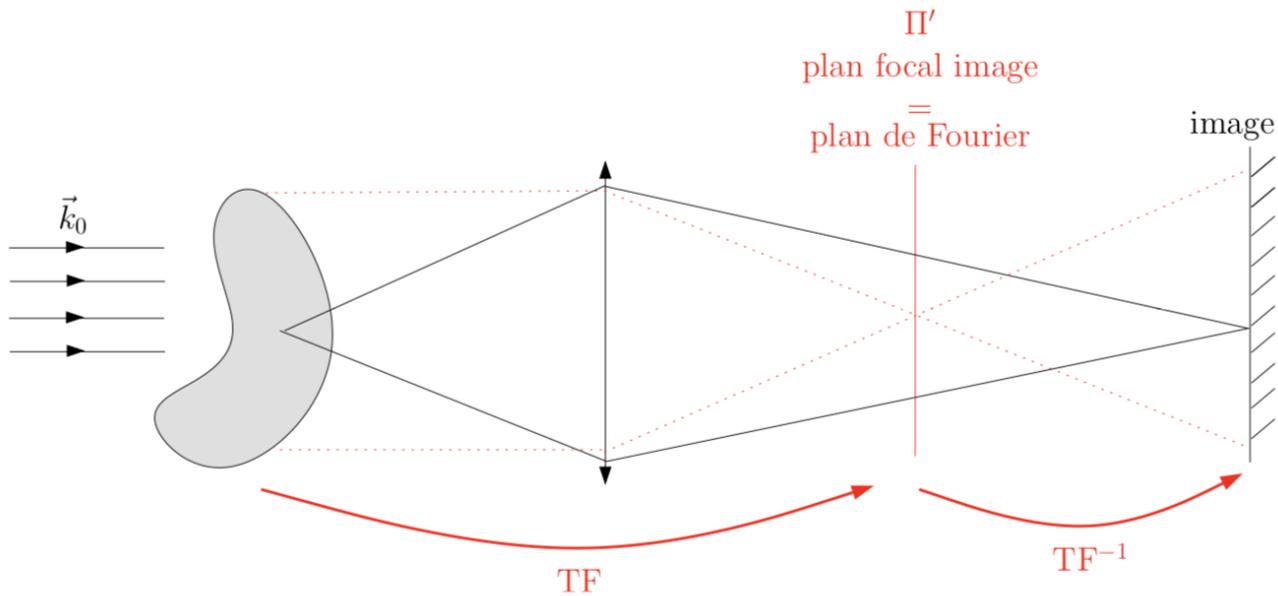
↗ MP Diffraction des ondes lumineuses expérience d'Abbe ↗ Jolidon p335

Ou plutôt faire un montage "passe-haut" pour observer une empreinte digitale c'est plus pratique. Tout est dans le jolidon de toute façon, pas besoin d'aller voir Berthelard en fait hehe.

Soit un objet éclairé par une onde plane en incidence normale. On fait l'image de cet objet dans un plan noté P avec une lentille. Dans le plan focal de cette lentille, on observe la figure de diffraction à l'infini de l'objet, i.e. la transformée de Fourier de sa fonction de transparence. On appelle ce plan plan de Fourier, noté II. La figure observée dans le plan P est donc elle-même la transformée de Fourier (inverse) de la figure de diffraction observée dans le plan de Fourier. Si l'on introduit dans le plan de Fourier un nouvel objet de transmittance bien choisie, on manipule la transformée de Fourier de l'image observée dans le plan P, et l'on manipule donc l'image elle-même. On peut ainsi, par exemple, filtrer certaines fréquences spatiales de l'objet pour n'en conserver que d'autres.

Si un objet a des fréquences spatiales faibles (variations de $t(X, Y)$ lentes), sa tache de diffraction est petite, au centre de l'écran. Inversement, la tache de diffraction présente des composantes éloignées du centre de la figure si

l'objet présente des variations spatiales rapides. On peut donc «filtrer» les variations lentes de $t(X,Y)$ dans l'écran d'observation en bloquant une zone centrale du plan de Fourier avec un écran opaque.



3.2 Le critère de Rayleigh

↗ cf LP32 Microscopies optiques et le code qui va avec

En tant que système optique spatialement limité, les instruments d'optique comme le microscope est soumis aux phénomènes de diffraction. La monture circulaire de l'objectif limite l'extension transversale du faisceau lumineux incident -> diffraction.

L'angle d'étalement d'intensité pour une ouverture circulaire s'obtient avec la TF d'un cercle (fonction de BESSEL) qui ressemble à un sinus cardinal : $I = I_0 J_1^2(2\pi R\nu)$ avec $\nu = \frac{\theta}{\lambda}$ la fréquence spatiale

La première racine est en 1.22π

$$2\pi R\nu = 1.22 \implies \theta = 1.22 \frac{\lambda}{2R} = 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

L'image d'un point par l'objectif n'est pas un point mais un disque d'Airy centré sur son image géométrique et de rayon $\rho = 1,22 \frac{\lambda L}{2R}$ (faire schéma). La capacité du microscope à former une image résolue de deux objets angulairement proches est limitée. La limite de la résolution angulaire est donnée par le critère de Rayleigh : deux objets ponctuels sont tout juste résolus si le max de la figure de diffraction de l'un correspond au premier min de la figure de diffraction de l'autre. La séparation angulaire correspondante est donnée par $\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D_0}$. En faisant l'hypothèse que le microscope est aplanétique, on peut utiliser la condition d'Abbe pour déterminer la limite de résolution :

$$nAB \sin \alpha = nA'B' \sin \alpha' \Leftrightarrow AB_{\min} = \frac{0.61\lambda}{n \sin \alpha_{\max}} = \frac{0.61\lambda}{O.N.} \quad (16)$$

Remarques

Pour mettre au clair cette histoire de Fraunhofer/Fresnel ça dépend pas juste de Fresnel en fait ça dépend comment on le définit. Par exemple dans le MP9 on l'a défini avec les deux distances donc si mais apparemment il est plutôt d'usage de ne le définir qu'avec une des distances.