LP2020 – Effet Doppler et applications

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Bibliographie

✍ *J'intègre PC-PC**, **Sanz** — pour le début

✍ https://femto-physique.fr/optique/pdf/presentation-doppler.pdf — eh mercé femto

✍ *Physique expérimentale*, **Jolidon**

Prérequis

➢ Cinématique relativiste

Table des matières

Remarques

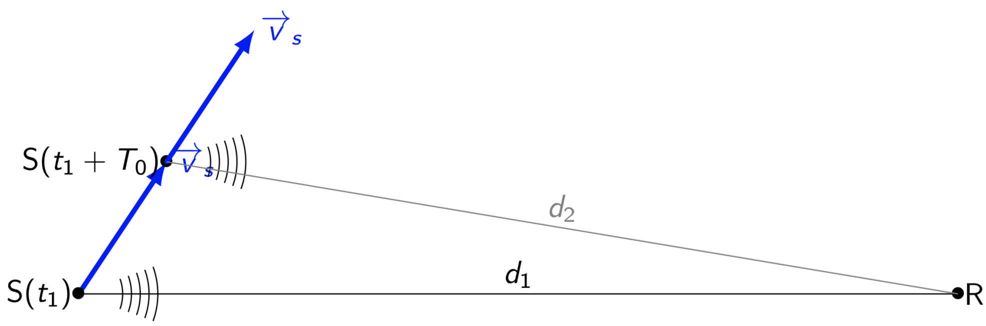
Bon ne pas faire que du relativiste, commencer par le radar avec l'expérience du Jolidon et élargissement spectral je trouve ça bien parce que les élèves y sont confrontés en TP (pas comme les atomes froids mdr), et une application relativiste c pas mal aussi la correction au GPS c cool.

Introduction

Nous avons tous entendu un son de fréquence plus élevée lorsqu'une sirène vient vers nous et de fréquence plus basse lorsqu'elle s'en éloigne. En effetn quand un émetteur d'onde sinusoïdale est en mouvement par rapport à un récepteur, celui-ci attribue aux vibrations qu'il reçoit une fréquence différente de la fréquence émise : c'est l'effet Doppler. Cet effet est à la base du foctionnement des radars routier mais se rencontre aussi en astronomie, en médecine... L'objectif de cette leçon est d'expliquer cet effet et d'en présenter quelques applications.

1 Effet Doppler classique

1.1 Présentation du phénomène



Dans un référentiel donné, une source **S** émet une onde à une fréquence ν_0 et se déplace à la vitesse $\vec{v}_s$. Un récepteur **R** se déplace à la vitesse $\vec{v}_r$ et reçoit ces ondes avec une fréquence ν'. On notera c la vitesse de propagation des ondes. On notera $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de la source vers le récepteur. On suppose la source et le récepteur classiques de sorte que $v_r \ll 3.10^8$ m/s et $v_s \ll 3.10^8$ m/s. Dans un premier temps on va considérer le récepteur immobile.

Effet du au mouvement de la source

Signal	émission	réception
1er bip	instant t_1	$t_1' = t_1 + d_1/c$
2ème bip	$t_2 = t_1 + T_0$	$t_2' = t_2 + d_2/c$

La période des bips recus est donc

$$T' = t_2' - t_1' = T_0 + \frac{d_2 - d_1}{c}$$

Or on a

$$\begin{cases} d_1 = SR\,(t_1) \\ d_2 = SR\,(t_2) \simeq SR\,(t_1) + (t_2 - t_1)\,\frac{\mathrm{d}SR}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

De plus la vitesse de la source s'écrit

$$\vec{v}_s = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{RS}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{SR}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{u} = -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{SR} \cdot \vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}SR}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi on a

$$T' = T_0\left(1 - \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{u}}{c}\right) \quad \Longrightarrow \quad \nu' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{u}}{c}}$$

- Si la source se dirige vers le récepteur :

$$\vec{v}_s \cdot \vec{u} = v_s \quad \Longrightarrow \quad \nu' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_s}{c}}$$

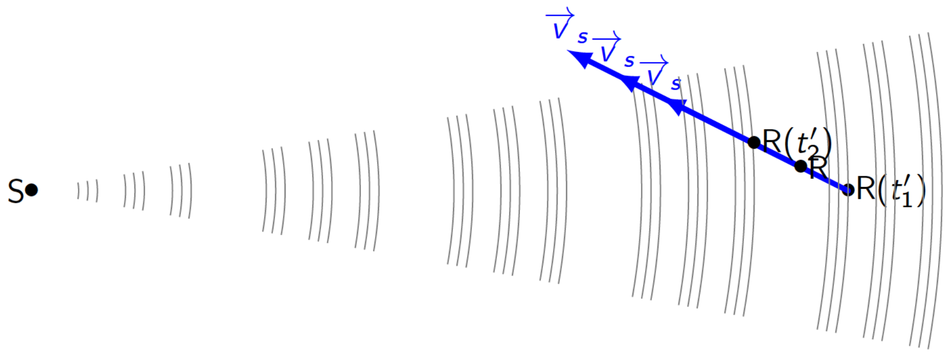
La fréquence perçue est plus grande quand la source se rapproche

- Si la source s'éloigne du récepteur :

$$\vec{v}_s \cdot \vec{u} = -v_s \quad \Longrightarrow \quad \nu' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{V_s}{c}}$$

La fréquence perçue est plus petite quand la source s'éloigne

ODG Par exemple si une voiture roulant à 90 km/h émet un son de fréquence 600 Hz, l'observateur percevra un son de fréquence comprise entre 556 et 644 Hz (vitesse du son $c = 340$ m/s).



Effet du au mouvement du récepteur

Signal	émission	réception
1er bip	instant t_1	$t_1' = t_1 + SR(t_1')/c$
2ème bip	$t_2 = t_1 + T_0$	$t_2' = t_2 + SR(t_2')/c$

La période des bips recus est donc

$$T' = t_2' - t_1' = T_0 + \frac{SR(t_2') - SR(t_1')}{c} = T_0 + \frac{(t_2' - t_1')\frac{\mathrm{d}SR}{\mathrm{d}t}}{c}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{d}SR}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{SR} \cdot \vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_r \cdot \vec{u}$$

Ainsi on a

$$T' = \frac{T_0}{1 - \frac{\vec{V}_r \cdot \vec{u}}{c}} \Longrightarrow \nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

- Si le récepteur se dirige vers la source :

$$\vec{v}_r \cdot \vec{u} = -v_r \quad \Longrightarrow \quad \nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$$

La fréquence perçue est plus grande quand le récepteur se rapproche de la source

- Si le récepteur s'éloigne de la source :

$$\vec{v}_r \cdot \vec{u} = v_r \quad \Longrightarrow \quad \nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)$$

La fréquence perçue est plus petite quand la source s'éloigne

Formulation générale Soit une source en mouvement à la vitesse v_s dans un référentiel émettant une onde de fréquence ν_0. Un récepteur en mouvement à la vitesse v_r mesurera une fréquence ν' donnée par

$$\nu' = \nu_0 \frac{1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}}{c}}{1 - \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{u}}{c}}$$

Si les vitesses sont faibles devant c, on pourra retenir

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{\vec{v}_{s/r} \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

où $\vec{v}_{s/r}$ désigne la vitesse relative de la source par rapport au récepteur.

Le décalage spectral est le décalage relatif en fréquence ou en longueur d'onde. Pour les petites vitesses on a :

$$\frac{\nu' - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\vec{v}_{s/r} \cdot \vec{u}}{c}$$

Conséquences :

- Décalage spectral maximum quand $\vec{v}_{s/r} \| \vec{u}$.
- Pas de décalage spectrale transversal : $\Delta\nu = 0$ quand $\vec{v}_{s/r} \perp \vec{d}$.

1.2 Le radar

Figure 1 – Radar fixe

Fréquence utilisée : $\nu_0 = 24,125$GHz (ondes centimétriques). Décalage Doppler :

$$v \sim 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Longrightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \sim \frac{2v}{c} \sim 2.10^{-7}$$

Radar fixe : $\alpha = 25°$.

Les décalages en fréquence mis en jeu sont donc très faibles **devant la fréquence de l'onde émise**, donc difficile à mesurer avec précision. Or si on veut déterminer la vitesse de la source c'est justement à cette différence de fréquence qu'il faut accéder. Pour avoir accès à δf on utilise le principe de détection synchrone.

✍ Jolidon ou Poly de TP Divers

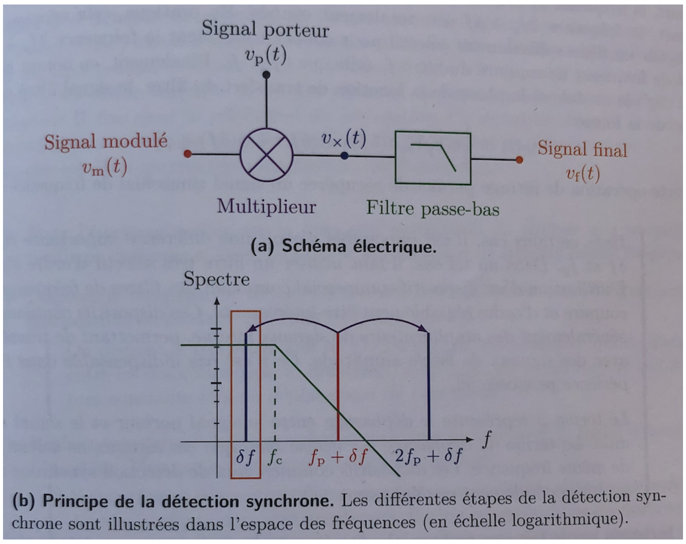
Considérons un émetteur ultrasonore qui émet une onde à la fréquence f. Si cet émetteur se rapproche d'un récepteur à la vitesse v, la fréquence détectée par le récepteur vaut, par effet Doppler :

$$f_{\text{mesurée}} = \frac{c_{\text{son}}}{c_{\text{son}} - v} f$$

Pour une vitesse v de l'émetteur de l'ordre de quelques cm/s, beaucoup plus faible que la vitesse du son c_{son}, on peut alors développer cette expression au premier ordre et exprimer l'écart en fréquence du à l'effet Doppler :

$$\delta f = f_{\text{mesurée}} - f \approx \frac{v}{c_{\text{son}}} f \ll f$$

Cet écart en fréquence est trop faible pour pouvoir distinguer f et $f_{\text{mesurée}}$ sur un oscilloscope. Nous allons alors réaliser une détection synchrone afin de mesurer δf.



(a) Schéma électrique.

(b) Principe de la détection synchrone. Les différentes étapes de la détection synchrone sont illustrées dans l'espace des fréquences (en échelle logarithmique).

En termes fréquentiels, le signal final $v_\mathrm{f}(t)$ contient la partie basse fréquence du produit des tensions $v_x(t) = Gv_\mathrm{m}(t)v_\mathrm{p}(t)$. Supposons que $v_\mathrm{p}(t)$ est un signal de fréquence f_p et $v_\mathrm{m}(t)$ un signal de fréquence $f_\mathrm{p}+\delta f$. La fréquence de coupure du filtre $\bar{f}_\mathrm{c}$ est choisie telle que $\delta f < f_\mathrm{c}$ et le filtre lui-même est choisi pour couper en quasi-totalité la fréquence $2f_\mathrm{p}+\delta f$. Le signal $v_\mathrm{f}(t)$ est donc un signal de fréquence δf.

Supposons que nous ayons accès à un signal $v_\mathrm{p}(t)$, que nous qualifions de signal porteur, de la forme

$$v_\mathrm{p}(t) = V_\mathrm{p}\sin\left(f_\mathrm{p}t\right)$$

Par un phénomène physique quelconque, ici l'effet Doppler, la fréquence de ce signal se trouve modifiée. Ce signal modifié $v_m(t)$. que nous qualifions de signal modulé [1], est de la forme

$$v_\mathrm{m}(t) = V_\mathrm{m}\sin\left[\left(f_\mathrm{p}+\delta f\right)t+\varphi\right]$$

Si ces signaux sont sous forme électrique, on peut les multiplier grâce à un multiplieur de gain $G^{(2)}$. Le signal en sortie est alors de la forme

$$v_\times(t) = \frac{1}{2}GV_\mathrm{p}V_\mathrm{m}\left(\cos[\delta ft+\varphi]-\cos\left[\left(2f_\mathrm{p}+\delta f\right)t+\varphi\right]\right)$$

Appliquons ensuite à ce signal un filtre passe-bas judicieusement choisi tel que, d'une part, la fréquence δf soit inférieure à la fréquence de coupure du filtre et que, d'autre part, la fréquence $2f_\mathrm{p}+\delta f$ soit totalement coupée. En pratique, cela suppose de choisir un filtre suffisamment sélectif pour couper totalement la fréquence $2f_\mathrm{p}+\delta f$ et de fréquence de coupure du filtre f_c telle que $\delta f < f_\mathrm{c}$. Finalement, en notant $h(f)$ et $\phi(f)$ le module et la phase de la fonction de transfert du filtre, le signal filtré $v_\mathrm{f}(t)$ est de la forme

$$v_\mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}GV_\mathrm{p}V_\mathrm{m}h(\delta f)\cos[\delta ft+\phi(\delta f)+\varphi]$$

Cette opération de filtrage permet de récupérer un signal sinusoidal de fréquence δf. On peut alors déduire la vitesse de l'émetteur à partir de cette fréquence. C'est ainsi que foncitonnent les radars. EN pratiue émetteur et récepteurs sont au même endroit : le récepteur aquiert l'onde émise par l'émetteur puis réfléchie par la voiture mobile.

Vroum vroum

On fait une mesure en un point et on compare à la vitesse donnée par les détecteurs.

Le calcul du décalage en fréquence par effet Doppler ne nécessite aucune hypothèse sur l'onde émise. C'est un phénomène ondulatoire, qu'on peut donc retrouver dans d'autres domaines de la physique comme l'optique.

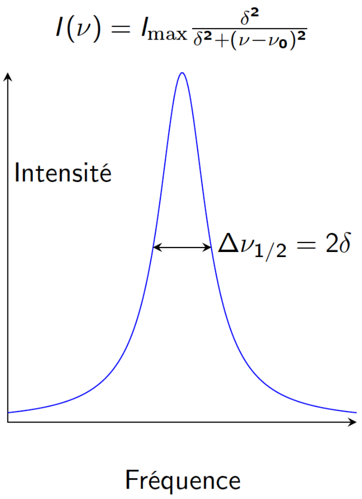
1.3 Élargissement spectral par effet Doppler

Comme vous le savez, les atomes possèdent un spectre d'émission discret appelé spectre de raie caractéristique de l'élément : par exemple, l'hydrogène émet dans le visible les raies constituant la série de Balmer, correspondant aux transitions électroniques entre les niveaux excités et les niveaux $n = 2$.

Une raie spectrale n'est jamais purement monochromatique. Le profil d'une raie spectrale est donné par la courbe de Lorentz. La largeur naturelle est la largeur à mi-hauteur de la raie spectrale. Elle est liée à la durée de vie du niveau excité τ via la relation d'incertitude d'Heinsenberg :

$$\Delta E \times \tau = \hbar \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{2\pi\Delta\nu_{1/2}}$$

Ordre de grandeur $\tau \sim 10^{-8}$ s, $\Delta\nu_{1/2} \sim 10$MHz



Dans un gaz de température non nulle, les molécules ont des vitesses aléatoirement distribuées qui respectent la loi de Maxwell-Boltzmann

$$N(v) = N(0)\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_B}T} \qquad \text{avec} \qquad k_B = R/\mathcal{N}_a = 1,38.10^{-23}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$$

Par effet Doppler ces atomes émettent une onde qui sera reçue par un observateur fixe avec une fréquence décalée

$$\nu = \nu_0(1 \pm v/c) \Longrightarrow \quad v = \pm c\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$$

Or, l'intensité lumineuse émise à la fréquence ν est proportionnelle au nombre d'atomes ayant la vitesse v. Ainsi on trouve

$$I(\nu) = I_{\max}\mathrm{e}^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2k_BT\nu_0^2}}$$

qui est un rofil gaussien centré en ν_0 et d'écart-type σ

$$I_\nu = I_{\max}\mathrm{e}^{-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

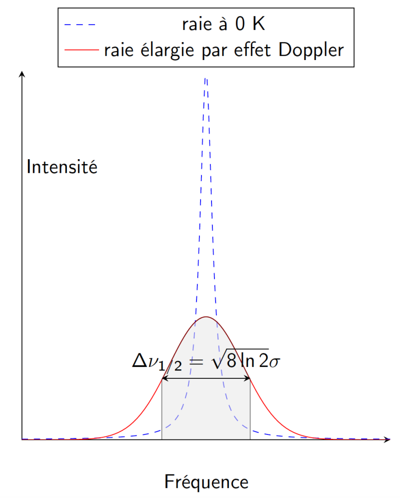
Largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\nu_{1/2} = \sqrt{8\ln 2}\sigma = \nu_0\sqrt{\frac{8\ln 2k_BT}{mc^2}}$$

D'où

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_{1/2}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{8\ln 2k_BT}{mc^2}}$$

Les raies spectrales s'élargissent d'autant plus que la température est grande.



ODG :

- Transition atomique du laser rouge He-Ne ($T = 400$ K et $m = 20$ uma) :

$$\lambda_0 = 632 \text{ nm} \Longrightarrow \Delta\lambda_{1/2} = 2\text{pm et } \Delta\nu_{1/2} = 1500\text{MHz}$$

C'est dans cet intervalle de fréquence que la cavité va sélectionner les modes du laser.

- Raie H_α (raie rouge de la série de Balmer) du spectre solaire ($T = 5700$ K et $m = 1$ uma) :

$$\lambda_0 = 656 \text{ nm} \Longrightarrow \Delta\lambda_{1/2} = 30\text{pm et } \Delta\nu_{1/2} = 25\text{GHz}$$

L'élargissement spectral des raies contient donc différentes informations physiques sur la source (T, P si on prend en compte l'élargissement du à la pression) auxquelles on peut accéder par spectroscopie.

L'effet Doppler trouve de nombreuses applications en astrophysique. Le problème, c'est que les échelles de distance et de vitesses mises en jeu mettent en défaut l'hypothèse classique utilisée dans la première partie. Il faut prendre en compte les effets relativistes pour exprimer le décalage en fréquence.

2 Effet Doppler relativiste

2.1 Présentation du phénomène

Rappels

On peut montrer que les postulats de la relativité restreinte (couplés à l'homogénéité de l'espace-temps), impliquent l'invariance de l'intervalle d'espace temps entre deux évènements par changement de référentiel entre deux référentiels galiléens :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \overrightarrow{\mathbf{r}}^2$$

Ce n'est donc plus la durée qui est conservée par changement de référentiel comme le supposait la mécanique galiléenne.

Les transformations entre référentiels qui respectent cette contrainte sont appelées transformations de Lorentz et sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une vitesse selon l'axe $\vec{e}_x$ avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et } \beta = \frac{v}{c}$$

On peut notamment montrer grâce à ce résultat qu'un intervalle de temps entre deux évènement mesuré dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ ne connera pas le même résultat, et que les deux valeurs seront données par

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Il faut donc prendre en compte cette modification, au moment où on calcule le temps entre les "bip".

Dans le cas où les vitesses sont relativistes, c'est-à-dire non négligeables devant c, on doit utiliser la formule relativiste. II s'agit de la formule précédente multipliée par le facteur relativiste γ défini par

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v_s/r/c)^2}} \geq 1$$

On écrira donc Formule Doppler-Fizeau

$$\nu' = \gamma \nu_0 \left(1 + \frac{\vec{v}_{s/r} \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

Cependant, à la différence de l'effet Doppler classique, on observe aussi un décalage si la source se déplace perpendiculairement à l'axe entre elle et le récepteur, car la dilatation du temps ne dépend pas d'une quelconque direction. Il faut toujours multiplier par γ la durée entre les bips. On aura dans ce cas-là

$$\nu' = \gamma \nu_0 > \nu_0$$

Il y a apparition d'un effet Doppler transversal, qui n'a pas d'équivalent classique.

Évaluons les décalages temporels des impulsions utilisées par le GPS induits par l'effet Doppler classique et relativiste

2.2 Correction au GPS

Dans un GPS, la localisation s'opère en comparant les horloges au sol et dans le satellite. Pour cela on suppose que ces horloges sont identiques et utilisent la même fréquence de référence. On veux savoir ce que modifie l'effet Doppler. On considère un sattelite GPS au dessus d'un récepteur.

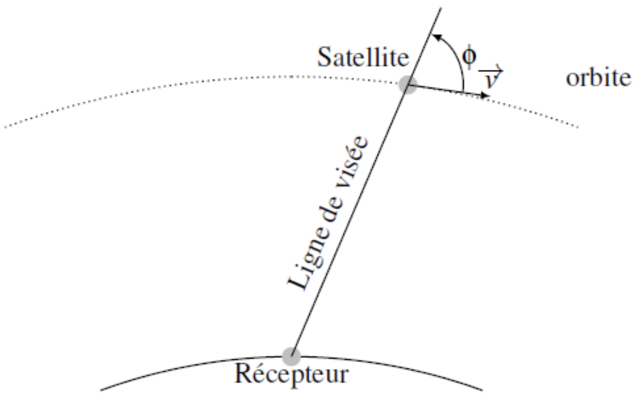


Figure 2 – Schéma de principe

Si on considère un temps de mesure de 1s pour le GPS, l'erreur induite par effet Doppler sur la mesure de temps de propagation s'écrit :

$$\delta t_{er} = \frac{\Delta\nu}{\nu} t_{mes}$$
$$\delta t_{er} = \frac{v}{c}\cos(\phi) t_{mes} = 3.1 \times 10^{-6} \text{ s}$$
$$\phi_{\mathrm{H}} = \arccos \frac{R_0}{R_0 + h_c} = 1,3285\text{rad}$$

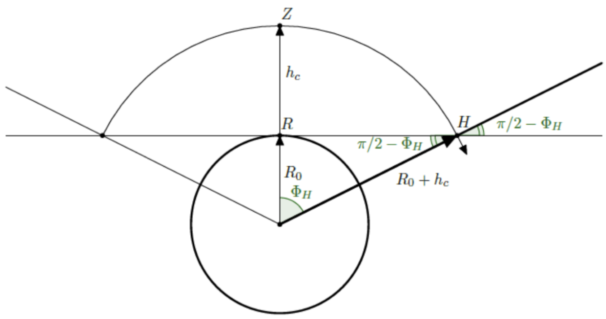


Figure 3 – Angle induisant l'erreur maximale

avec : $v = 3874.6$ m/s et $c = 299792458$ m/s et $\cos(\phi) = \frac{R_0}{R_0+h_c} = 0.24$. Cela est énorme, en effet une erreur δt sur le temps entraîne une erreur $\delta l = c\delta t = 929$ m ce qui est énorme. On peut commparer à ce qu'on obtient en prenant en compte les effets relativiste :

$$\frac{\Delta\nu_{RR}}{\nu} = \sqrt{1-\beta^2} - 1$$

On en déduit

$$\delta t_{er} = \left(\sqrt{1-\beta^2} - 1\right) t_{mes} = 8.35 \times 10^{-11} \text{ s}$$

C'est beaucoup plus petit et sa prise en compte permet de réduire une erreur de l'ordre de $\delta l = c\delta t = 2.5$ cm. Enfin on peut évoquer le fait qu'on pourrait également corriger les effet de la relativité générale (la gravité agit comme une accélération à prendre en compte dans les calculs) qui donne une erreur de l'ordre de 15 cm

Conclusion

Doppler (refroidissement atomes)