

LP2020 – NON LINÉARITÉS : APPLICATIONS

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Bibliographie

♣ *Non Linear Dynamics and Chaos*, **Strogatz**

♣ *Physique des Solitons*, **Peyrard - Dauxois**

Prérequis

- Mécanique du point
- Portraits de phase, espaces de phases pour les systèmes non linéaires.
- Physique Ondulatoire : propagation et dispersion

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Enrichissement spectral | 2 |
| 1.1 | Retour au pendule simple | 2 |
| 1.2 | Effet spectral de la non-linéarité | 3 |
| 2 | Cycles limites | 4 |
| 2.1 | Théorème de Poincaré-Bendixson | 5 |
| 2.2 | Modélisation des processus de glycolyse | 5 |
| 3 | Solitons | 8 |
| 3.1 | Description du phénomène | 8 |
| 3.2 | Equation de KdV | 9 |
| 3.3 | Solutions solitons | 10 |

Remarques

Sous cette forme, il ne me paraît pas judicieux de se limiter aux oscillateurs sinon le changement de titre n'a pas de sens. Ça peut être chouette de parler des solitons mais bon c'est pas non plus du gâteau. Applications semble vouloir dire qu'on veut des exemples concrets, on veut pas refaire la théorie de linéarisation du non linéaire ici. Bon les solitons ça peut se faire pas trop mal avec l'équation de KdV et interprétation de chaque terme. Moi ce que je propose c'est de pas refaire le VdP parce que bon c'est chiant et comme application bon bof, mais de faire la réaction chimique oscillante à la place. Après c'est interchangeable si on se sent plus à l'aise avec le VdP, ce qu'on va faire c'est juste la "construction" du cycle. A la limite je peux rédiger les deux ça peut pas faire de mal et ça me fera réviser VdP. Pour débiter on peut y aller en douceur avec le pendule simple et l'enrichissement spectral (à présenter comme effet de la non-linéarité), ça permet éventuellement d'ouvrir sur la génération de second harmonique en optique. Ensuite on fait les cycles limites (pas de bifurcation, c'est bcp de formalisme pour pas grand chose ici et c'est pas propre aux systèmes non linéaires) avec le cycle de Krebs ou le VdP puis on finit par les solitons et l'équations de KdV. La répartition devrait être à peu près équitable entre les trois parties, présenté sous forme d'effets, le titre c'est les applications de la non-linéarité pas la non-linéarité.

Introduction

La physique se veut de comprendre et d'expliquer des phénomènes naturels divers et variés. Leur complexité pousse le physicien à en établir une description simplifiée par le moyen d'approximations justifiées et justifiables qui, bien souvent, permettent de linéariser les équations associées pour en permettre la résolution analytique. C'est par exemple par la linéarisation que nous avons pu faire naître la théorie des ondes acoustiques ou encore l'étude du pendule simple aux faibles amplitudes. Toutefois, si ce procédé peut s'avérer extrêmement utile, il occulte des phénomènes qui prennent une place centrale dans certains systèmes. Dans cette leçon, je vous propose de poursuivre notre étude des phénomènes non-linéaires pour en présenter quelques effets centraux.

↓ Revenons tout d'abord au premier cas d'école de la linéarisation : les oscillations du pendule simple

1 Enrichissement spectral

↪ LP49

1.1 Retour au pendule simple

On considère un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable attaché à un point O et portant un point matériel de masse m . On propose de retrouver l'équation bien connue régissant les oscillations de ce système par une approche énergétique.

Le poids étant la seule force qui travaille, on a :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

par conservation de l'énergie mécanique du système on a alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (2)$$

L'approche que vous avez alors vue jusqu'à présent consiste à faire l'hypothèse des petits angles de telle manière à pouvoir linéariser le sinus. Dans ces cas là, l'équation du mouvement devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (3)$$

et ses solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4)$$

On a donc un système oscillant à une fréquence donnée, indépendante des conditions initiales imposées au système. On appelle cette propriété l'**isochronisme**.

Si l'on reprend l'équation différentielle linéarisée et que l'on multiplie ses deux membres par $\dot{\theta}$ puis qu'on les intègre, on obtient une intégrale première du mouvement ¹ :

$$\frac{\dot{\theta}}{C_0} + \frac{\omega_0^2 \theta}{C_0} = 1 \quad (5)$$

avec C_0 une constante dépendant des conditions initiales. Dans l'espace des phases de ce système $(\theta, \dot{\theta})$ la trajectoire du pendule est une ellipse dans l'amplitude dépend des conditions initiales mais dont la période en est indépendante. On peut vérifier cela expérimentalement assez rapidement :

Pendule simple aux petits angles



On utilise le pendule grand angle que l'on relie à Latis-Pro. On fait une acquisition aux petits angles. On montre le signal temporel, le portrait de phase puis la transformée de Fourier.

↓ Mais qu'advient-il de ces propriétés si l'on accepte de laisser plus d'amplitude au système, si l'on laisse place aux non-linéarités ?

1.2 Effet spectral de la non-linéarité

Ce que nous allons voir maintenant c'est que la non-linéarité permet un enrichissement spectral avec l'apparition de nouvelles fréquences et notamment une perte d'isochronisme. Pour l'appréhender, il faut repartir de l'équation différentielle établie avant linéarisation :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (6)$$

on ne sait pas résoudre cette équation analytiquement mais si l'on veut comprendre les effets de la non linéarité induite par le sinus on peut toujours commencer par développer. On se limitera ici à l'étude des mouvements faiblement non linéaires et on se restreint donc simplement à l'ordre suivant :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad (7)$$

L'apparition de ce terme cubique nous pousse alors à chercher des solutions sous la forme ² :

$$\theta(t) = \theta_m (\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)) \quad (8)$$

En injectant alors ce type de solution dans l'équation différentielle précédente et en se limitant à l'ordre 0 en ϵ on obtient :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_m^2 \right) \quad (9)$$

si on ré-écrit cette équation en termes de périodes et que l'on développe au second ordre, on obtient alors la formule plus connue dite de Borda ³ :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 \right) \quad (10)$$

On remarque alors qu'on a ici une perte d'isochronisme : la période du mouvement dépend des conditions initiales. On peut mettre en évidence cet effet et l'effet postulé de l'enrichissement spectral en ré-utilisant le même pendule que précédemment mais en le lançant cette fois depuis de plus grands angles.



Pendule simple non linéaire



Faire de même que précédemment. Montrer d'abord que l'on n'a plus une ellipse sur le portrait de phase puis que l'on retrouve deux pics fréquentiels dans la TF.

Ce phénomène d'enrichissement spectral du fait des non-linéarités ne s'applique pas que dans la physique du pendule simple mais aussi dans beaucoup d'autres domaines. On peut notamment citer la génération de second harmonique en optique. Dans cette situation, c'est le potentiel créé par les noyaux sur les électrons du solide qui présente un terme anharmonique (cubique) non négligeable et qui a pour effet d'émettre une fréquence double de la fréquence excitatrice. C'est d'ailleurs de cette manière que beaucoup de pointeurs laser vert sont conçus : ce sont des lasers rouges initialement dont on ne récupère que la composante harmonique doublée.

↓ *Les non linéarités modifient donc les comportements ondulatoires mais permettent aussi de les faire naître parfois. C'est ce que nous allons étudier ici avec un exemple concret de réaction chimique.*

2 Cycles limites

↪ Strogatz

Nous avons déjà étudié la dynamique d'un système complexe à travers l'étude qualitative de son portrait de phase, de ses points fixes, comme avec l'exemple de l'équation logistique des populations. Dans tous les cas où nous nous sommes placés jusqu'à présent, le régime permanent du système correspondait à l'arrêt, asymptotique ou non, sur un point fixe. Ce que l'on va montrer aujourd'hui c'est que les non-linéarités permettent d'obtenir de nouveaux régimes permanents : les cycles limites. Vous pourriez objecter en me disant que dans le portrait de phase linéaire du pendule on observait déjà des trajectoires fermées mais ces dernières ne sont en fait pas des cycles limites.

En effet, un cycle limite est une trajectoire fermée et isolée. Isolée signifie que les trajectoires voisines ne le sont pas. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, toutes les trajectoires autour de l'ellipse concernée sont aussi fermées, cette trajectoire n'est donc pas isolée et n'est donc pas un cycle limite. Les cycles limites, comme les points fixes, peuvent être stables si toutes les trajectoires voisines s'en approchent et instables sinon.

Les cycles limites stables sont très importants dans la description de nombreux phénomènes qui nous entourent puisqu'ils représentent tous les phénomènes d'oscillation auto-entretenue i.e. non résultants d'un forçage périodique. On peut notamment citer les battements du coeur comme exemple incontournable. A la différence des trajectoires fermées dans les systèmes linéaires dont l'amplitude est déterminée par les conditions initiales comme dans le cas du pendule simple, l'amplitude des cycles limites est imposée par la structure du système lui-même.

↓ *Je vais alors vous donner un outil pour déterminer l'existence d'un cycle limite dans un problème de dynamique non-linéaire.*

1. En réalité on avait déjà l'intégrale première avec l'approche énergétique mais ça permet de présenter la méthode
2. Méthode de Lindstedt-Poincaré
3. Bon jvpm je trouve que cette méthode pue un peu du cul pck on montre rien mais bon on va pas faire des intégrales elliptiques



2.1 Théorème de Poincaré-Bendixson

Une méthode pour prouver qu'un système admet un cycle limite est d'utiliser le théorème de Poincaré-Bendixson. Positionnons dans l'étude d'un système non linéaire décrit dans l'espace des phases par l'équation :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (11)$$

Le théorème de Poincaré-Bendixson affirme alors que si une trajectoire est confinée dans un région fermée et bornée du plan de phase qui ne contient pas de points fixes alors cette trajectoire est ou finira par être fermée. Attention, ce théorème n'est valable qu'en dimension 2, c'est à dire dans le plan de phase!⁴. Pour prouver l'existence d'un cycle limite il faut alors pouvoir montrer l'existence d'une telle région de piège ne contenant aucun point fixe.



Essayons d'appliquer cela à un système concret.

2.2 Modélisation des processus de glycolyse

Une alternative est le Van Der Pol mais il ne permet pas une telle application du théorème de Poincaré Bendixson

La glycolyse est un processus fondamental de la biochimie qui explique comment les organismes vivants acquiert leur énergie grâce aux sucres. Dans beaucoup de systèmes biologiques comme les levures ou les cellules musculaires, il a été observé un comportement oscillant de la glycolyse en ça que les concentrations des différents intermédiaires réactionnels fluctuent de manière périodique.

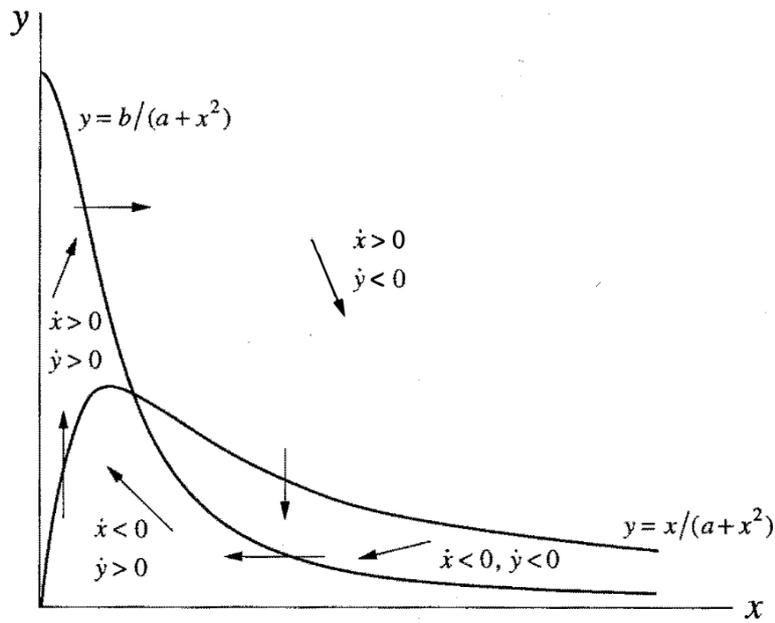
Une modélisation simple de ce processus a alors été proposée par Selkov en 1968 dont les équations sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + ay + x^2y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2y \end{aligned} \quad (12)$$

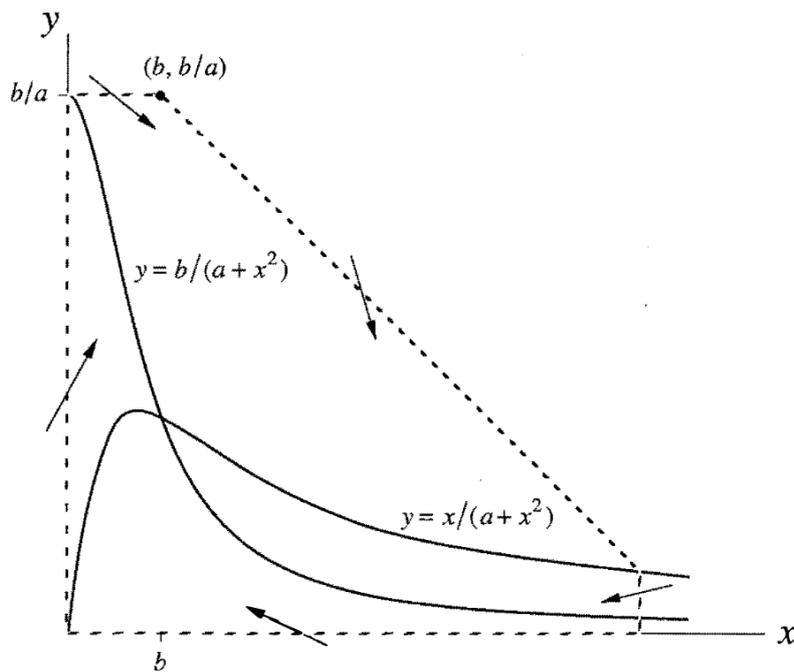
avec x la concentration en adénosine diphosphate (ADP) et y la concentration en fructose-6-phosphate (F6P), deux intermédiaires réactionnels importants du cycle biochimique. a et b sont des paramètres cinétiques positifs. L'observation expérimentale suggère une oscillation permanente de ces concentrations et sous-tend donc l'existence d'un cycle limite. Essayons de le prouver.

La première étape pour étudier qualitativement le comportement du système, comme on l'a déjà vu, c'est de tracer les nullclines dans le plan de phase. Ici on obtient les allures suivantes :

4. Ouverture possible en parlant du chaos en dimension 3 lors de la conclusion



on peut alors y tracer les directions des vecteurs d'évolution dans les différents domaines. Considérons alors la région délimitée ici en pointillés :



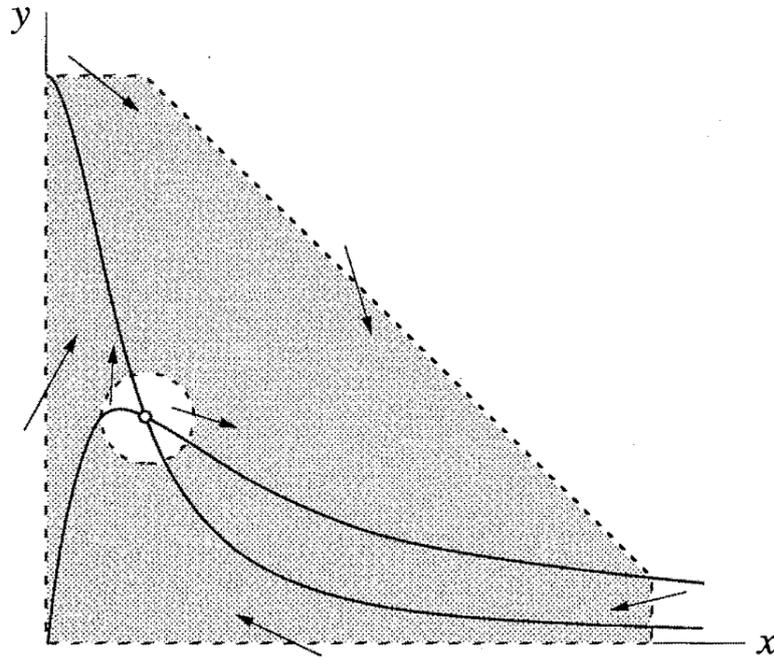
en voyant l'orientation des vecteurs d'évolution sur le bord de ce domaine il semble que l'on peut affirmer que c'est une région de piège des trajectoires. Montrons-le analytiquement, il suffit que les vecteurs d'évolution sur tout le contour du domaine pointe vers l'intérieur de ce domaine. Pour les bords verticaux et horizontaux il n'y a aucune ambiguïté possible, il suffit d'observer la position relative par rapport aux nullclines.

Pour le bord diagonal de pente -1, considérons la quantité :

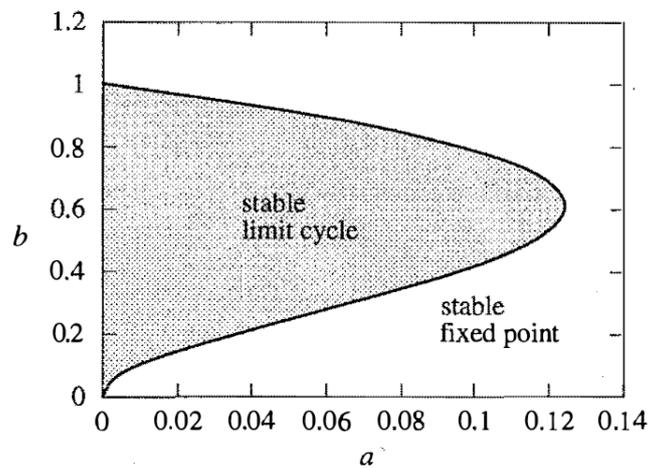
$$\begin{aligned} \dot{x} - (-\dot{y}) &= -x + ay + x^2y + (b - ay - x^2y) \\ &= b - x \end{aligned} \tag{13}$$

on remarque donc que dès lors que $x > b$ on a $-\dot{y} > \dot{x}$ et que donc le vecteur d'évolution pointe vers l'intérieur du domaine (pente plus forte que -1). La région en pointillés est donc bien une région de piège.

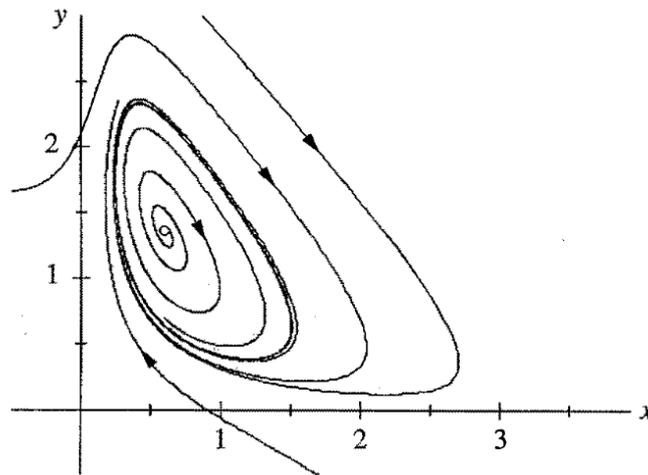
La seconde condition à vérifier est donc que cette région ne contient pas de points fixes. Mais il y en a un à l'intersection des deux nullclines! Tout n'est pas perdu cependant, si ce point s'avère être instable alors on peut modifier la région de piège de la manière suivante pour qu'on puisse y appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson. En effet, si le point fixe est instable alors toutes les trajectoires qui en émanent pointeront vers l'intérieur du domaine.



Par une analyse du point fixe comme on a pu le faire précédemment, on peut montrer que celui est instable pour un certain domaine de valeurs des paramètres (a,b) :



Dans ce domaine de paramètres on peut donc appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson : il existe bien un cycle limite qui semble pouvoir expliquer les observations expérimentales! Numériquement, on peut simuler l'évolution du système et observer effectivement ce cycle limite :

FIGURE 1 – $a = 0.08$ et $b = 0.6$

Plus généralement, on peut observer les réactions oscillantes irl : <https://www.youtube.com/watch?v=kW9wF-GNjqs>

Les non-linéarités permettent donc l'existence d'oscillations auto-entretenues retrouvées dans de nombreux phénomènes naturels. Cet effet des non-linéarités comme apparition de nouvelles formes de solutions dynamiques n'est pas isolé, c'est un phénomène que l'on retrouve notamment dans les phénomènes ondulatoires faiblement non-linéaires avec les solitons.

3 Solitons

➤ Physique des solitons - Chapitre 1

3.1 Description du phénomène

La toute première observation d'un soliton est celle que fit l'ingénieur hydrodynamicien John Scott Russell en 1834 alors qu'il se promenait à cheval le long d'un canal près d'Édimbourg. Lorsqu'une péniche s'arrêta brusquement, il fut surpris par la vision de ce qu'il appela « la grande onde solitaire », qu'il suivit pendant plusieurs kilomètres avant de la perdre dans les méandres du canal. Il observa en fait une déformation de la surface de l'eau localisée qui se déplaçait à vitesse constante et sans déformation. Depuis ce jour, Russell s'est attaché à reproduire ce phénomène naturel. Finalement voici les trois observations qu'il en a fait :

- Une excitation initiale produit une onde solitaire.
- Ces ondes solitaires se propagent alors à une vitesse supérieure à celle des ondes habituelles $c = \sqrt{gh}$, l'écart à cette vitesse étant proportionnel à la hauteur de la vague. On a donc une propagation avec une vitesse de la forme $c = \sqrt{gh} + A\eta$
- Ces ondes garde leur profil tout au long de leur propagation.

Aujourd'hui on sait très bien le faire : https://www.youtube.com/watch?v=T-1EDV8qq7k&ab_channel=StephenMorris.

Mais alors qu'est-ce qu'un soliton ? Un soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer. Ce phénomène est présent en hydrodynamique mais aussi dans pleins d'autres domaines comme dans les neurones ou dans les vaisseaux sanguins. Mais alors comment les expliquer ? Et surtout quel est le rapport avec les non linéarités ? C'est ce que nous allons voir ici.

3.2 Equation de KdV

Essayons de décrire le phénomène hydrodynamique observé par Russell. En écrivant les équations d'Euler pour le fluide (supposé incompressible et non visqueux), les conditions aux limites au fond, à la surface, et, en supposant que l'écoulement est irrotationnel, on peut parvenir à l'équation de Korteweg de Vries, valable dans le cas faiblement non-linéaire :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

où $c_0 = \sqrt{gh}$ est la vitesse de propagation des ondes linéaires dans la limite des grandes longueurs d'onde, h la profondeur, et η la hauteur de la surface de liquide au-dessus de son niveau d'équilibre. En passant dans le repère mobile à la vitesse c_0 , c'est-à-dire en effectuant la transformation $X = x - c_0 t$ et $T = t$, il est possible d'éliminer le second terme et l'équation devient

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} = 0$$

Enfin, en introduisant des variables adimensionnées bien choisies ($\phi = \eta/h$, $\xi = X/X_0$ et $\tau = T/T_0$ où X_0 est une longueur et T_0 un temps), on peut mettre cette équation sous sa forme standard :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0$$

Cette équation a une forme très générale qui fait qu'elle s'applique à de nombreux domaines et phénomènes physiques. Ainsi, l'étude que l'on va en faire ne s'arrête pas qu'à l'observation de Russell et des mascarets.

Essayons de décomposer cette équation en deux sous-équations pour interpréter le rôle des deux termes de dérivée spatiale. Commençons par le premier terme non linéaire. Cela correspond à une équation du type :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (14)$$

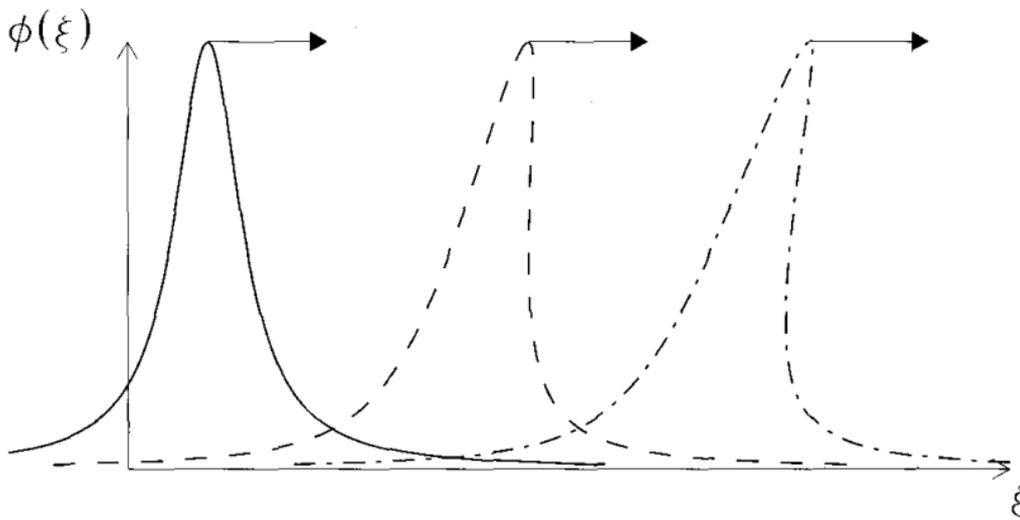
Cette équation est une équation d'onde linéaire dont les solutions sont de la forme :

$$\phi = f(\xi - v\tau) \quad (15)$$

On a donc des solutions se propageant à une vitesse constante v . Si l'on transpose à la forme non-linéaire réelle intervenant dans l'équation de KdV :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

On a par analogie des solutions se propageant à une vitesse v dépendante de l'amplitude de la perturbation. en assimilant le coefficient de $\partial \phi / \partial \xi$ à la vitesse de propagation de l'onde, il est facile de se convaincre qu'en première approximation, chaque portion du signal se propage à la vitesse ϕ . Les portions correspondant aux grandes valeurs de ϕ vont par conséquent avoir tendance à se propager plus vite que les portions de plus faible amplitude. Le terme non-linéaire tend donc à une localisation de l'excitation si bien que l'on finit par avoir une discontinuité du profil : on parle alors d'onde de choc.



Considérons maintenant le second terme linéaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (17)$$

Elle admet comme solution les ondes planes du type $\phi = Ae^{i(q\xi - \omega\tau)}$ à la condition que la pulsation ω et le nombre d'onde q soient reliés par la relation de dispersion $\omega = -q^3$. Le relation de dispersion n'étant pas linéaire, ce terme est donc dispersif et implique lui un étalement de l'excitation au cours de la propagation comme vous le savez. On a donc un effet inverse par rapport au premier terme.

C'est là alors l'effet soliton : le terme non-linéaire qui a tendance à localiser la perturbation entre en compétition avec le terme dispersif qui a tendance à étaler la perturbation. Comme on l'a vu, l'étalement dispersif étant d'autant plus grand que l'excitation est étroite donc on va atteindre un régime d'équilibre stable : pour une excitation trop resserrée le terme dispersif linéaire domine et donc l'excitation s'étale jusqu'à atteindre un équilibre avec l'effet de localisation du phénomène non-linéaire, pour une excitation trop étalée c'est le terme non-linéaire qui domine et donc on a relocalisation de l'excitation jusqu'à ce que cet effet soit exactement compensé par la dispersion. Cette notion d'équilibre stable explique pourquoi ce phénomène anodin est visible dans la nature : il est particulièrement stable, il résiste à la plupart des perturbations extérieures.

↓ Si cette approche "avec les mains" de l'équation de KdV permet d'expliquer le maintien du profil d'une excitation, nous ne retrouvons pas le caractère supersonique de ces solutions. Pour ça il va falloir faire un peu de calculs

3.3 Solutions solitons

Trouvons les solutions qui se propagent avec une vitesse v sans se déformer, c'est-à-dire des solutions du type $\phi(\xi, \tau) = \phi(\xi - v\tau)$. En introduisant, la nouvelle variable $z = \xi - v\tau$, l'équation de KdV s'écrit

$$-v\phi_z + 6\phi\phi_z + \phi_{zzz} = 0$$

(où l'on a noté par un indice une dérivation par rapport à une variable, $\phi_z = \partial\phi/\partial z$), soit

$$\frac{d}{dz} (-v\phi + 3\phi^2 + \phi_{zz}) = 0$$

d'où

$$\phi_{zz} + 3\phi^2 - v\phi + c_1 = 0$$

où c_1 est une constante d'intégration. En multipliant par ϕ_z et en intégrant une seconde fois par rapport à z , on obtient

$$\frac{1}{2}\phi_z^2 + \phi^3 - \frac{1}{2}v\phi^2 + c_1\phi = c_2$$

où c_2 est une seconde constante d'intégration. Cette équation est formellement analogue à l'équation exprimant la conservation de l'énergie d'une particule de masse unité, dont la position serait repérée par ϕ , le temps noté z , et qui serait soumise à un potentiel

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \phi^3 - \frac{1}{2}v\phi^2 + c_1\phi$$

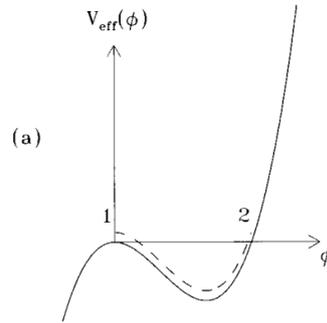
L'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2}\phi_z^2 + V_{\text{eff}}(\phi) = c_2$$

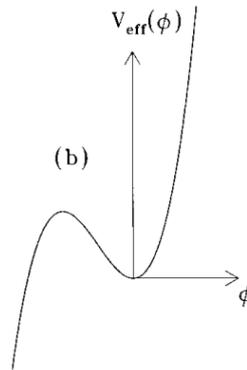
Cette approche faisant intervenir un « pseudo-potentiel » permet d'identifier facilement, à partir de notre expérience de la mécanique, pour quelles valeurs de la vitesse v et des constantes c_1 et c_2 on peut obtenir des solutions bornées en ϕ , i.e. des excitations de la surface de l'eau qui ne divergent pas.

Considérons une particule partant à l'instant initial $z = -\infty$ de la position 1 correspondant à $\phi = 0$. Le système étant hamiltonien et z correspondant au pseudo-temps, le mouvement se fera à pseudo-énergie constante. Il est clair que, si la particule part du côté négatif, on aura une divergence de ϕ , ce qui est évidemment impossible puisque l'on ne considère que les solutions bornées : il n'existe donc pas de solutions solitons de l'équation de KdV avec des valeurs négatives pour ϕ (des dépressions).

Au contraire, si la particule part du côté positif, elle ira jusqu'au point 2, où ϕ_z s'annulera : elle rebrousse alors chemin pour revenir au point 1 lorsque z tendra vers l'infini. Cette solution correspond par conséquent à la croissance, puis à la décroissance, de la solution soliton de l'équation de KdV.



dans le cas où v est prise négative, l'allure du potentiel est la suivante :



On a donc aucune solution bornée possible partant de l'état d'équilibre. Les solutions solitons hydrodynamiques sont donc bien supersoniques !

On peut éventuellement déterminer l'expression complète de la solution supersonique en intégrant

$$dz = \frac{d\phi}{\sqrt{v\phi^2 - 2\phi^3}}$$

à l'aide du changement de variable $\phi = (v \operatorname{sech}^2 u) / 2$. On obtient alors la solution

$$\phi = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{v}{4}} z \right)$$

$$\phi = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{v}{4}} (\xi - v\tau) \right)$$

$$\phi = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{v}{4}} (\xi - v\tau) \right)$$

Bon c'est trop et on tombera jamais dessus + on a déjà d'autres baills pour les non-linéarités. Bisous.

Conclusion