LP2 – Gravitation

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

Prérequis

- Modèle des constantes réparties du câble coaxial
- Ondes acoustiques dans les fluides

Bibliographie

✍ *Poly cours Ondes*, **Jérémy**
✍ *Précis Physique des ondes PC-PSI*,**Bréal** p 75 pour les instruments de musique
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Antenne_radioélectrique#Impédance_d'antenne
✍ https://www.chireux.fr/mp/cours/Polys/5-adaptation_impedance.pdf
✍ http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M14_G01/co/Contenu_M4.html
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Adaptateur_d%27antenne?fbclid=IwAR2-_fTpNW2owKAyw_C-7otN0D09ek0F30B04RzZtCyP7hadthL2PmPDuws

Table des matières

1 Notion d'impédance **2**
1.1 Relation de structure d'une onde plane . . . 2
1.2 Condition limite : impédance terminale . . . 3
1.3 Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux . . . 5

2 Exemple d'adaptation d'impédance en électricité : l'adapteur d'antenne **6**
2.1 Position du problème . . . 6
2.2 Dispositif d'adaptation . . . 6
2.3 Réalisation pratique . . . 7

3 Exemple d'impédance en acoustique : instruments de musique et pavillon exponentiel **7**
3.1 Impédance acoustique . . . 7

Remarques sur les leçons précédentes

Yen a pas hehe. Comme le titre est hyper spécifique, je pense que le but c'est de faire une prem!ère partie de rappels/définition pour arriver à écrire ce qu'est l'adaptation d'impédance, et ensuite de faire des applications : je propose une application acoustique (instruments de musique/pavillon exponentiel) et une application en électricité (peut être l'adaptation d'impédance entre cable coax et antenne, cable coax simple ça me paraît trop basique mais bon on s'en servira pour faire des petites expériences. A la reflexion virer la sous-partie impédance terminale c juste un cas particulier de ce qui suit et ça prend 3 plombes (ou pas en fait puisque ça correspond au cas de l'adapteur d'antenne...) En fait vaut peut etre mieux mettre l'adapteur d'antenne direct après impédance terminale et le pavillon après interface entre deux milieux...

1 Notion d'impédance

Là en gros on va se baser sur le cours de Jérémy

1.1 Relation de structure d'une onde plane

Une onde c'est deux grandeurs couplées par des équations aux dérivées partielles. Dans le cas d'ondes planes le couplage est particulier.

Commençons par le cas le plus simple où les deux grandeurs couplées sont scalaires et prenons l'exemple du câble coaxial avec le modèle des constantes réparties. Si on envoie une onde plane progressive de la forme :

$$i(x,t) = f(x - ct)$$

Cherchons alors la tension $u(x,t)$ pour une telle onde. Injectons cette solution dans l'équation de couplage issue de la loi des mailles :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c f'(x - ct)$$

L'intégration par rapport à l'espace donne :

$$u(x,t) = \Lambda c f(x - ct) + \phi(t)$$

où $\phi(t)$ est une fonction du temps seulement. Le fait que u et f soient des solutions de l'équation de d'Alembert impose par linéarité de l'équation que $\phi(t)$ d'être solution également. Comme ϕ ne dépend que du temps, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

Par conséquent, $\phi(t)$ est une fonction affine. Si la pente est non-nulle, cela conduit à une divergence non physique en $t \to \pm\infty$. La seule possibilité est donc que ϕ soit une fonction constante, ne décrivant pas une onde. On ne prendra donc pas en compte cette fonction par la suite. La constante en question n'est pas forcément nulle pour autant : dans le cas des ondes acoustiques dans les fluides, le champ de surpression $p_1(x,t)$ s'ajoute à la pression p_0 préexistant dans le fluide au repos. Ainsi on a :

$$u(x,t) = Zi(x,t) \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

C'est la relation de structure de l'onde plane progressive se déplaçant dans le sens des x croissants dans le câble coaxial. Si on avait considéré une onde plane progressive se déplaçant dans le sens des x décroissants, soit $i(x,t) = g(x + ct)$, le calcul aurait conduit à

$$u(x,t) = -Zi(x,t)$$

La relation de structure d'une onde plane progressive scalaire est une relation de proportionnalité. L. coefficient de proportionnalité Z est appelé impédance propagative du milieu. L'impédance ne dépend que du milieu de propagation et en aucun cas du type d'onde qu'on veut propager à l'intérieur. Dans le cas d'une propagation dispersive, l'impédance propagative peut aussi dépendre de la fréquence, mai. seulement au travers de la fonction de réponse du milieu.

Ordres de grandeur : Pour le câble coaxial considéré au début du chapitre, on trouve $Z = 50\Omega$, ce qui ne correspond pas à la résistance du câble. Cette valeur est en revanche intimement reliée à celle de l'impédance de sortie d'un GBF, qui vaut aussi 50Ω afin de permettre la bonne transmission du signal entre le GBF et le câble.

Nous venons de traiter un cas particulier d'une propagation d'une onde mais dans le cas général nous avons encore :

$$i(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$
$$u(x,t) = Z[f(x - ct) - g(x + ct)]$$

Les grandeurs couplées ne sont donc proportionnelles que dans le cas d'une onde plane progressive, mais même dans le cas général d'une onde plane le seul paramètre intervenant dans la relation de structure est l'impédance propagative. Ainsi, la célérité et l'impédance d'un milieu caractérisent intégralement le couplage entre grandeurs couplées. En effet, ce dernier est donné par deux équations aux dérivées partielles, les équations couplées, faisant intervenir deux constantes de couplage.

Vitesse et impédance déterminent entièrement le couplage entre les deux grandeurs.

Cette grandeur caractéristique du milieu permet d'étudier le comportement d'une onde plane à l'interface entre deux milieux différents.

1.2 Condition limite : impédance terminale

Considérons le câble coaxial défini précédemment dans le modèle électrocinétique. Au bout du câble coaxial, il est possible de mettre une impédance (en pratique une résistance) en bout de ligne.

Deux cas limites peuvent être distingués :

- en plaçant un fil en sortie reliant l'âme et la gaine, l'impédance en bout de ligne est nulle. Si on prend une ligne de longueur L commençant en $x = 0$ alors on a $v(x_0, t) = Z(x_0)\, i(x_0, t) = 0$. Ainsi, la tension en nulle en bout de ligne.
- À l'opposé si on laisse ouvert la ligne en sortie alors l'impédance de sortie est infinie. Ainsi l'intensité en sortie est nécessairement nulle $i(x_0, t) = 0$.

En général, la relation entre la tension et l'intensité aux bornes du dipôle ne peut être écrite sous la forme $v(x_0, t) = Zi(x_0, t)$. Si nous supposons que l'intensité et la différence de potentiel sont des fonctions sinusoidales du temps de pulsation ω nous utiliserons la notation complexe ; nous pouvons alors définir l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle, grandeur complexe en fonction de ω.

Nous nous placerons dans la suite de ce paragraphe en notation complexe. La condition à la limite en x_0 s'écrit alors

$$\underline{v}(x_0, t) = \underline{Zi}(x_0, t)$$

Un signal physique quelconque peut être décomposé en superposition de fonctions sinusoïdales. La linéarité de l'équation de d'Alembert et des relations aux dérivées partielles entre $v(x, t)$ et $i(x, t)$ assure que la réflexion d'un signal physique quelconque peut être analysée par superposition des réponses correspondant aux différentes pulsations ω contenues dans l'onde incidente. L'étude de l'onde réfléchie pour une onde incidente progressive sinusoïdale de pulsation ω donnée est donc fondamentale.

Détermination de l'onde réfléchie

Considérons une onde progressive se propageant suivant les x croissants, pour laquelle $v_i(x, t) = Z_c i_i(x, t)$ avec Z_c l'impédance caractéristique de la ligne. Si elle rencontre une terminaison d'impédance Z placée en x_0, elle ne peut satisfaire la condition aux limites en $x = x_0$ sauf dans le cas particulier $z = Z_c$. Nous devons donc envisager comme dans l'expérience de la corde, l'existence d'une onde réfléchie.

L'onde incidente étant supposée sinusoidale de pulsation ω nous adopterons la notation complexe. Dans la zone $x < x_0$ l'onde est alors la superposition de l'onde incidente se propageant dans le sens des x croissants

$$\begin{cases} i_i(x,t) & = \underline{I}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} = \underline{I}_i(x) e^{j\omega t} \\ v_i(x,t) = \underline{V}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} & = \underline{V}_i(x) e^{j\omega t} \end{cases}$$

avec $\underline{I}_i(x) = \underline{I}_{i0} e^{-jkx}$ et $\underline{V}_i(x) = \underline{V}_{i0} e^{-jkx}$ les amplitudes des ondes incidentes et on a

$$\underline{V}_i(x) = Z_c \underline{I}_i(x)$$

- de l'onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants

$$\begin{cases} i_r(x,t) & = \underline{I}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} = \underline{I}_r(x) e^{j\omega t} \\ v_r(x,t) = \underline{V}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} & = \underline{V}_r(x) e^{j\omega t} \end{cases}$$

avec $\underline{I}_r(x) = \underline{I}_{r0} e^{jkx}$ et $\underline{V}_r(x) = \underline{V}_{r0} e^{jkx}$ les amplitudes des ondes incidentes et on a $\underline{V}_r(x) = -Z_c \underline{I}_r(x)$

Ainsi, pour l'onde résultante on a

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{i}(x,t)=\underline{I}(x)e^{j\omega t}=i_i(x,t)+\underline{i}_r(x,t)=\left(\underline{I}_i(x)+\underline{I}_r(x)\right)e^{j\omega t}\\ \underline{v}(x,t)=\underline{V}(x)e^{j\omega t}=\underline{v}_i(x,t)+\underline{v}_r(x,t)=Z_c\left(\underline{I}_i(x)-\underline{I}_r(x)\right)e^{j\omega t}\end{array}\right.$$

où $\underline{I}(x)$ et $\underline{V}(x)$ sont les amplitudes complexes de l'onde résultante. Nous en déduisons les relations entre les amplitudes complexes des trois ondes

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{I}(x)=\underline{I}_i(x)+\underline{I}_r(x)\\ \underline{V}(x)=Z_c\left(\underline{I}_i(x)-\underline{I}_r(x)\right)\end{array}\right.$$

La condition à la limite $x=x_0, \underline{v}\left(x_0,t\right)=\underline{Z}\underline{i}\left(x_0,t\right)$ ou en utilisant les amplitudes complexes, $\underline{V}\left(x_0\right)=Z I\left(x_0\right)$ conduit à la relation

$$Z_c\left(\underline{I}_i\left(x_0\right)-\underline{I}_r\left(x_0\right)\right)=\underline{Z}\left(\underline{I}_i\left(x_0\right)+\underline{I}_r\left(x_0\right)\right)$$

ou

$$\left(Z_c-\underline{Z}\right)\underline{I}_i\left(x_0\right)=\left(Z_c+\underline{Z}\right)\underline{I}_r\left(x_0\right)$$

Coefficients de réflexion pour les amplitudes

Le coefficient de réflexion en amplitude, noté $\underline{\rho}$ est le rapport entre l'amplitude complexe de l'onde réfléchie et l'amplitude complexe de l'onde incidente au point où l'onde est réfléchie

Nous en déduisons des relations entre l'amplitude complexe de l'intensité et de la tension obtenues au paragraphe précédent les coefficients de réflexion pour l'intensité

$$\underline{\rho}_I=\frac{\underline{I}_r\left(x_0\right)}{\underline{I}_i\left(x_0\right)}=\frac{Z_c-\underline{Z}}{Z_c+\underline{Z}}$$

- la tension

$$\underline{\rho}_V=\frac{\underline{V}_r\left(x_0\right)}{\underline{V}_i\left(x_0\right)}=\frac{-Z_c\underline{I}_r\left(x_0\right)}{Z_c\underline{I}_i\left(x_0\right)}=-\underline{\rho}_I$$

Coefficient de réflexion énergétique

Les ondes étudiées ici sont sinusoidales, seules nous intéressent les puissances moyennes transférées de la gauches vers la droite pour l'onde incidente $\langle\mathcal{P}_i\rangle$ et pour l'onde réfléchie $\langle\mathcal{P}_r\rangle$ Le coefficient de réflexion énergétique, noté R est le rapport entre la puissance moyenne tran l'onde incidente et la puissance moyenne transférée par l'onde réfléchie en valeur absolue, soit

$$R=\left|\frac{\langle\mathcal{P}_r\rangle}{\langle\mathcal{P}_i\rangle}\right\rangle$$

(2.12 La puissance moyenne en notation complexe vaut $\langle\mathcal{P}\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\underline{V}\underline{I}^*\right)$. Et donc

$$\begin{array}{c}\langle\mathcal{P}_i\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\underline{V}_i\frac{I}{i^*}\right)=\frac{1}{2}Z_c\left|I_i\right|^2=\frac{1}{2}Z_c\left|\underline{I}_{i0}\right|^2\\ \langle\mathcal{P}_r\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\underline{V}_r\underline{I}_r^*\right)=-\frac{1}{2}Z_c\left|I_r\right|^2=-\frac{1}{2}Z_c\left|\underline{I}_r|\right|^2\end{array}$$

Nous en déduisons que $R=\left|\underline{\rho}_V\right|^2=\left|\underline{\rho}_I\right|^2$

Discussion des résultats

Nous pouvons prendre des cas particulier d'impédance de sortie Z.

- $Z=\infty$: l'extrémité de la ligne électrique est ouverte et donc

  $$\underline{\rho}_I=-\underline{\rho}_V=-1 \quad \text{et} \quad R=1$$

  La réflexion est totale car toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie.

- $Z=0$: l'extrémité de la ligne est en court-circuit. On trouve :

  $$\underline{\rho}_I=-\underline{\rho}_V=1 \quad \text{et} \quad R=1$$

  là encore la réflexion est totale.

- Z est imaginaire pur. Cela signifie que V et I sont en quadrature de phase. Une telle condition aux limites est facilement réalisable en électricité et ne dissipe pas d'énergie. Ici encore il y a encore réflexion totale $R=1$.

- $Z=Z_c$: dans ce cas, l'existence d'une onde réfléchie n'est pas nécessaire pour satisfaire la condition aux limites et donc on obtient $\underline{\rho}_I=-\underline{\rho}_V=0$ et $R=0$. Lorsque la ligne est fermée sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchie, la réflexion est nulle. Toute l'énergie de l'onde incidente est absorbée dans la terminaison. On dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

Illustration : câble coaxial

✍ ⏲

Si tout n'est pas réfléchi, alors une partie de l'énergie est transmise à l'impédance terminale. Que se passe-t-il à l'interface entre deux milieux d'impédances différentes ?

1.3 Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux

Considérons le cas d'une discontinuité de milieux, par exemple une jonction entre deux lignes différentes en électrocinétique. Si on considère une onde venant de la gauche de type f se propageant dans la ligne 1. arrivant sur la jonction, nous aurons la naissance d'une onde réfléchie dans la ligne 1 de type g et une onde transmise de type f vers la droite dans la ligne 2. Il n'est pas physique de considérer une onde allant vers la gauche dans la ligne 2. La jonction suffisamment petite pour la considérer comme ponctuelle. Il est alors possible d'écrire à la jonction, en $x = x_0$ que

- il y a continuité du courant car il n'y a pas d'accumulation de charges en l'absence de condensateur ou de résistance de fuite donc pour tout t
$$\underline{i}_1\left(x_0^-, t\right) = \underline{i}_2\left(x_0^+, t\right)$$
soit
$$\underline{I}_1\left(x_0^-\right) = \underline{I}_2\left(x_0^+\right)$$
- Continuité de la tension en $x = x_0$ en absence de liaison avec une inductance. Donc pour tout t
$$\underline{v}_1\left(x_0^-, t\right) = \underline{v}_2\left(x_0^+, t\right) \quad \text{soit} \quad \underline{V}_1\left(x_0^-\right) = \underline{V}_2\left(x_0^+\right)$$

Notons alors Z_{c1} et Z_{c2} les impédances caractéristiques des deux lignes, réelles et positives, ainsi que c_1 et c_2 les vitesses de propagation. Les deux conditions aux limites impliquent en $x = x_0$ que

$$\underline{I}_1\left(x_0^-\right) = \underline{I}_i\left(x_0\right) + \underline{I}_r\left(x_0\right) \quad ; \quad \underline{I}_2\left(x_0^+\right) = \underline{I}_t\left(x_0\right)$$

d'où

$$\underline{I}_i\left(x_0\right) + \underline{I}_r\left(x_0\right) = \underline{I}_t\left(x_0\right)$$

De plus $\underline{V}_1\left(x_0^-\right) = Z_{c1}\left(\underline{I}_i\left(x_0\right) - \underline{I}_r\left(x_0\right)\right)$

$$\underline{V}_2\left(x_0^+\right) = Z_{c2}\underline{I}_t\left(x_0\right)$$

'doù

$Z_{c1}\left(\underline{I}_i\left(x_0\right) - \underline{I}_r\left(x_0\right)\right) = Z_{c2}\underline{I}_t\left(x_0\right)$

Coefficients de réflexion et de transmission Le coefficient de transmission de la ligne 1 vers la ligne 2 , noté τ_{12}, est le rapport, à l'endroit où l'onde est transmise et réfléchie, entre l'amplitude de l'onde transmise $\underline{I}_t\left(x_0\right)$ ou $\underline{V}_t\left(x_0\right)$ et l'amplitude de l'onde incidente $\underline{I}_i\left(x_0\right)$ ou $\underline{V}_i\left(x_0\right)$. Le coefficient de réflexion, noté ρ_{12}, est le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie $\underline{I}_r\left(x_0\right)$ ou $\underline{V}_r\left(x_0\right)$ et l'amplitude de l'onde incidente $\underline{I}_i\left(x_0\right)$ ou $\underline{V}_i\left(x_0\right)$.

En introduisant les coefficient de réflexion et de transmission pour le courant, les deux équations précédentes conduisent à :

$$1 + \rho_{12} = \tau_{12} \quad \text{et} \quad Z_{c1}\left(1 - \rho_{12}\right) = Z_{c2}\tau_{12}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont de la forme :

$$\rho_{I12} = \frac{\underline{I}_r(x_0)}{\underline{I}_i(x_0)} = \frac{Z_{c1}-Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}} = -\rho_{V12}$$
$$\tau_{I12} = \frac{\underline{I}_t(x_0)}{\underline{I}_i(x_0)} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1}+Z_{c2}} = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\tau_{V12}$$

On peut alors montrer que les coefficients en énergie vérifient :

$$R = \left|\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}\right| = \left|\frac{-Z_{c1}}{Z_{c1}}\frac{\mathrm{Re}\left(\underline{I}_r\left(x_0\right)\underline{I}_r^*\left(x_0\right)\right)}{\mathrm{Re}\,\underline{I}_i\left(x_0\right)\underline{I}_i^*\left(x_0\right)}\right| = \frac{\underline{I}_r\left(x_0\right)\underline{I}_r^*\left(x_0\right)}{\underline{I}_i\left(x_0\right)I_i^*\left(x_0\right)} = \left(\frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}\right)^2$$

$$T = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| = \left| \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \frac{I_t(x_0) \underline{I}_t^*(x_0)}{\underline{I}_i(x_0) \underline{I}_i^*(x_0)} \right| = \frac{4Z_{c1}Z_{c2}}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}$$

On peut alors vérifier immédiatement que nous avons $R+T=1$ ce qu'il signifie que pour des lignes parfaites, il n'y a pas de perte d'énergie. On voit également que si on veut transmettre le maximum d'énergie (c'est-à-dire la totalité), il faut avoir $Z_{c1} = Z_{c2}$ pour avoir $R=0$ et $T=1$. On parle alors **d'adaptation d'impédance**.

2 Exemple d'adaptation d'impédance en électricité : l'adapteur d'antenne

2.1 Position du problème

Une antenne est un morceau de conducteur de longueur l avec des charges en mouvement. On peut la modéliser par un dipôle accéléré qui rayonne, et montrer qu'elle présente une résonnance à $l = \frac{n\lambda}{2}$. Le problème c'est que quand on transmet l'information, on peut s'arranger pour se trouver autour de la fréquence associée par modulation, mais on s'en écarte toujours un peu. L'impédance d'une telle antenne varie de quelques ohms à 2 MHz à quelques milliers d'ohms à 30 MHz. L'antenne fonctionne alors hors résonnance.

On peut modéliser une antenne par un dipôle d'impédance complexe $Z_a = R + jX$ où :

- $R = R_p + R_r$ où R_p modélise les pertes par effet joule dans l'antenne, et l'énergie dissipée dans R_r modélise l'énergie rayonnée par l'antenne. Elle est parfois qualifiée de fictive , car elle n'est pas soumise à la loi de Joule : en effet, la puissance absorbée par cette résistance est, à la différence d'une véritable résistance, transformée en rayonnement électromagnétique.
- X représente la variation d'impédance de l'antenne quand celle-ci fonctionne hors résonnance.

À la résonnance X est nul. Les constructeurs cherchent souvent à construire des antenne telles que $R = 50\,\Omega$ pour pouvoir les alimenter par une ligne de cette impédance caractéristique, mais hors résonnance la variation de l'impédance diminue le transfert d'énergie. Il faut donc rajouter un dispositif d'adaptation ou adapteur d'antenne pour remédier à celà et pouvoir transmettre le maximum du signal à l'antenne.

2.2 Dispositif d'adaptation

✍ site univ-lemans On recherche les conditions de transmission optimale de la puissance entre une ligne de transmission modélisée par un générateur en série avec une impédance Z_S et une antenne et son circuit d'adaptation, modélisés par une impédance Z_U.

$$I^* = E^* / (Z_S^* + Z_U^*)$$

$$V^* = E^* \cdot Z_U^* / (Z_S^* + Z^*U)$$

La puissance active est donc

$$P_A = \frac{1}{4}\left(v^* \cdot \bar{i}^* + \bar{v}^* \cdot i^*\right) \tag{1}$$

$$P_A = \frac{1}{4}E^2 \frac{Z_U^* + \bar{Z}_U}{(Z_S^* + Z_U^*) \cdot (\bar{Z}_S + \bar{Z}_U)} \tag{2}$$

$$P_A = \frac{E^2}{4} \frac{2 \cdot R_U}{(R_S + jX_S + R_U + jX_U)(R_S - jX_S + R_U - jX_U)} \tag{3}$$

$$P_A = \frac{E^2}{2} \frac{R_U}{(R_S + R_U)^2 + (X_S + X_U)^2} \tag{4}$$

La puissance est maximale si le dénominateur est minimal. Ceci est obtenu en faisant : $X_U = -X_S$. On rappelle que si une résistance est toujours positive, une réactance peut être positive ou négative (bobine ou condensateur). L'expression de la puissance est alors uniquement fonction de R_U et R_S. La puissance sera maximale si

$$\frac{dPa}{dr_U} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{dPa}{dR_U} = \frac{E^2}{2}\left\{\frac{(R_S + R_U)^2 - 2 \cdot R_U(R_U + R_S)}{(R_S + R_U)^4}\right\} = \frac{E^2}{2}\left\{\frac{R_S - R_U}{(R_S + R_U)^3}\right\} \tag{6}$$

Cette dérivée s'annule si $R_U = R_S$. En tenant compte de la condition sur les réactances, on obtient donc une transmission de puissance optimale si l'impédance de la charge est le complexe conjugué de celle de la source. Quand cette condition est réalisée, il y a adaptation des impédances en puissance.

Remarques

- Pour un circuit alimenté en courant continu les impédances sont réelles et la transmission de puissance est optimale quand la résistance du récepteur est égale à celle de la source
- On peut noter que lorsque les impédances sont adaptées, la puissance perdue dans l'impédance de source est égale à la puissance utilisable dans la charge.

Ces conditions sur Z_U nous donnent les conditions que doit respecter le dispositif d'adaptation pour maximiser le transfert de puissance.

2.3 Réalisation pratique

✍ wiki

Par exemple à basse fréquence (2 MHz par ex) le comportement de l'antenne peut être modélisé par une résistance en série d'une capacité (la calculer pr que ça colle avec la valeur du schéma à cette fréquence). Il suffit de rajouter une inductance de valeur bien choisie pour annuler cette dérive et réajuster l'impédance de la bobine à 50 (même commentaire).

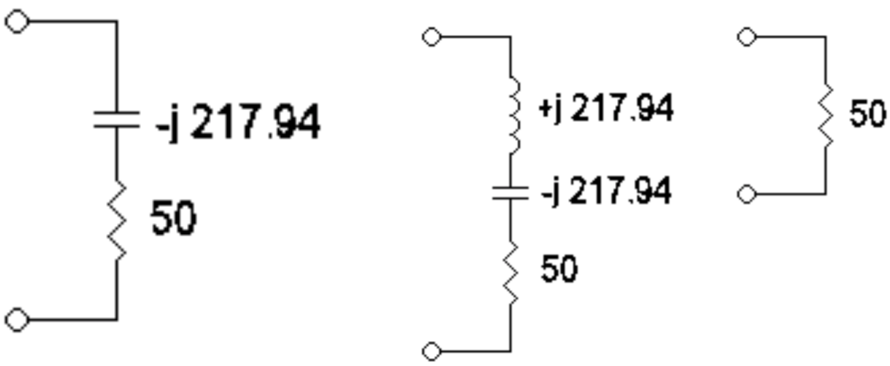


Figure 1 – les deux circuits de droite équivalents entre eux

Les circuits réels disposent de composants dont les capacités/inductances se règlent automatiquement pour adapter la correction en fonction de la fréquenc.

3 Exemple d'impédance en acoustique : instruments de musique et pavillon exponentiel

✍ Précis

3.1 Impédance acoustique

✍ Précis

En électrocinétique, on introduit l'impédance électrique pour relier linéairement la difference entre deux états électriques d'un circuit (tension u) et le débit de charges qui en resulte (courant i). En representation complexe, on a donc :

$$\underline{Z}_{elec} = \frac{\underline{U}}{\underline{i}}$$

Par analogie, on définit l'impédance acoustique pour relier linéairement la différence entre deux états du fluide parcouru par l'onde sonore (surpression p) et le mouvement de matière qui en résulte (vitesse v).

En représentation complexe, on définit 1'impédance acoustique Z par le rapport

$$Z = \frac{p}{v}$$

- Pour une OPPH, l'équation d'Euler linearisee en représentation complexe donne :

$$j\omega\rho_0\underline{v} = j\vec{k}p$$

En projetant cette relation sur la direction de propagation $\vec{u}$, on obtient l'impedance :

$$\underline{Z} = \rho_0 c$$

dont on remarque qu'elle est reelle et independante de la pulsation Ainsi, les champs de surpression et de vitesse vibrent en phase. Si on considere maintenant une OPPH se propageant dans le sens opposé, l'impédance vaut :

$$\underline{Z} = -\rho_0 c,$$

les champs de surpression et de vitesse vibrant alors en opposition de phase.

Pour une OPPH, l'impédance acoustique est réelle, indépendante de la pulsation ω et vaut :

$$|\underline{Z}| = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_0}}.$$

L'impédance acoustique est donc d'autant plus élevée que le milieu est dense (ρ_0 éleve) et peu compressible (χ_0 faible). De manière générale, ce résultat reste vrai pour les ondes planes progressives (OPP).

De la même manière que dans une ligne de transmission électrique on cherche à maximiser la puissance transmise dans le cadre des télécommunications, le transfert de la puissance acoustique est crucial pour les communications acoustiques ou plus concrètement, la musique.Étudions la transmission d'une onde incidente à la sortie d'un instrument

Pavillon exponentiel Les instruments a vent comme les cuivres ou les portevoix sont constitués d'un tuyau qui s'évase, appelé pavillon acoustique. Ce dernier réalise l'adaptation d'impédance entre l'intérieur de l'instrument et l'air libre : l'impédance passe d'une valeur élevee a l'intérieur de l'instrument à une valeur faible dans l'air libre. Le modele simple suivant se propose de justifier la forme exponentielle du pavillon acoustique En raison de la variation du diamètre du tube, on généralise l'expression de l'impedance acoustique sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{p}{S_d},$$

S étant la section du tube de diamètre D.

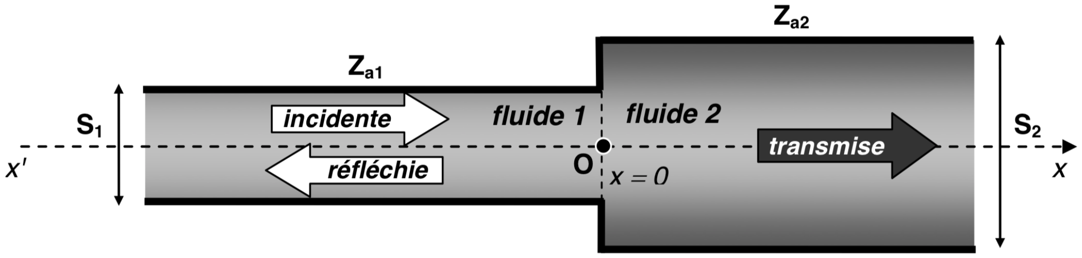
Lorsqu'une onde sonore est transmise d'un milieu 1 , d'impédance acoustique Z_1, vers un milieu 2, d'impédance acoustique Z_2 le coefficient de transmission en puissance s'écrit :

$$\mathrm{T} = \frac{4\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2}{(\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2)^2}$$

Deux cylindres

Dans notre problème, les milieux sont de même nature. Seule la géometrie du tuyau modifie les expressions des impédances acoustiques : $s\mathrm{Z}_1 = \mathrm{SZ}_2 = \varphi_0 c$. D'où :

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(1 + Z_1Z_2)^2} \text{ qui donne : } T = \frac{4\frac{S}{s}}{\left(1 + \frac{S}{s}\right)^2}$$



Un tuyau ouvert correspond à $\mathrm{S}_2 \to \infty$ $x \to \infty$ à S_1 fixé, et l'onde est encore totalement réfléchie.

Pas pratique pour émettre un son.

Trois cylindres Avec un tuyau composé de trois cylindres, le coefficient de transmission global est simplement le produit des coefficients de transmission locaux :

$$T = \frac{4\frac{S_1}{s}}{\left(1+\frac{S_1}{s}\right)^2} \times \frac{4\frac{S}{S_1}}{\left(1+\frac{S}{S_1}\right)^2}$$

Pour rechercher la valeur de S_1 qui rend T maximal, on exprime tout d'abord $\ln T$ en fonction de S_1, puis on calcule la dérivee logarithmique. On a :

$$\ln T = -2\ln\left(1+\frac{S_1}{s}\right) - 2\ln\left(1+\frac{S}{S_1}\right) + C$$

où C ne contient que des termes en s et S, indépendants de S_1. On a alors :

$$\frac{dT}{T} = -2\frac{dS_1}{s+S_1} + 2\frac{dS_1}{S_1}\frac{S}{S+S_1}$$

puis : $\frac{dT}{T} = 2\frac{dS_1}{S_1}\frac{s\ S-S_1^2}{(s+S_1)(S+S_1)}$ Ainsi : $\frac{dT}{dS_1} = 0$ si $S_k = \sqrt{s}$. On peut facilement se convaincre que $T(\sqrt{s\ S})$ est un maximum car T est une fonction continue positive de S, qui s'annule en $S_1 = 0$ et S, infini. On a ainsi :

$$T_{max} = \frac{16\frac{S}{s}}{\left(1+\sqrt{\frac{S}{s}}\right)^4}$$

N cylindres Envisageons les sections S_{h-1}, S_k et S_{k+1}. Pour que la transmission soit maximale entre $t = S_0$ et $S = S_{N-1}$, elle doit l'tre entre S_{h-1} et S_{k+1}. La relation établie à la question précédente : ${S_1}^2 = s\ S$ peut s'écrire $\frac{S_1}{s} = \frac{S}{S_1}$. Elle donne, dans notre cas :

$$\frac{S_{\omega+1}}{S_k} = \frac{S_k}{S_{k-1}} \text{ , pour tout } k = 1, 2, \ldots, N-2$$

Le rapport $\frac{S_{t+1}}{S_k}$ est constant. Notons le m pour la suite. b. La relation précédente donne alors :

$$\frac{S_{N-1}}{S_{N-2}} = \frac{S_{N-\frac{2}{2}}}{S_{N-s}} = \cdots = \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2}{S_u} = \frac{S_1}{S_0}$$

En faisant le produit de tous ces rapports, on trouve : $\frac{S_{N-1}}{S_0}$, soit $\frac{S}{s}$. Avec la définition de m don- née ci-dessus, on a :

$$\frac{\mathbf{S}}{s} = m^{N-1}.$$

Le coefficient de transmission entre S_h et S_{k+1} est :

$$T_{k,k+1} = \frac{4\frac{S_{k+1}}{S_k}}{\left(1+\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)^2} \text{ soit : } T_{h_{++1}} = \frac{4m}{(1+m)^2}.$$

Le coefficient de transmission global maximal est alors :

$$T_{max} = T_{0,1}\ T_{1,2} \ldots . T_{N-2,\ N-1} \text{ soit : } \quad T_{max} = \left[\frac{4m}{(1+m)^2}\right]^{N-1}$$

Limite continue On a : $m = 1+\varepsilon$ avec $|\varepsilon| << 1$. D'où

$$\frac{S}{s} = (1+\varepsilon)^{N-1}$$

puis à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{S}{s} = 1 + (N-1)\varepsilon$$

Ainsi :

$$\varepsilon = \frac{1}{N-1}\left(\frac{S}{s} - 1\right)$$

Alors : $\mathrm{T}_{\max}=\left[\frac{4(1+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)^2}\right]^{\mathrm{N}-1}$, soit :

$$T_{\max}=\left[\frac{1+\varepsilon}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right]^{\mathrm{N}-1}$$

A l'ordre 2 en ε, on peut écrire :

$$\mathrm{T}_{\max}=[(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)]^{\mathrm{N}-1},\ \text{soit : } \mathrm{T}_{\text{wax}}\ =1-(\mathrm{N}-1)\varepsilon^2$$

d. En reprenant le resultat établi a la question précédente

$$\varepsilon=\frac{1}{\mathrm{N}-1}\left[\frac{\mathrm{S}}{5}-1\right]$$

on trouve finalement :

$$\mathrm{T}_{\max}=1-\frac{1}{\mathrm{N}-1}\left[\frac{\mathrm{S}}{s}-1\right]^2$$

Quand $\mathrm{N}\to\infty$, on obtient $\mathbf{T}_{10}\to 1$. La transmission maximale réalise, dans ces conditions, une adaptation d'impédance parfaite entre l'entrée du tuyau et la sortie. e. Avec les notations proposées, on a :

$$\frac{\mathrm{S}_h}{\mathrm{S}_0}=m^k,\ \text{puis : } \frac{\mathrm{S}_k}{s}=\left(\frac{\mathrm{S}}{s}\right)\sqrt{\mathrm{N}-1]\Delta x}$$

A la limite continue, on a :

$$\frac{x}{(N-1)\Delta x}=\frac{N}{N-1}\frac{x}{L}$$

qui tend vers $\frac{x}{L}$ quand N tend vers l'infini.

Ainsi $\mathrm{S}_k\to\mathrm{S}(x)$ avec :

$$\mathrm{S}(x)=s\left(\frac{\mathrm{S}}{s}\right)^{\frac{x}{L}}$$

Nous venons d'établir la loi de variation de la section du tuyau qui réalise l'adaptation d'impédance. Une telle loi permet de justifier la forme donnée à certains instruments de musique (trompette, clarinette) ou à un porte-voix. On peut écrire :

$$\mathrm{S}(x)=se^{ax},\ \text{avec } a=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathbf{s}}{s}\right)\ .$$