

LP2020 – OSCILLATEURS

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : L3

Bibliographie

✚ https://www.doc-solus.fr/prepa/sci/adc/pdf/enonces.pdf/2016/PC_PHYSIQUE_MINES_1_2016.enonce.pdf	Sujet concours millenium bridge
✚ http://pikeroen.free.fr/Site/72AF5694-E969-4E8F-8B21-3A0298B4D97C_files/A%20Pont%20Marche%202016%20corr.pdf	Corrigé
✚ <i>J'intègre PC-PC*</i> , Sanz	Pont de Wien et analogie avec le LASER
✚ ✚ LP2020 LASER	
✚ <i>Mécanique MPSI PCSI PTSI</i> , Hprépa	Pour la première partie
✚ <i>Précis électronique PSI 2005</i> , Brenders	

Table des matières

1	Oscillateur simple	2
1.1	Oscillations libres	2
1.2	Oscillations forcées	4
2	Oscillations auto-entretenues : oscillateur à pont de Wien	5
2.1	Principe de fonctionnement	5
2.2	Naissance des oscillations	6
2.3	Exemple de l'oscillateur à pont de Wien	6
3	Un oscillateur optique : le LASER	7

Remarques sur les leçons précédentes

Apparemment l'an dernier en une demi-heure ça a bien marché de faire oscillations libres et forcées du pendule dans une première partie puis les oscillations auto-entretenues avec le Van der Pol. Ok pour la première partie ça permet d'introduire le phénomène de résonance, se servir de l'exemple du Millenium Bridge comme Clément Gidel pour contextualiser mais simplifier l'étude au max quand même ya du boulot après. Pour les oscillations auto-entretenues je trouve plus explicite le fonctionnement du pont de Wien avec la boucle de rétroaction plutôt que l'élément nn linéaire équivalent à une résistance négative ou je sais pas quoi. Je pense pas qu'il y ait le temps de faire les oscillateurs à relaxation donc autant rester sur le pont de Wien surtout que ça nous permet de faire une analogie avec Jean-Pierre le LASER. Je pense qu'il y aurait une belle analogie à faire entre les oscillations de relaxation et le stick slip mais bon les oscillations de relaxations ça s'enchaîne moins bien avec ce qui précède et c moins utile. C bien j'ai pas mis 4h à choisir un plan. Mais bon pas trop dur à rédiger la suite je pense.

Introduction

Les phénomènes périodiques sont omniprésents en physique. C'est le cas notamment des petits mouvements autour d'une position d'équilibre, problème très général résolu par le modèle physique de l'oscillateur harmonique. De manière plus générale on appelle oscillateurs les systèmes fournissant une réponse périodiques. Cette réponse peut être due à une excitation extérieure, auquel cas l'étude de l'amplitude de cette réponse est nécessaire pour choisir le domaine de fonctionnement de l'oscillateur. C'est le cas d'un enfant qui balance les jambes sur une balançoire par exemple. La réponse peut aussi être spontanée, c'est à dire que le système présente des oscillations auto-entretenues, en l'absence de toute excitation. Ces oscillations sont particulièrement intéressantes car caractéristiques du système et indépendante du forçage : c'est le cas des battements de coeur.

Dans une première partie nous étudierons le problème des oscillations du Millenium Bridge en réponse au pas des promeneurs, puis les oscillations auto-entretenues en électronique et en optique.

1 Oscillateur simple

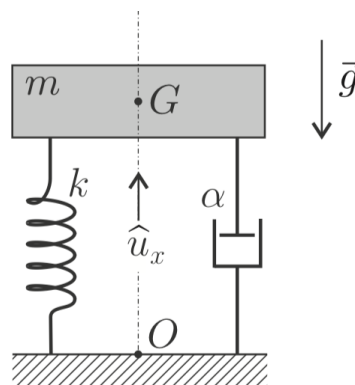
Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle à été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de cette partie est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

<https://www.youtube.com/watch?v=VMLerfswe8s> pense à enlever le son vrr c en espagnol en plus

1.1 Oscillations libres

✎ Sujet Mines, Hprépa

On modélise le pont par l'oscillateur suivant :



Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \widehat{u}_x)$ – voir figure 1 L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. A tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \widehat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Appliquons la loi de la quantité de mouvement au barycentre G , de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x - mg \widehat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \widehat{u}_x$$

D'après l'énoncé, $\ell = OG = x$. Projetons cette relation sur $\widehat{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

Divisons cette égalité par m et posons : Il vient

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$$

Notons $\tilde{x}$ la valeur de x à l'équilibre. Alors, $\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$ Il s'ensuit que

$$\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Posons $x(t) = X(t) + \tilde{x}$, où $X(t)$ représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0\right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0$$

$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$ La constante ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient ξ est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement avec le coefficient de frottement α .

En cherchant des solutions sous forme $X(t) = Ae^{pt}$, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Pour observer des oscillations, il faut que la solution comporte des exponentielles complexes donc que le déterminant soit négatif. C'est pourquoi on supposera par la suite $0 < \xi < 1$. Alors les racines de l'équations caractéristique sont données par

$$p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

Ainsi, $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

En prenant des conditions initiales de position et de vitesse quelconques X_0 et V_0

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A\xi\omega_0 + B\omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Quand le temps s'écoule, $X(t)$ tend vers zéro en oscillant. Le régime est oscillatoire sans être périodique, à cause de l'amortissement créé par les frottements. Il est dit pseudo-périodique

Effet d'une force de vent $F = \beta \dot{X}$: Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$, c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement ξ et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si $\beta > \alpha$, $\xi < 0$ et l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément (comme le pont de Tacoma tmtc).

↓ On observe pourtant des oscillations robustes sur le Millenium Bridge : c'est du à l'excitation du pas des passants.

1.2 Oscillations forcées

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$. Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$. On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique. La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par m et introduisons X , comme à la question 1 .

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

On pose $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

On def $H = Y/E$ comme la fonction de transfert du système, avec Y définit ci dessus et $E = \frac{1}{m}F_1$. Comme $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$, il vient

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant $\underline{F}_1 = -F_1$), on a :

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{F}_1}{m}$$

donc 0

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On obtient alors par analogie avec circuit RLC et tension aux bornes de la capacité, résonance si $\xi < 1/\sqrt{2}$ (il ne faut pas un trop fort amortissement. On ne fait pas le calcul de la résonance de $\underline{H}$, on raisonne par analogie avec le RLC et on peut directement dire qu'on se place dans le cas de la résonance en calculant les ODGs correspondants.

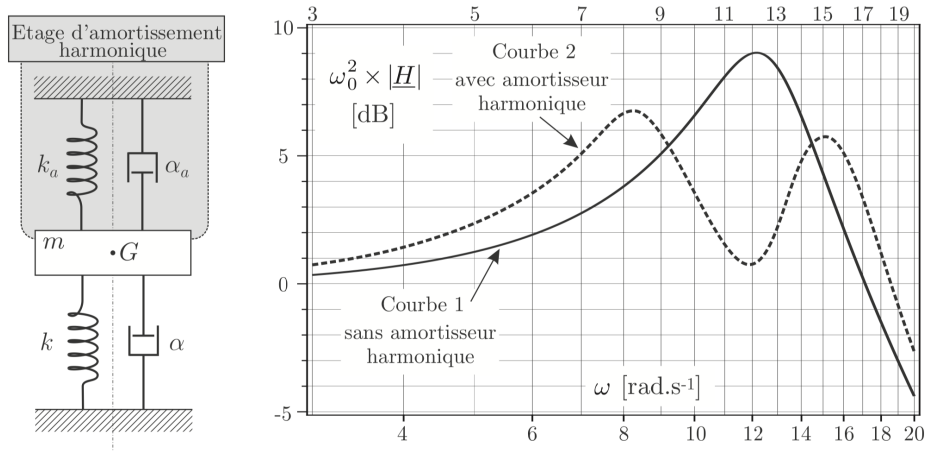


FIGURE 1 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

ODG : A partir de la figure on peut trouver un $\omega_0 \simeq 12 \text{ rad/s}$ (voir correction pour comment on les obtient).

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

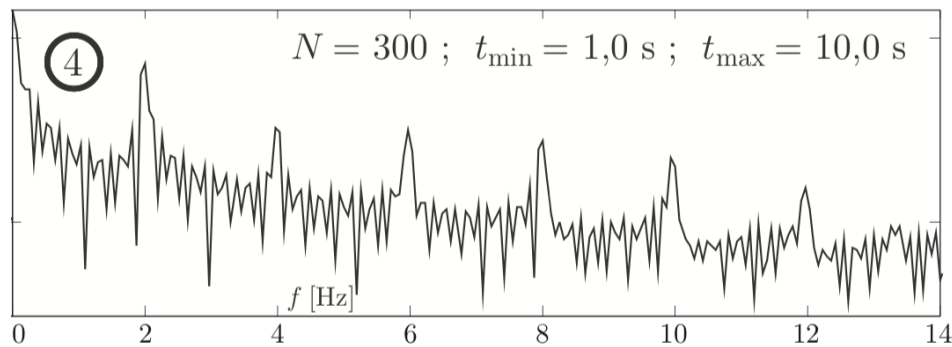


FIGURE 2 – SPECTRE du signal correspondant à la marche d'un piéton.

Morale : Le problème du Millenium Bridge est d'avoir une fréquence de résonance proche de celle des piétons ($f \sim 1.9 \text{ Hz}$), ainsi on a des problèmes de résonance de la structure à cette fréquence. Les amortisseurs harmoniques permettent de déplacer les résonances et réduit également les amplitudes de celles ci (voir correction).

Un oscillateur harmonique amorti peut donc présenter une résonance. Ce phénomène est ici à éviter pour ne pas endommager le pont, mais on cherche parfois à s'y placer pour transférer un maximum de puissance au système (exemple : les micros). Il peut aussi être mis à profit pour filtrer une fréquence (passe-bande RLC).

Nous avons étudié les oscillations libres et forcées d'un oscillateur harmonique amorti et mis en évidence le phénomène de résonance. Il existe cependant des oscillateurs qui oscillent indépendamment de tout forçage : on ne peut à l'évidence pas décrire ces systèmes avec l'oscillateur harmonique dont la réponse dépend directement de l'excitation. La stabilité de tels systèmes provient de la notion de rétroaction. Nous allons étudier un exemple électronique et un exemple optique, fortement analogue.

2 Oscillations auto-entretenues : oscillateur à pont de Wien

2.1 Principe de fonctionnement

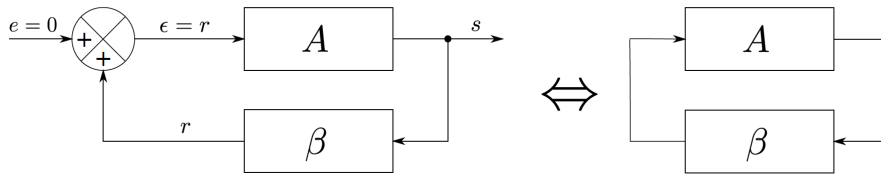
Précis p 236 On appelle oscillateur un générateur qui délivre un signal périodique :

- en l'absence de signal périodique extérieur à l'oscillateur ;
- en étant alimenté par une source d'énergie continue (qui n'est donc pas la source des oscillations).

On appelle oscillateur quasi sinusoïdal un oscillateur qui génère un signal comprenant un harmonique principal et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal sinusoïdal. La forme du signal est alors proche d'une sinusoïde (dite quasi sinusoïde).

- Nécessité d'une instabilité pour générer les oscillations
- Nécessité d'un filtre pour sélectionner la fréquence à amplifier
- Nécessité d'une amplification par un composant actif (AO) pour compenser la dissipation.

2.2 Naissance des oscillations



Nous allons utiliser la rétroaction positive comme source d'instabilité : avec un sommateur à la place du comparateur, la fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$$

On cherche à créer une réponse oscillante en l'absence d'entrée. Pour obtenir des oscillations, l'ordre de la boucle doit être au moins égal à deux et pour qu'elles naissent à partir d'une entrée quasi-nulle (bruit), il faut $A(p)B(p) = 1$. En régime harmonique (bonne approx du fonctionnement de l'oscillateur) en posant $p = j\omega$ on obtient

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$$

Cette égalité constitue le critère de Barkhausen et porte à la fois sur le module et sur la phase de la fonction de transfert du système en boucle ouverte. La pulsation ω_0 qui satisfait cette égalité est la pulsation des oscillations auto-entretenues. On peut interpréter le critère de la manière suivante :

$$H = \frac{A}{1 - AB} = A \sum_{i=1}^{+\infty} (AB)^i$$

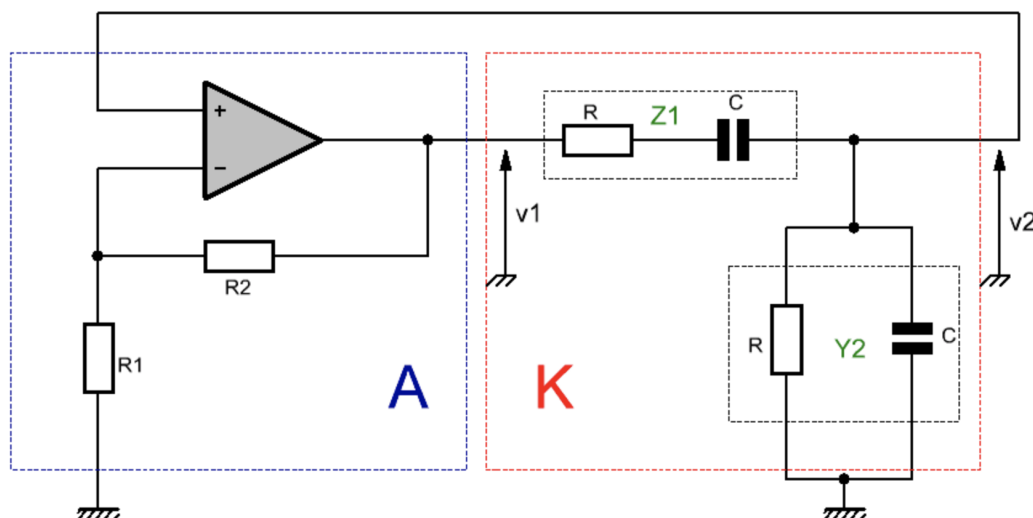
et dire que AB c'est comme dans le Fabry-Pérot, le module c'est les réflexions et la condition de phase c'est les interférences constructives. On a des interférences constructives localisées à l'infini en sortie quand le critère de Barkhausen est vérifié. L'analogie est élégante je pense.

On a vu que pour l'ordre 2, les solutions étaient de la forme $s(t) = Ae^{-m\omega_0 t} \cos(\omega t + \Phi)$ pour une entrée nulle. Les oscillations sinusoïdales correspondent donc à $m = 0$. En pratique pour démarer les oscillations on se place à $m \gtrsim 0$.

Bon finalement pas le temps de parler de la théorie de Nyquist je pense mais faut la connaître c dans le Manneville.

2.3 Exemple de l'oscillateur à pont de Wien

Krob p131, Précis p244



On retrouve bien les éléments d'un oscillateur quasi-sinusoïdal :

- système instable ;
- réaction positive ;
- boucle formée d'un amplificateur et un filtre ;
- ordre de la boucle égal à 2 ;
- signal d'entrée nul.

L'équation différentielle vérifiée par s est :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \left(\frac{3 - A_0}{RC} \right) + \frac{s}{R^2C^2} = 0$$

Il faut donc agir sur $A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ pour démarrer les oscillations et vérifier le critère de Barkhausen. Allez ya plus qu'à



Pont de Wien

✎ Krob p131



On prend $R_1 = 1k\Omega$, R_2 variable, $R=1k\Omega$ et $C=1\mu\Omega$. On part de $R_2 = 1900\Omega$ puis on monte petit à petit pour montrer la naissance des oscillations. On peut comparer la période à la valeur attendue $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Montrer qu'on a des distorsion si on augmente trop R_2 d'où le terme quasi-sinusoïdal.

La stabilité en fréquence des oscillateurs peut être mise à profit en optique, où des sources très monochromatiques facilitent les expériences d'interférences lumineuses



3 Un oscillateur optique : le LASER

✎ Sanz PC, LP37

contenu et longueur à moduler selon le temps qu'il nous restera biensur

Le mot laser est un acronyme pour Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Le premier laser a été réalisé en 1960 par Théodore Maiman et est depuis devenu essentiel en optique grâce à ses propriétés essentielles, notamment celle d'être une source de lumière très intense et très monochromatique.

L'amplification du rayonnement sur un étroit intervalle de fréquence est réalisé sur le même principe que l'oscillateur à pont de Wien. On retrouve effectivement les mêmes éléments que dans un oscillateur quasi-sinusoïdal électrique :

- **L'amplification** est possible grâce à l'émission stimulée dans un milieu où l'inversion de population est maintenue grâce à un pompage optique,
- **Le bouclage** de la sortie sur l'entrée est réalisée à l'aide de miroirs semi-réfléchissants,
- **Le filtre** est constitué d'une cavité résonante.

L'amplification par le milieu actif seule ne suffit pas à assurer le fonctionnement d'un laser. Le gain à chaque traversée du milieu est en fait relativement faible. Il est nécessaire que la lumière produite par émission stimulée puisse traverser ce dernier un grand nombre de fois. On couple donc le milieu actif avec une cavité constituée de deux miroirs plans ou sphériques en regard.

En réinjectant l'onde dans le milieu amplificateur, la cavité réalise une rétroaction positive qui transforme le laser en oscillateur optique. La cavité agit comme un filtre très sélectif en sélectionnant les ondes résonantes et en les faisant osciller un grand nombre de fois entre les miroirs.

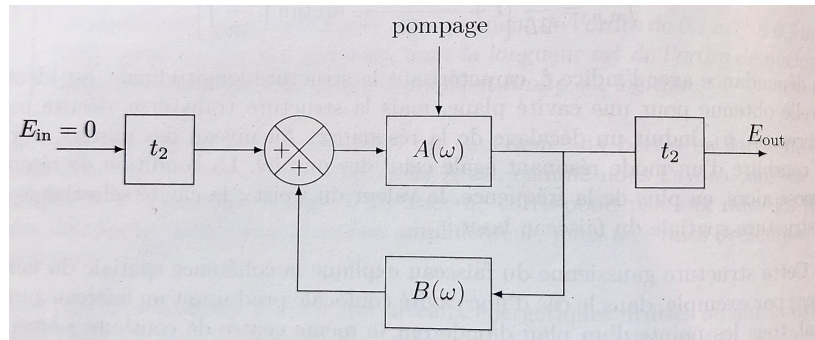


FIGURE 3 – t correspond au coefficient de transmission des miroirs de la cavité, $A(\omega)$ le gain au cours d'une traversée et $B(\omega)$ la fonction de transfert de la cavité que nous allons étudier.

Remarques : Pour qu'un faisceau laser puisse sortir en régime continu, le gain dans le milieu actif doit être supérieur aux pertes par réflexion sur les miroirs.

La largeur spectrale de l'émission laser est très nettement inférieure à celle d'une transition atomique par émission spontanée. Deux effets concourent à cette finesse spectrale :

- la sélectivité en fréquence de la cavité ;
- a sélectivité liée à l'émission stimulée.

Modes longitudinaux De même que pour une corde de Melde, la superposition des ondes réfléchies multiples se propageant en sens inverse conduit à la création d'un système d'ondes stationnaires à l'intérieur de la cavité. Parmi tous les modes de vibration possibles, la cavité sélectionne les modes longitudinaux du champ qui satisfont aux conditions aux limites imposées par les miroirs, c'est à dire deux noeuds de vibration aux extrémités de la cavité La longueur L de celle-ci doit donc nécessairement être voisine d'un nombre entier de la demi-longueur d'onde $\lambda/2$, d'où

$$\delta \approx 2n'L = k\lambda_0 = k \frac{c}{v_k}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$L \approx k \frac{\lambda_0}{2n'} = k \frac{\lambda}{2}$$

et

$$v_k \approx k \frac{c}{2n'L} = k \frac{c'}{2L}$$

avec $n' \approx 1$, $\lambda = \lambda_0/n' \approx \lambda_0$ et $c' = c/n$

Les fréquences v_k de la relation précédentes sont les fréquences des modes propres de la cavité. Seules les ondes qui possèdent un accord de fréquence avec la cavité sont donc amplifiées. L'écart en fréquence $\Delta v \approx c/2L$ entre deux modes longitudinaux consécutifs est appelé intervalle spectral libre. Chaque valeur de k correspond à un mode longitudinal particulier.

ODG : Pour un laser He-Ne émettant à $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ dans une cavité de 30 cm , $k \approx 9,5 \cdot 10^5$

Finesse de raie Si la cavité est plane, son fonctionnement est identique à celui d'un interféromètre de Fabry-Pérot. Les variations d'intensité relative à la sortie de l'interféromètre montrent une série de pics d'autant plus étroits que le coefficient de réflexion énergétique R des miroirs est proche de l'unité. La largeur des pics est caractérisée par un coefficient de finesse F , défini comme le rapport de l'intervalle spectral libre $\Delta v = c/2L$ à la largeur à mi-hauteur δv d'un pic. Pour une cavité constituée de deux miroirs plans de même coefficient de réflexion énergétique R , on montre que ⁴² $\delta v \approx c(1 - R)/(2\pi L\sqrt{R})$ et $F \approx \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

Plus le coefficient de réflexion énergétique R est proche de l'unité, plus les raies sont fines et plus le coefficient de finesse F est élevé. Dans le tableau 11.1, les valeurs de δv et F sont calculées pour trois valeurs croissantes de R , et pour $L = 30 \text{ cm}$.

$R = 0,50$	$R = 0,95$	$R = 0,99$
$\delta v = 112\text{MHz}$	$\delta v = 8,16\text{MHz}$	$\delta v = 1,60\text{MHz}$
$F = 4,44$	$F = 61,2$	$F = 313$

Conclusion

Nous avons donc montré que le modèle de l'oscillateur harmonique amorti permettait de modéliser le phénomène de résonance. La compréhension de ce phénomène est essentielle pour éviter soit de transmettre trop d'énergie au système et de l'endommager comme dans le cas du Millenium bridge, soit de lui en transmettre trop peu en fonctionnant hors résonance comme dans le cas des récepteurs sonores. À l'aide de la notion de rétroaction, nous avons également compris comment des oscillations sinusoïdales pouvaient perdurer, cette fois-ci indépendamment du forçage.

Il est également possible de générer des oscillations auto-entretenues mais non-monochromatiques avec des oscillateurs à relaxation dont le comportement est fortement non-linéaire.