

Electromagnétisme des milieux matériels

Bibliographie :

- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Jackson, électrodynamique classique
- Kittel, physique de l'état solide
- Perez, électromagnétisme
- Hprépa, PSI-PSI* électronique II

Ch1 - Les diélectriques

Ch2 - Les milieux magnétiques

Ch 1 – Milieux diélectriques

I - Introduction

Action d'un champ électrique sur la matière

Milieu conducteur :

Possède des charges libres. Le champ électrique y est nul en régime permanent.

Milieu isolant ou diélectrique:

Localement neutre, peut être traversé par un champ électrique.

Un champ électrique extérieur le polarise en déplaçant légèrement les charges liées.

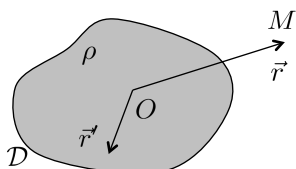
En général: la réponse n'est non nulle que si le champ électrique est non nul (polarisation induite).

Les milieux ferro-électriques (rares) ont une polarisation spontanée.

Ch 1 – Milieux diélectriques

II - Polarisation

1) Moment dipolaire d'une distribution de charge



Potentiel électrique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in D} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Approximation dipolaire : $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Charge globale : $Q = \iiint_{\vec{r}' \in D} \rho(\vec{r}') d\tau$

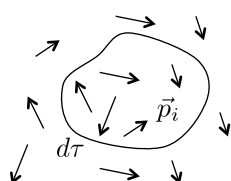
Moment dipolaire : $\vec{P} = \iiint_{\vec{r}' \in D} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau$ [Debye] 1 D = 0.33 10⁻²⁹ c.m

Quantité intrinsèque si Q=0.

Charges ponctuelles $\rho(\vec{r}) = \sum q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ $\vec{P} = \sum q_i \vec{r}_i$

Ch 1 – Milieux diélectriques

2) Polarisation volumique



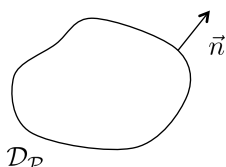
Ensemble de dipôles moléculaires $\vec{p}_i$

Description de type milieu continu $\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i}{d\tau}$

Moyenne sur un volume mésoscopique

$[P] = \text{c.m}^{-2}$ $[P] = \text{A.s.m}^{-2} \text{ S.I.}$

3) Potentiel créé par la matière polarisée



Le milieu est localement neutre

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in D_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Identique au potentiel créé par la distribution de charges fictives

volumique $\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

surfactive $\sigma_{\text{lié}} = -\vec{P} \cdot \vec{n}$

Ch 1 – Milieux diélectriques

Démonstration :
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

On écrit :

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

L'intégrale devient :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Le second terme est une intégrale de surface

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_p} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\vec{r}' \in \partial\mathcal{D}_p} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

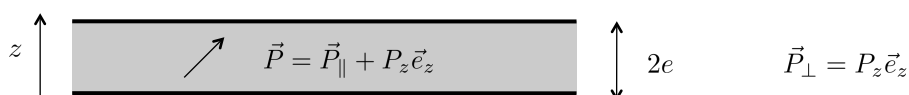
Tout se passe comme si le champ était créé par les distributions de charges de volume et de surface

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_{\text{lié}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

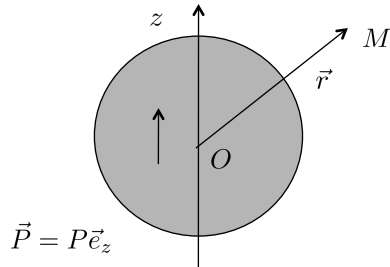
4) Champ créé par une plaque uniformément polarisée



Montrer que le champ est nul en dehors de la plaque, et que $\vec{E} = -\frac{\vec{P}_{\perp}}{\epsilon_0} \quad |z| < e$

Ch 1 – Milieux diélectriques

5) Calcul direct : champ créé par une sphère uniformément polarisée



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$V(M) = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau}_{\vec{E}_1}$$

$\vec{E}_1 = E_1(r)\vec{e}_r$, champ créé par une boule de densité de charge 1

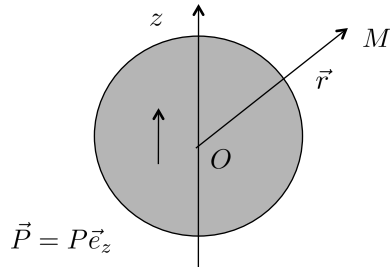
Extérieur : montrer que $V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $\vec{P} = \iiint_{|\vec{r}'| \leq R} \vec{P} d\tau$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}) \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Champ et potentiel créé par un dipôle placé au centre de la sphère

Ch 1 – Milieux diélectriques

5) Calcul direct : champ créé par une sphère uniformément polarisée



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$V(M) = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau}_{\vec{E}_1}$$

$\vec{E}_1 = E_1(r)\vec{e}_r$, champ créé par une boule de densité de charge 1

Intérieur : montrer que

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0} \quad V(r) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

La relation entre champ créé et polarisation est non locale,
elle est entièrement pilotée par les conditions aux limites.

Ch 1 – Milieux diélectriques

6) Courant de polarisation*

La polarisation est due au déplacement des charges sous l'action d'un champ extérieur

$$\vec{P} = \sum n_i q_i \vec{s}_i$$

n_i densité volumique locale du porteur de charge i
 $\vec{s}_i$ déplacement moyenné sur un volume mésoscopique

En régime variable, il apparaît un courant de polarisation

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \sum n_i q_i \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Cette relation vérifie la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{lié}} = 0$$

Relation plus générale $\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$ (contribution magnétique)

Ch 1 – Milieux diélectriques

II – Charge et courant de polarisation**

La polarisation volumique est définie par lissage de la distribution microscopique de dipôles.

Les équations de Maxwell sont valables à l'échelle microscopique. Les champs $\vec{e}$ et $\vec{b}$ varient à l'échelle de la maille atomique.

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j}_{\text{micro}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho_{\text{micro}}}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

Champs macroscopiques (lissés)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \langle \vec{b} \rangle_\sigma = \iiint_{\infty} \vec{b}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e} \rangle_\sigma = \iiint_{\infty} \vec{e}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$$

Fenêtre de lissage

$$W_\sigma(\vec{r}) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ échelle mésoscopique

Ch 1 – Milieux diélectriques

Propriétés de commutations :

$$\frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial t} = \iiint_{\infty} \frac{\partial e_j(\vec{r}')}{\partial t} W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial t} \right\rangle_\sigma$$

$$\frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial x_j} = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x_j} \right\rangle_\sigma$$

Equations de Maxwell macroscopiques

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{e} \rangle = - \left\langle \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0}$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \left\langle \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

Il apparaît la densité de charge lissée et le courant lissé.
On fait la différence entre charges libres et charges liées.

$$\langle \rho_{\text{micro}} \rangle = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}$$

Contrôlable avec
un générateur

Réponse de la
matière

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \dots$$

$$\langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}}$$

$$\gamma \vec{E}$$

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \dots$$

Loi d'Ohm

Partie diélectrique + partie magnétique

Ch 1 – Milieux diélectriques

Lissage direct de la densité microscopique de charges

Position de chaque atome $\vec{r}_i$

Position des charges liées à chaque atome $\vec{\xi}_{i\alpha}$

$$\rho_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

Chaque site est localement neutre $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} = 0$

Moment dipolaire locale de chaque site $\vec{p}_i = \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha}$

Polarisation microscopique $\vec{P}_{\text{lié}} = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

Densité macroscopique $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$

Polarisation macroscopique $\vec{P} = \langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$

Ch 1 – Milieux diélectriques

Il y a une séparation d'échelles : $\sigma \gg |\vec{\xi}_{i\alpha}|$

On développe $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{lié}} \rangle &\simeq \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \right) \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = \vec{p}_i \end{aligned}$$

Identité vectorielle

$$\vec{p}_i \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)) + W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_i = 0$$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \right)}_{\langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle} \quad \boxed{\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$$

Remarque, à l'ordre 2 : $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \right)$

$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$ Tenseur quadripolaire électrique

Ch 1 – Milieux diélectriques

Lissage direct du courant microscopique de charges

Courant de charge lié $\vec{J}_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \quad (|\dot{\vec{\xi}}_{i\alpha}| \gg |\dot{\vec{r}}_i|)$

Courant de charge macroscopique

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \langle \vec{J}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

On développe

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \sum_i \left(\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} (\vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla}) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ Terme d'ordre 2

Le courant de polarisation est un effet d'ordre 1 (dipolaire)

La partie magnétique est du même ordre que le quadrupôle électrique

Ch 1 – Milieux diélectriques

En développant à l'ordre 2 :

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q})$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}}{\partial t}$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{Aimantation volumique (ch.2)} \quad \vec{m}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \times \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha}$$

$$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{Tenseur quadrupolaire électrique}$$

L'expérience montre que les effets magnétiques et électriques sont découplés

$$P = P(E)$$

$$Q = Q(E)$$

$$M = M(B)$$

-On a toujours $|\vec{P}| \gg |\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}|$

-Dans certaines situations $|\vec{\nabla} \times \vec{M}| \gg |\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}|$

On écrit en toute généralité :

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

III – Excitation électrique et excitation magnétique

Equations de maxwell dans la matière

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t}$$

On définit l'excitation électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

et l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

Ils contiennent la réponse de la matière

A ce stade, rien n'est fait. Il faut des relations constitutives pour fermer le système.

Ch 1 – Milieux diélectriques

IV – Polarisation induite

1 – Susceptibilité électrique (statique)

Un isolant plongé dans un champ électrique se polarise. Dans le cas de milieux linéaires, on a :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad \text{susceptibilité électrique : } [\chi_e]$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + [\chi_e]) \vec{E} \quad \text{perméabilité} \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + [\chi_e])$$

Dans un cristal, D et E ne sont pas colinéaires (biréfringence)

Milieu linéaire isotrope $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

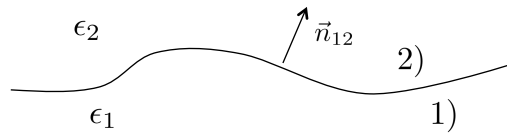
Perméabilité relative : $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

Gaz (1 bar) $\chi_e \sim 10^{-3}$

Milieux denses $\chi_e \sim 1 - 100$

Ch 1 – Milieux diélectriques

2 – Relations de passage entre deux milieux diélectriques



Relations de passage :

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

$$\vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = \vec{0} \quad \vec{H}_{\parallel,2} - \vec{H}_{\parallel,1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$$

Appliqué au cas de diélectriques LHI :

$$(\epsilon_2 \vec{E}_1 - \epsilon_1 \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}}$$

$$\vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = \vec{0}$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

3 – Résoudre un problème d'électrostatique

Que valent les champs dans tout l'espace en présence d'un diélectrique ?
Pb à champ imposé (loin), potentiel imposé, charges imposées ...

Méthode rigoureuse :

i) Trouver la forme de la solution $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} V) = 0$

ii) Raccorder loin de l'objet (si besoin) $-\vec{\nabla} V = \vec{E}_\infty$

iii) Utiliser les relations de passage pour raccorder aux interfaces

Méthode perturbative (champ imposé):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_\infty \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

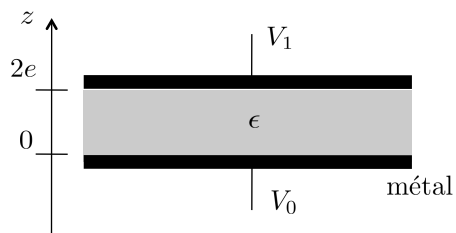
$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots \quad \vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{i-1}$$

Il faut calculer $\vec{E}_{i+1}$ connaissant $\vec{P}_i$

P1 est uniforme, mais pas les ordres supérieurs (sauf sphère et plaque plane)

Ch 1 – Milieux diélectriques

3.A – application au condensateur, potentiel imposé



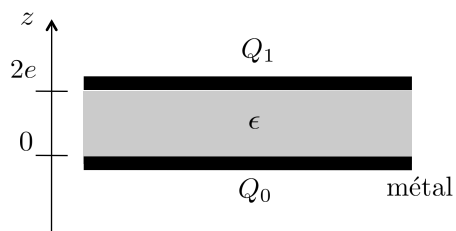
1) Calculer le champ dans le condensateur

2) Calculer la capacité du condensateur

$$Q_0 = C(V_0 - V_1)$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

3.B – application au condensateur, charges imposées



1) Calculer le champ dans le condensateur sans diélectrique.

2) Calculer le champ avec le diélectrique.

3) Retrouver la capacité du condensateur

Ch 1 – Milieux diélectriques

V – Régimes variables

1 – Susceptibilité complexe (milieu linéaire et isotrope)

La permittivité dépend de la fréquence

On introduit les TF des champs E et P

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega \quad \vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega$$

Attention : $\vec{P}_{\omega}(\vec{r}) \quad \vec{E}_{\omega}(\vec{r})$

La relation reste simple entre composantes de Fourier

$$\vec{P}_{\omega}(\vec{r}) = \epsilon_0 \underline{\chi_e}(\vec{r}, \omega) \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) \quad \underline{\chi_e} = \underline{\chi_e}' + i\underline{\chi_e}''$$

$$\underline{\epsilon_r} = 1 + \underline{\chi_e} \quad \underline{\epsilon_r} = \underline{\epsilon_r}' + i\underline{\epsilon_r}''$$

La relation reste locale entre les champs

Ch 1 – Milieux diélectriques

2 – Réponse à un champ polychromatique

Dans le cadre de la réponse linéaire, la relation est une convolution

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \vec{E}(\vec{r}, \tau) G(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

La valeur de P dépend des valeurs de E aux instants antérieurs

G est la fonction réponse, liée à la susceptibilité complexe

$$\underline{\chi_e}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Il existe un lien entre les parties réelle et imaginaire (Kramers-Kronig)

$$\chi_e'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad \chi_e''(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

Ch 1 – Milieux diélectriques

Vérifier la relation sur le particulier d'un système d'ordre 1 :

$$\tau_p \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} \quad \text{Mécanisme valable pour la polarisation d'orientation}$$

Résolution dans l'espace de Fourier :

Résolution directe dans l'espace physique :

Ch 1 – Milieux diélectriques

3 – Considérations énergétiques

Extension du théorème de Poynting

Bilan de puissance transmise aux charges libres : $\mathcal{P}_v = -\vec{J}_{\text{libre}} \cdot \vec{E}$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J}_{\text{libre}} \cdot \vec{E}$$

Dans le vide : $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \quad u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

Dans un diélectrique (non magnétique) la situation est plus complexe :

Vecteur de Poynting : $\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H} \simeq \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

On n'a pas en toute généralité : $\vec{D}(\vec{r}, t) = [\epsilon] \vec{E}(\vec{r}, t)$

Il faut que la permittivité soit une constante (champ quasi-statique), ou que la gamme de fréquence soit réduite (quasi-monochromatique)

Alors : $u_{em} \simeq \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$