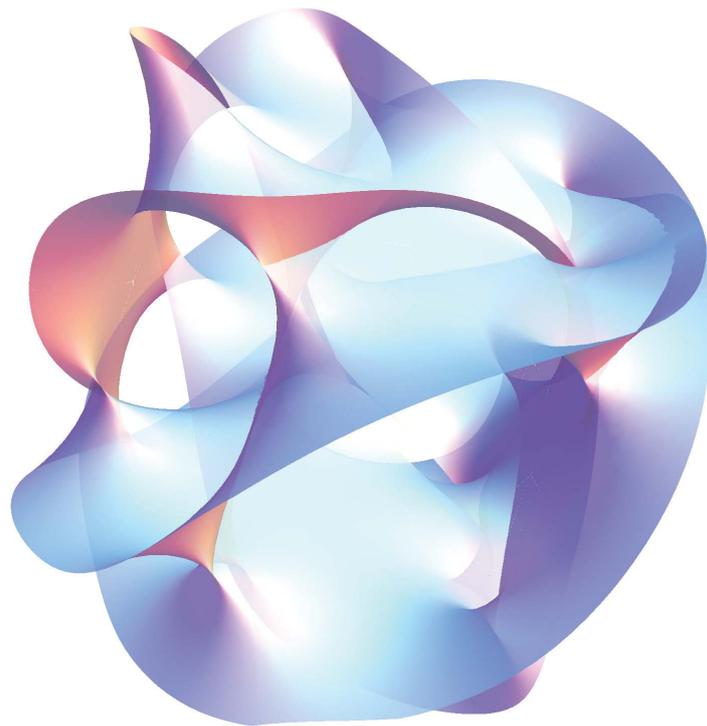


---

# MÉCANIQUE ANALYTIQUE

---





<b>1</b>	<b>Principes variationnels et mécanique lagrangienne</b>	<b>5</b>
1.1	Fonctionnelles et équations d'Euler-Lagrange . . . . .	5
1.1.1	Fonctionnelles, actions et lagrangiens . . . . .	5
1.1.2	Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange . . . . .	6
1.2	Intérêt et propriétés des équations d'Euler-Lagrange . . . . .	14
1.2.1	Lagrangiens différant d'une dérivée totale . . . . .	14
1.2.2	Changement de coordonnées et covariance des équations d'Euler-Lagrange . . . . .	17
1.3	Mécanique lagrangienne . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Mécanique hamiltonienne</b>	<b>23</b>
2.1	Moments conjugués et hamiltonien . . . . .	23
2.2	Équations de Hamilton . . . . .	24
2.3	Crochets de Poisson . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Symétries et théorème de Noether</b>	<b>29</b>
3.1	Symétries d'un système lagrangien . . . . .	29
3.2	Transformations continues et symétries infinitésimales . . . . .	30
3.3	Théorème de Noether et quantités conservées . . . . .	31

Ce cours est destiné aux élèves préparant le concours de l'Agrégation de Physique. Il reprend les connaissances de base en mécanique analytique qui est, rappelons le, au programme de l'agrégation. Sont intégrés au cours divers exercices, pour permettre aux étudiant·e-s de mettre en pratique les techniques apprises et vérifier que les compétences nécessaires ont bien été acquises. Les énoncés de ces exercices sont accompagnés d'étoiles, indiquant leur difficulté : il est conseillé de vérifier que les exercices les plus simples sont bien compris avant d'aborder les problèmes plus difficiles, destinés aux étudiant·e-s voulant approfondir le sujet. Le cours est séparé en trois chapitres.

Le premier traite des principes variationnels en général et de l'approche lagrangienne. Le chapitre commence par des généralités à propos de l'extrémalisation de fonctionnelles et présente quelques exemples ne provenant pas de la mécanique. Il continue ensuite par une présentation de quelques propriétés intéressantes des équations d'Euler-Lagrange. Enfin, il termine sur la mécanique lagrangienne, *i.e.* la ré-interprétation des lois de la dynamique en tant que problèmes variationnels.

Le deuxième chapitre concerne la formulation hamiltonienne de la mécanique. Il montre comment la mécanique lagrangienne peut être reformuler en tant que dynamique sur l'espace des phases et s'appuie donc sur les résultats du premier chapitre. Après avoir introduit les moments conjugués et le hamiltonien, on aborde les équations de Hamilton et leur utilisation en mécanique. On introduit ensuite le crochet de Poisson et ses applications.

Enfin, les symétries et le théorème de Noether sont le sujet du troisième et dernier chapitre. Ces notions sont ici seulement abordées d'un point de vue lagrangien : la compréhension de cette partie ne nécessite donc que des connaissances issues du premier chapitre. Y sont présentées les notions de symétries continues et infinitésimales, ainsi que le lien avec les lois de conservations.

Par manque de temps, plusieurs aspects de la mécanique analytique ne peuvent pas être abordés durant ce cours. Parmi eux, la théorie des liaisons, contraintes et multiplicateurs de Lagrange est un exemple important d'application de l'approche lagrangienne. Concernant l'approche hamiltonienne, ce cours ne traite pas de transformations canonique, de la théorie de Hamilton-Jacobi et du théorème de Noether hamiltonien. Ces différents domaines sont traités dans les références de base de mécanique analytique :

- **J. José, E. Saletan** (1998) *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge Univ. Press
- **L. Landau, E. Lifchitz** (1998), *Physique théorique - Mécanique*, Ellipses
- **H. Goldstein** (1980), *Classical Mechanics*, Adisson-Wesley

Ce polycopié n'est qu'un support écrit, outil complémentaire du cours magistral associé. Il est de plus récent et peut donc malheureusement contenir des fautes de typographie et des imprécisions. Si vous en repérez, ou si vous avez une question ou un commentaire sur le cours, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse [sylvain.lacroix@ens-lyon.fr](mailto:sylvain.lacroix@ens-lyon.fr).

## 1.1 Fonctionnelles et équations d'Euler-Lagrange

### 1.1.1 Fonctionnelles, actions et lagrangiens

De manière générale, une **fonctionnelle** est une application  $S$  d'un espace de fonctions  $\mathcal{E}$  vers l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . L'espace fonctionnel  $\mathcal{E}$  dépend de la fonctionnelle considérée et notamment des propriétés nécessaires que les fonctions doivent avoir pour la bonne définition de la fonctionnelle, cf. exemples ci-dessous.

*Exemple 1.* Exemples de fonctionnelles

a) Fonctionnelle d'évaluation : soit  $\mathcal{E} = \{\text{fonctions de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixé, on considère

$$\begin{aligned} \text{ev}_{x_0} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0) \end{aligned} \cdot$$

b) Norme sup : soit  $\mathcal{E} = \{\text{fonctions bornées de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}$ , on considère

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \end{aligned} \cdot$$

c) Exemple moins trivial : soit  $\mathcal{E} = \{\text{fonctions } \mathcal{C}^1 \text{ de } [0, 1] \text{ vers } \mathbb{R}\}$ , on considère

$$\begin{aligned} S : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| + f(0) \end{aligned} \cdot \quad \triangleleft$$

Par la suite, on se restreindra à un type de fonctionnelle plus précis, qui prennent une forme intégrale. On va considérer l'espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{E} = \{\text{fonctions } \mathcal{C}^2 \text{ de } [a, b] \text{ vers } \mathbb{R}^n\}.$$

Les fonctions dans  $\mathcal{E}$  dépendent du **paramètre**  $t$  dans l'intervalle  $[a, b]$  et ont pour espace cible  $\mathbb{R}^n$ , que l'on désignera comme **espace de configuration**. Un élément de  $\mathcal{E}$  est décrit par  $n$  fonctions  $q_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que l'on appelle **coordonnées généralisées**. On considère de plus une fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\longmapsto \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

appelée **lagrangien** ou fonction lagrangienne.

On définit alors la fonctionnelle suivante, que l'on nomme **action** :

$$\begin{aligned} S : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\dot{q} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dérivée de la fonction  $q$ .

*Remarque 1.* Il est important de bien distinguer dans les différentes notations ce qui est une fonction de ce qui est une simple variable. Ainsi, dans l'équation (1.1), les notations  $q$  et  $\dot{q}$  désignent juste des variables muettes dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Dans l'équation (1.2),  $q$  est une fonction appartenant à  $\mathcal{E}$ , donc à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\dot{q}$  est sa fonction dérivée, aussi à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  : on évalue alors la fonction  $\mathcal{L}$  au point  $(q(t), \dot{q}(t), t)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b]$ .  $\triangleleft$

*Remarque 2.* Historiquement, les appellations d'espace de configuration, de coordonnées généralisées, de lagrangien et d'action ne proviennent pas de l'étude générale des fonctionnelles mais de leur utilisation en mécanique. Ces notations anticipent donc en fait la partie 1.3 et sont introduites dès maintenant pour des raisons de simplicité.  $\triangleleft$

*Exemple 2.* Donnons un premier exemple simple d'une fonctionnelle dérivant d'un lagrangien. Les fonctions appartenant à  $\mathcal{E}$  décrivent des trajectoires de classe  $\mathcal{C}^2$  dans  $\mathbb{R}^n$ , parcourues entre un temps initial  $t = a$  et un temps final  $t = b$ . On peut alors considérer la fonctionnelle qui à une telle fonction  $q$  associe la longueur de la trajectoire parcourue :

$$\mathcal{P}[q] = \int_a^b dt \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t)^2}. \quad (1.3)$$

Cette fonctionnelle dérive du lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\longmapsto \sqrt{\sum_i \dot{q}_i^2}, \end{aligned}$$

indépendant des variables  $q$  et  $t$ .  $\triangleleft$

### 1.1.2 Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange

Considérons une fonctionnelle  $S$  dérivant d'un lagrangien  $\mathcal{L}$  :

$$S[q] = \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.4)$$

Le but de cette section est de déterminer les extremums locaux de  $S$ . Plus précisément, fixons deux points  $q_a$  et  $q_b$  de l'espace de configuration  $\mathbb{R}^n$ , qui décrivent la valeur des fonctions  $q$  considérées à  $t = a$  et  $t = b$  (les positions initiale et finale du point de vue de la mécanique). On cherche une fonction  $q^{(e)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $q^{(e)}(a) = q_a$  et  $q^{(e)}(b) = q_b$  qui soit un extremum local de  $S$  et donc un point stationnaire de  $S$ .

Considérons une fonction  $q$  proche de la fonction extremum  $q^{(e)} : q = q^{(e)} + \delta q$ , avec  $\delta q$  infinitésimal. Les valeurs initiale et finale de  $q$  et  $q^{(e)}$  étant fixées préalablement à  $q_a$  et  $q_b$ , on a  $\delta q(t = a) = \delta q(t = b) = 0$ .

L'hypothèse d'extrémalité locale et donc de stationnarité équivaut à l'annulation de la variation de  $S$  au premier ordre en  $\delta q$  :

$$\delta S = S[q] - S[q^{(e)}] = 0.$$

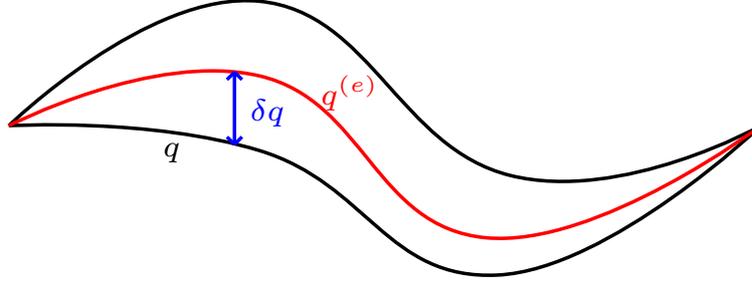


FIGURE 1.1 – La trajectoire extrémale (rouge) est un point stationnaire de la fonctionnelle d'action.

L'expression de la variation  $\delta S$  s'obtient par un calcul explicite, en effectuant un développement limité du lagrangien à l'ordre un :

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q^{(e)} + \delta q] - S[q^{(e)}] \\ &= \int_a^b dt \left( \mathcal{L}(q^{(e)}(t) + \delta q(t), \dot{q}^{(e)}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) \\ &= \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta \dot{q}_i(t) \right) \\ &= \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) \delta q_i(t) + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta q_i(t) \right]_{t=a}^{t=b}, \end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que  $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t)$ , puis avons effectué une intégration par partie. En se rappelant que  $\delta q(t=a) = \delta q(t=b) = 0$ , on obtient

$$\delta S = \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) \delta q_i(t) = 0. \quad (1.5)$$

Cette égalité est vraie pour toute variation infinitésimale  $\delta q$  (avec valeurs nulles en  $t = a$  et  $t = b$ ) si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) = 0 \quad (1.6)$$

pour tout  $i$  et pour tout  $t$  (par le lemme de Du Bois-Raymond ou lemme fondamental du calcul des variations). L'équation (1.6) est appelée **équation d'Euler-Lagrange**. Elle est souvent notée de manière plus compacte :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (1.7)$$

*Remarque 3.* En complément à la remarque 1, il faut prendre le temps ici de bien comprendre les diverses notations pour éviter les confusions. Pour lire l'équation (1.6), il faut d'abord considérer le lagrangien  $\mathcal{L}$  comme une fonction des variables muettes  $(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b]$ , prendre les dérivées partielles par rapport à  $q_i$  et  $\dot{q}_i$ , qui sont donc encore des fonctions des variables muettes  $(q, \dot{q}, t)$ , puis évaluer ces fonctions au point  $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$ . On obtient alors des fonctions dépendant uniquement du temps, que l'on peut donc dériver par rapport à  $t$ , ce qui permet d'écrire l'équation (1.6).

Plus haut, nous avons dénoté la fonction extrémale (solution des équations d'Euler-Lagrange)  $q^{(e)}$ , afin de la distinguer des autres fonctions et des variables muettes. Il est standard dans la physique actuelle d'encore noter cette fonction  $q$ , convention que l'on adoptera à partir de maintenant. On obtient alors l'écriture (1.7) des équations d'Euler-Lagrange, qui est la plus usuelle et la plus compacte. De telles notations permettent d'alléger les calculs et les formules ; il est cependant nécessaire de bien se demander à quoi font référence les divers objets s'appelant  $q$  dans ce cas, afin de ne pas faire une erreur de manipulation formelle des concepts et des équations considérés.  $\triangleleft$

*Exemple 3.* Illustrons l'utilisation des équations d'Euler-Lagrange sur un problème simple. Dans l'exemple 2, nous avons donné un exemple de fonctionnelle dérivant d'un lagrangien : la longueur  $\mathcal{P}[q]$  d'une courbe  $q$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , donnée par l'équation (1.3). Considérons ici le cas simple d'une courbe plane, *i.e.*  $n = 2$ , décrit par des coordonnées  $(x, y)$ . On fait le choix de paramétriser la courbe par la coordonnée  $x$ , *i.e.* par une fonction coordonnée  $y$  dépendant de la variable  $x$ . La longueur de la courbe se réexprime alors simplement comme

$$\mathcal{P}[y] = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1.8}$$

Après ce changement de variable, les notations diffèrent de celles utilisées dans la discussion générale de cette section. Le tableau ci-dessous résume l'identification à faire pour bien identifier les bonnes variables :

	Paramètre	Coordonnée généralisée	Espace de configuration	Vitesse généralisée	Action	Lagrangien
Discussion générale	$t$	$q$	$\mathbb{R}^n$	$\dot{q}$	$S$	$\mathcal{L}$
Exemple	$x$	$y$	$\mathbb{R}$	$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{V} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

TABLE 1.1 – Identification des variables du problème

Une question naturelle à se poser est la forme géométrique des courbes qui minimisent la longueur (1.8), *i.e.* quel est le plus court chemin entre deux points dans le plan euclidien ?

Il s'agit ici d'un problème d'extrémalisation de la fonctionnelle  $\mathcal{P}[y]$ , qui rentre donc dans le cadre de la discussion ci-dessus. Le lagrangien associé à cette fonctionnelle est

$$\mathcal{V}(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}. \tag{1.9}$$

On a

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0.$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent donc

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0,$$

soit encore  $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$  égal à une constante  $c$ . On obtient alors en inversant

$$\dot{y} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = \text{cste.}$$

On a donc  $y = ax + b$ , avec  $a$  et  $b$  des constantes, *i.e.* la courbe est une droite. On retrouve donc le résultat bien connu et intuitif que le plus court chemin entre deux points dans le plan est la ligne droite.

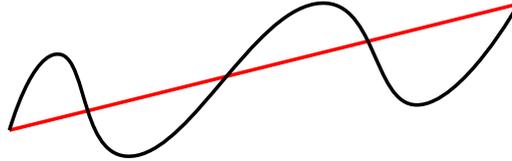


FIGURE 1.2 – La ligne droite est le plus court chemin reliant deux points du plan euclidien

◁

Comme illustré sur l'exemple ci-dessus, la méthode générale pour résoudre les problèmes variationnels est la suivante :

1. mettre le problème sous forme fonctionnelle (dans l'exemple, il s'agissait d'exprimer la longueur de la courbe sous forme intégrale),
2. identifier les paramètres et coordonnées généralisées du problème (dans l'exemple  $x$  et  $y$ ),
3. exprimer le lagrangien en fonction du paramètre et des coordonnées et vitesses généralisées (dans l'exemple l'équation (1.9)),
4. écrire les équations d'Euler-Lagrange,
5. les résoudre.

Les exercices suivants montrent la résolution de divers problèmes par cette méthode.

### Exercice 1.1. \* Plus court chemin dans $\mathbb{R}^n$

Dans l'exemple 3, nous avons utilisé les équations d'Euler-Lagrange pour montrer que le plus court chemin entre deux points de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  est la ligne droite. Le fait que nous nous soyons placés en dimension 2 avait permis de simplifier le problème en paramétrant une des coordonnées par l'autre. Dans cet exercice, nous traitons le cas du plus court chemin dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  quelconque.

1. Montrer que le problème se réduit à la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{P}[q] = \int_a^b dt \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t)^2}.$$

2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées et en déduire que

$$\dot{q}_i = c_i \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{q}_j(t)^2},$$

où  $c_i$  est une constante indépendante de  $t$ .

3. En déduire que la courbe  $t \mapsto q(t)$  est une droite de vecteur directeur  $(c_1, \dots, c_n)$ .

◁

**Exercice 1.2. \* Bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux** (sujet C2016, question 12)

Considérons deux anneaux coaxiaux de rayon  $R$ , situés dans les plans  $z = h$  et  $z = -h$  de l'espace euclidien, paramétrisé par les coordonnées  $(x, y, z)$  (cf. figure 1.3). On les plonge dans de l'eau savonneuse puis on les retire. Le but de ce problème est de déterminer la forme de la bulle de savon reliant les deux anneaux.

Par symétrie de rotation axiale du système, la position de la bulle à une hauteur  $z$  ne dépend que de la distance  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  à l'axe de symétrie des anneaux. On cherche donc à déterminer l'équation de la courbe  $r(z)$  donnant le rayon de la bulle de savon à la hauteur  $z$ .

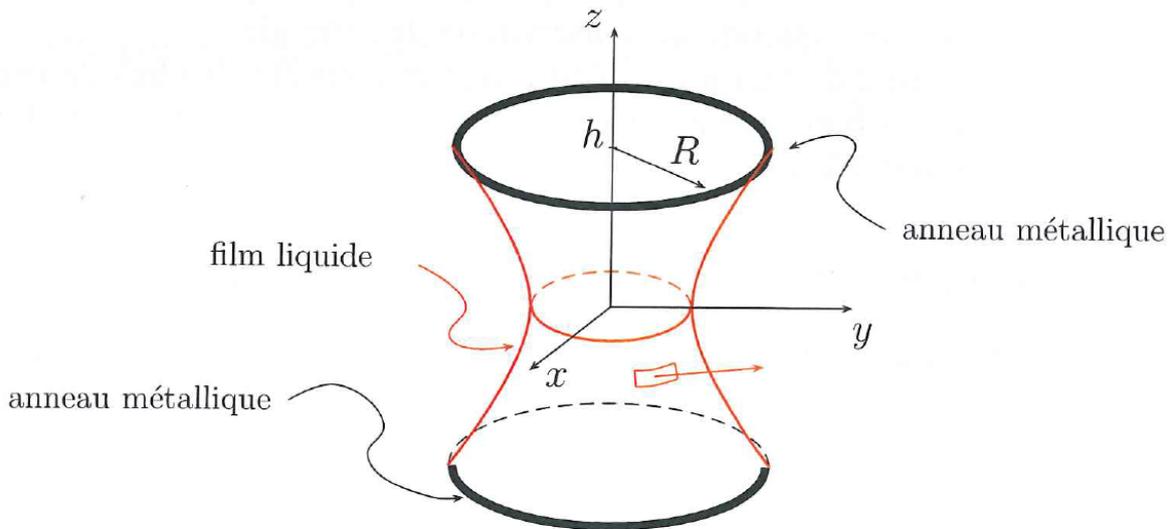


FIGURE 1.3 – Bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux

1. Justifier que la position d'équilibre de la bulle de savon est celle minimisant sa surface  $A$ .
2. Démontrer que l'aire de la bulle s'exprime comme

$$A = \int_{-h}^h dz \, 2\pi r(z) \sqrt{1 + \dot{r}(z)^2}, \quad (1.10)$$

où  $\dot{r}(z) = \frac{dr}{dz}$ .

3. Exprimer alors le problème comme un problème de minimisation fonctionnelle. Identifier les paramètres, coordonnées généralisées, vitesses généralisées, action et lagrangien du système.
4. Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange associée s'écrit

$$1 + \dot{r}^2 = r\ddot{r} \quad (1.11)$$

5. Vérifier que l'équation de la bulle est donnée par

$$r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{avec } a \text{ constante telle que } R = a \cosh\left(\frac{h}{a}\right). \quad (1.12)$$

On appelle cette surface la caténoïde. ◁

**Exercice 1.3. \*\* Problème du brachistochrone**

Considérons une courbe plane ( $C$ ), reliant l'origine  $O(0, 0)$  à un point  $A(x_0, y_0)$  fixé. On paramétrisera cette courbe en exprimant l'ordonnée  $y$  comme une fonction de l'abscisse  $x$  (cf. figure 1.4). On considère un point matériel  $M$ , posé sans vitesse initiale au point  $O$  et au temps  $t = 0$ , glissant sans frottement et sous l'action de la gravité, sur la courbe ( $C$ ). Le but de cet exercice est de déterminer la forme de ( $C$ ) optimisant le temps de chute du point matériel, de l'origine  $O$  au point  $A$ .

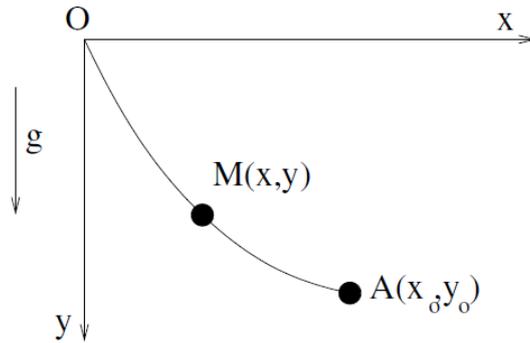


FIGURE 1.4 – Problème du brachistochrone

1. Soit  $s$  l'abscisse curviligne le long de la courbe ( $C$ ), définie par  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Par un argument énergétique, justifier que la vitesse du point  $v = \frac{ds}{dt}$  à l'ordonnée  $y$  est égale à  $\sqrt{2gy}$ .
2. En déduire que le temps mis par le point matériel pour parcourir la courbe ( $C$ ) est donné par

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx,$$

où  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ .

3. Identifier alors le problème avec un problème variationnel. Quels sont les paramètres, coordonnées généralisées, vitesses généralisées, action et lagrangien du système ?
4. Montrer que les équations d'Euler-Lagrange de ce système imposent à la fonction  $y(x)$  de vérifier

$$1 + \dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0.$$

5. Vérifier que la quantité

$$Q = y(1 + \dot{y}^2)$$

est une intégrale première, *i.e.* que  $\dot{Q} = 0$ .

6. On reparamétrise  $y$  comme  $y = \frac{Q}{2}(1 - \cos(\theta))$ . Démontrer que

$$x(\theta) = \frac{Q}{2}(\theta - \sin(\theta)).$$

L'équation de la courbe ( $x, y$ ) en fonction de  $\theta$  ainsi obtenue est celle décrivant une cycloïde.  $\triangleleft$

L'exercice suivant s'intéresse à l'équation décrivant les géodésiques d'un espace courbé, équation qui est à la base de la théorie de la relativité générale. Une fois passés l'abstraction géométrique et l'effroi que peuvent susciter les mots "relativité générale", cet exercice devient un simple problème de minimisation de fonctionnelle grâce aux équations d'Euler-Lagrange. Les calculs étant cependant assez longs et laborieux, on le conseille seulement à ceux qui se sont assurés que les exercices précédents ne leur posaient pas de soucis et qui cherchent un entraînement plus "ardu".

#### Exercice 1.4. \*\*\*\* Chemin le plus court dans un espace courbé

Nous avons vu dans l'exercice 1.1 comment utiliser un problème variationnel pour prouver que la ligne droite est le plus court chemin dans un espace euclidien. Pour cela, nous avons écrit la distance entre deux points comme l'intégrale de l'élément de distance euclidien infinitésimal  $ds = \sqrt{\sum_i dq_i^2}$ .

Ce calcul correspondait au cas du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . Une première généralisation possible est de considérer un produit scalaire quelconque,  $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} u_i v_j$ , avec  $g$  symétrique en les indices  $i$  et  $j$ . L'élément de distance infinitésimal serait alors  $ds = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j}$ .

Une généralisation plus compliquée et plus profonde est de considérer un espace dit **courbé**. Ce principe, à la base de la géométrie Riemannienne, consiste à considérer un espace, paramétrisé par des coordonnées  $x^\mu$ , muni d'une notion de distance infinitésimale dépendant du point :

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.13)$$

où l'on sous entend une sommation sur les indices répétés  $\mu$  et  $\nu$ . Le champ  $g_{\mu\nu}(x)$  (symétrique par échange de  $\mu$  et  $\nu$ ), qui décrit le produit scalaire au point  $x$ , est appelé la **métrique** de l'espace.

Les courbes de longueur minimale d'un espace courbé sont appelées des **géodésiques**. Déterminer ces courbes est donc équivalent à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{P}[x] = \int_a^b dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t)}.$$

Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées puis effectuer le changement de paramètre  $t \mapsto s$ , où l'abscisse curviligne  $s$  est définie par l'équation (1.13). Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange peuvent se mettre sous la forme

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0},$$

avec les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right),$$

où  $g^{\mu\nu}$  désigne l'inverse de  $g_{\mu\nu}$ , i.e.  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$ .

Cette équation, appelée **équation aux géodésiques**, est l'équation fondamentale de la dynamique en théorie de la relativité générale. ◁

L'exercice suivant est une application des équations d'Euler-Lagrange à l'optique géométrique. Plus précisément, il montre comment réinterpréter l'équation eikonale (décrivant la propagation des rayons lumineux en optique géométrique) comme un problème de minimisation fonctionnelle du chemin optique.

**Exercice 1.5. \* Principe de Fermat et équation eikonale**

Considérons un rayon lumineux se propageant dans un milieu optique d'indice  $n(\vec{r})$ , dépendant du point de l'espace  $\vec{r}$  considéré. On décrit le rayon comme une courbe  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de l'espace, paramétrisée par un paramètre  $t$  (qui peut différer du temps). Le chemin optique est défini comme la longueur parcourue par le rayon lumineux, "pondérée" par l'indice optique :

$$C[\vec{r}] = \int_a^b dt n(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \int_a^b dt n(\vec{r}(t)) \sqrt{\dot{\vec{r}}(t)^2},$$

avec  $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Le **principe de Fermat** stipule que la trajectoire  $\vec{r}$  décrite par le rayon lumineux (du moins dans l'approximation de l'optique géométrique) est telle que le chemin optique  $C[\vec{r}]$  soit minimal.

1. Interpréter le principe de Fermat comme un problème variationnel. Identifier les paramètre, coordonnées généralisées, vitesses généralisées, espace de configuration, action et lagrangien du système.
2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Effectuer le changement de paramètre  $t \mapsto s$  de  $t$  vers l'abscisse curviligne  $s$  définie par

$$ds = \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange se réécrivent comme l'**équation eikonale**

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n.$$

(En optique ondulatoire, cette équation est parfois aussi appelée **équation des rayons lumineux**, le nom d'équation eikonale désignant alors une reformulation de la relation de dispersion pour l'onde électromagnétique, équivalente à l'équation des rayons lumineux.)

Cette équation relie la courbure des rayons lumineux dans un milieu optique non-homogène au gradient d'indice optique associé à cette non-homogénéité. Elle permet par exemple de décrire les phénomènes de mirage.  $\triangleleft$

Nous terminons cette sous-section par un exercice généralisant les équations d'Euler-Lagrange au cas d'un lagrangien ne dépendant plus seulement de  $(q, \dot{q}, t)$  mais aussi des dérivées de  $q$  par rapport à  $t$  d'ordre supérieur. Il permettra aux lecteurs·trices de vérifier que la démonstration des équations d'Euler-Lagrange est bien comprise.

**Exercice 1.6. \*\* Lagrangien dépendant de dérivées d'ordre supérieur**

Considérons la fonctionnelle

$$S[q] = \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(d)}(t), t),$$

où  $q^{(k)}(t) = \frac{d^k q}{dt^k}$  (attention à ne pas confondre avec la notation  $q^{(e)}$  utilisée dans le cours).

On cherche à trouver l'équation que vérifie un extremum local  $\tilde{q}$  de  $S$ . Pour cela, on s'inspirera de la démonstration des équations d'Euler-Lagrange et chercherons  $\tilde{q}$  comme un point stationnaire de  $S$ . On pose donc  $q = \tilde{q} + \delta q$  avec  $\delta q^{(k)}(t = a) = \delta q^{(k)}(t = b) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, d - 1$ .

Calculer  $\delta S = S[q] - S[\tilde{q}]$  à l'ordre 1 en  $\delta q$  et en déduire la condition d'extrémalité  $\delta S = 0$  sous la forme d'équations différentielles d'ordre  $2d$  sur  $\tilde{q}_i$ , généralisant les équations d'Euler-Lagrange.  $\triangleleft$

## 1.2 Intérêt et propriétés des équations d'Euler-Lagrange

Dans cette section, nous aborderons deux propriétés importantes des équations d'Euler-Lagrange. Dans toute la section, on considère un problème variationnel, de paramètre  $t$ , de coordonnées généralisée  $q$ , de lagrangien  $\mathcal{L}$  et d'action

$$S[q] = \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées sont donc données par l'équation (1.7).

### 1.2.1 Lagrangiens différant d'une dérivée totale

On appelle **grandeur** une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , dépendant des variables  $(q, \dot{q}, t)$ <sup>1</sup>. Ainsi, les coordonnées généralisées ou les vitesses généralisées, vu comme les fonctions

$$(q, \dot{q}, t) \longrightarrow q \quad \text{et} \quad (q, \dot{q}, t) \longrightarrow \dot{q},$$

sont des grandeurs. De même le lagrangien du système est une grandeur. Un autre exemple, qui anticipe sur la mécanique lagrangienne, est l'énergie mécanique  $\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$ .

Considérons maintenant une solution  $q^{(e)}(t)$  des équations d'Euler-Lagrange (on revient, pour quelques temps, à la notation  $q^{(e)}$ , qui distingue la fonction extrémale des coordonnées généralisées). L'**évaluation** d'une grandeur  $\mathcal{G}$  est l'évaluation de  $\mathcal{G}$  vue comme fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b]$  au point  $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$ . Dans cette section, elle sera notée  $\mathcal{G}^{(e)}$  (plus tard, on abandonnera l'exposant  $(e)$ , comme pour les solutions des équations d'Euler-Lagrange).

$\mathcal{G}^{(e)}$  est donc une fonction du paramètre  $t \in [a, b]$ . On peut donc considérer sa dérivée par rapport à  $t$ . Par la loi de composition des dérivées, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathcal{G}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \\ &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \dot{q}_i^{(e)}(t) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \ddot{q}_i^{(e)}(t) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé une sommation d'Einstein sur l'indice répété  $i$ .

Les dérivées partielles de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $q$ ,  $\dot{q}$  et  $t$  sont des fonctions sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b]$  et donc des grandeurs. On peut alors écrire la dérivée de  $\mathcal{G}^{(e)}$  comme :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right)^{(e)} \dot{q}_i^{(e)} + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i} \right)^{(e)} \ddot{q}_i^{(e)} + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^{(e)}}. \quad (1.14)$$

Afin de distinguer cette dérivée après évaluation de la dérivée partielle par rapport à  $t$ , on l'appelle **dérivée totale** de la grandeur  $\mathcal{G}$ .

Remarquons qu'avec ces concepts de grandeurs et d'évaluation, on peut donner une formulation compacte mais rigoureuse des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)^{(e)} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right)^{(e)} = 0. \quad (1.15)$$

1. Le nom de "grandeur" n'est pas standard : il n'existe pas de conventions usuelles dans la littérature pour ce concept. C'est l'équivalent lagrangien des observables en formulation hamiltonienne.

La notion de dérivée totale définie ci-dessus n'a de sens qu'après évaluation de la grandeur  $\mathcal{G}$  sur la solution extrémale, *i.e.* que pour  $\mathcal{G}^{(e)}$ . On peut cependant dans certains cas définir la dérivée totale d'une grandeur avant évaluation. En effet, considérons une grandeur  $\mathcal{G}$  ne dépendant que des coordonnées généralisées  $q$  et du paramètre  $t$  (donc indépendante des vitesses généralisées). On peut alors définir la grandeur

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} : (q, \dot{q}, t) \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t},$$

telle que son évaluation redonne la dérivée totale de  $\mathcal{G}^{(e)}$  :

$$\frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt} = \left( \frac{d\mathcal{G}}{dt} \right)^{(e)}.$$

On appellera  $\frac{d\mathcal{G}}{dt}$  (qui est une grandeur, *i.e.* une fonction de  $(q, \dot{q}, t)$  et non de  $t$  seulement) la dérivée totale formelle de  $\mathcal{G}$ .

Considérons alors un second lagrangien  $\mathcal{L}'$ , qui diffère du premier lagrangien  $\mathcal{L}$  par une dérivée totale formelle, c'est-à-dire qu'il existe une grandeur  $\mathcal{G}(q, t)$  telle que

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, t).$$

L'action associée au lagrangien  $\mathcal{L}'$  est alors simplement donnée par

$$S'[q] = S[q] + \mathcal{G}(q_b, b) - \mathcal{G}(q_a, a).$$

Le terme dépendant de  $\mathcal{G}$  étant une constante dépendant seulement des points initial et final, il est clair que l'extrémalisation de la fonctionnelle  $S$  est équivalente à celle de la fonctionnelle  $S'$ . Les équations d'Euler-Lagrange associées doivent donc être équivalente :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = 0} \quad (1.16)$$

Pour établir ce résultat, nous avons utilisé ici le principe variationnel, qui permettait d'arriver facilement à la conclusion. Il est cependant possible d'étudier cette question sans parler d'extrémalisation de fonctionnelle mais seulement en étudiant la forme des équations d'Euler-Lagrange. C'est l'objet de l'exercice suivant.

**Exercice 1.7. \* Lagangiens différant d'une dérivée totale - approche directe**

Considérons les deux lagrangiens  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{G}}{dt}$ . Montrer explicitement que les équations d'Euler-Lagrange pour  $\mathcal{L}$  sont les mêmes que celles pour  $\mathcal{L}'$ .

Indication : introduire l'expression explicite de  $\frac{d\mathcal{G}}{dt}$  en termes des dérivées partielles de  $\mathcal{G}$  et utiliser l'équation (1.14) pour calculer les dérivées totales apparaissant dans les équations d'Euler-Lagrange.  $\triangleleft$

L'exercice suivant, plus difficile, établit la réciproque de l'exercice précédent : si deux lagrangiens donnent "exactement" les même équations d'Euler-Lagrange, alors ils diffèrent d'une dérivée totale. Avant d'aller plus loin, il est d'abord nécessaire de préciser ce que l'on entend mathématiquement par le terme "exactement", ce qui rend l'exercice un peu plus abstrait et subtil. Notamment, on reviendra le temps de cet exercice aux notations  $q$  et  $q^{(e)}$  introduites dans le cours.

**Exercice 1.8. \*\*\* Lagangiens différant d'une dérivée totale - réciproque**

Dans le cours, nous avons distingué les quantités, fonctions de  $(q, \dot{q}, t)$ , de leur évaluation le long d'une solution  $q^{(e)}$  des équations d'Euler-Lagrange. Ceci nous a permis de définir formellement la dérivée totale de  $\mathcal{G}(q, t)$  comme la quantité

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q, t).$$

De même, si on considère une quantité  $\mathcal{G}(q, \dot{q}, t)$  dépendant aussi des vitesses généralisées, on peut définir formellement sa dérivée totale comme la fonction suivante de  $(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$  :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q, \dot{q}, t).$$

1. Considérons un lagrangien  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . En utilisant la définition formelle de dérivée totale donnée ci-dessus, donner l'expression des fonctions

$$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i},$$

en terme de dérivées de  $\mathcal{L}$ . Remarquons notamment que les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\mathcal{D}_i^{(e)}(t) = \mathcal{D}_i(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), \ddot{q}^{(e)}(t), t) = 0.$$

On considère maintenant un second lagrangien  $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$  et les fonctions  $\mathcal{D}'_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$  associées. On dit alors que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  donnent exactement les mêmes équations d'Euler-Lagrange si les fonctions  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont égales. Dans la suite de cet exercice, on supposera que c'est le cas et on cherchera à montrer que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  diffèrent de la dérivée totale d'une certaine quantité  $\mathcal{G}(q, t)$ . Posons  $\Psi(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$ .

2. Utiliser  $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}'_i$  et la question 1 pour établir l'égalité fonctionnelle

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} = 0.$$

3. En étudiant la dépendance en  $\ddot{q}$  de l'équation ci-dessus, montrer que  $\Psi$  est de la forme

$$\Psi(q, \dot{q}, t) = \chi_i(q, t) \dot{q}_i + \phi(q, t),$$

avec  $\chi_i$  et  $\phi$  des fonctions de  $(q, t)$  telles que

$$\dot{q}_j \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \chi_j}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial q_i} = 0.$$

4. De même, en étudiant la dépendance en  $\dot{q}$  de l'équation ci-dessus, montrer qu'il existe une quantité  $\mathcal{G}(q, t)$  telle que

$$\chi_i(q, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t)$$

et une fonction  $\lambda(t)$  telle que

$$\phi(q, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q, t) + \lambda(t).$$

Indication : par le lemme de Poincaré, si un champ de vecteur  $V_i(x)$  est telle que  $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$  pour tout  $i, j$ , alors  $V_i$  est un gradient.

5. En déduire que  $\Psi$  est une dérivée totale. ◁

### 1.2.2 Changement de coordonnées et covariance des équations d'Euler-Lagrange

Considérons un changement de coordonnées généralisées, possiblement dépendant du temps :

$$q \mapsto q' = f(q, t), \tag{1.17}$$

que l'on suppose inversible, *i.e.* il existe une fonction  $g$  réciproque de  $f$ , telle que  $q = g(q', t)$ . Cette transformation induit la transformation suivante des vitesses généralisées :

$$\dot{q} \mapsto \dot{q}' = \frac{\partial f}{\partial q_i}(q, t)\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

qui s'inverse en

$$\dot{q} = \frac{\partial g}{\partial q'_i}(q', t)\dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}.$$

À toute grandeur  $\mathcal{G}(q, \dot{q}, t)$ , on associe la grandeur transformée

$$\mathcal{G}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{G}\left(g(q', t), \frac{\partial g}{\partial q'_i}(q', t)\dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}(q', t), t\right),$$

vue comme fonction des nouvelles coordonnées  $(q', \dot{q}', t)$ . Sous cette transformation, la fonctionnelle d'action devient :

$$S'[q'] := S[q] = \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_a^b dt \mathcal{L}'(q'(t), \dot{q}'(t), t)$$

Il est clair que l'extrémalisation de  $S'$  par rapport à  $q'$  est équivalente à l'extrémalisation de  $S$  par rapport à  $q$ . On a donc **covariance des équations d'Euler-Lagrange** :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} = 0} \tag{1.18}$$

Cette propriété très importante des équations d'Euler-Lagrange a été historiquement une des grandes réussites et des motivations de la mécanique lagrangienne. Nous y reviendrons dans la prochaine section, où nous verrons comment elle facilite le traitement des changements de coordonnées en dynamique par rapport à l'utilisation du Principe Fondamental de la Dynamique.

Comme pour la propriété d'invariance des équations d'Euler-Lagrange par ajout d'une dérivée totale, nous avons utilisé ici des arguments fonctionnels, avec lesquels la covariance est immédiate. Il existe aussi une preuve de la covariance plus directe, utilisant uniquement la forme des équations d'Euler-Lagrange, qui constitue le sujet du prochain exercice.

#### Exercice 1.9. \*\* Covariance des équations d'Euler-Lagrange - approche directe

En utilisant les règles de dérivation des compositions, démontrer par un calcul direct la covariance des équations d'Euler-Lagrange.

Indication : l'inversibilité de la transformation  $q \mapsto q'$  se traduit localement par l'inversibilité de la matrice

$$\text{Jacobiennes} \left( \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_{i,j}.$$

◁

### 1.3 Mécanique lagrangienne

Le but de cette section est de faire le lien entre les principes variationnels et la dynamique des points matériels, en réinterprétant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) en tant qu'équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien bien choisi.

Nous allons commencer par un exemple simple, mais historiquement à la base des premiers succès de la mécanique lagrangienne. Considérons un point matériel de masse  $m$ , repéré dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  par des coordonnées cartésiennes  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ .

On suppose que ce point est soumis à une force  $\vec{F}(\vec{x}, t)$ , dérivant d'un potentiel  $V(\vec{x}, t)$  (donc telle que  $F_i(\vec{x}, t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}, t)$ ). La dynamique du point est alors régie par le PFD :

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x}(t), t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t) \quad (1.19)$$

Considérons les  $x_i$  comme des coordonnées généralisées, vivant dans l'espace de configuration  $\mathbb{R}^3$ . On considère le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}, t). \quad (1.20)$$

Il est facile de vérifier que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i$  et que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i$ . Les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien  $\mathcal{L}$  sont donc équivalentes au PFD (1.19) :

$$\boxed{m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x}, t) \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0} \quad (1.21)$$

Ainsi, le PFD pour un point matériel soumis à un potentiel est équivalent à l'extrémalisation de la fonctionnelle d'action

$$S[\vec{x}] = \int_a^b dt \left( \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}(t)^2 - V(\vec{x}(t), t) \right). \quad (1.22)$$

C'est ce qu'on appelle le **principe de moindre action** ou principe de Hamilton.

*Remarque 4.* On peut remarquer que le lagrangien est donné par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Les liens entre la mécanique analytique et les concepts énergétiques apparaîtront encore plus explicitement dans la formulation hamiltonienne (chapitre 2). Cette formulation donnera de plus une importance toute particulière à la grandeur  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$ , qui apparaît déjà dans les équations d'Euler-Lagrange, et qui ici n'est autre que la quantité de mouvement du point.  $\triangleleft$

Comme annoncé dans la section précédente, nous allons utiliser cette ré-interprétation du PFD en tant qu'équation d'Euler-Lagrange ainsi que ces propriétés de covariance pour traiter les changements de coordonnées en mécanique. Dans l'exercice suivant, on utilise cette covariance pour exprimer de manière (relativement) simple le PFD en coordonnées cylindriques.

#### Exercice 1.10. \* Équations d'Euler-Lagrange en coordonnées cylindriques

On considère le lagrangien d'un point matériel  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}, t)$ . Le but de cet exercice est d'effectuer, au niveau du lagrangien, un changement de coordonnées des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  aux coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

1. Exprimer le changement de coordonnées  $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$  et son inverse.
2. Exprimer aussi les vitesses généralisées  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  en fonction des nouvelles vitesses généralisées  $\dot{r}$  et  $\dot{\theta}$ .
3. En déduire l'expression du lagrangien exprimé dans les coordonnées cylindriques.
4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées. Comparer au PFD écrit en coordonnées cylindriques.

Trouver l'expression du PFD en coordonnées cylindriques est un calcul classique de mécanique newtonienne, qui peut être un peu long et laborieux. En réinterprétant le PFD comme une équation d'Euler-Lagrange et en utilisant les propriétés de covariance de cette dernière, on peut effectuer ce changement de coordonnées directement au niveau du lagrangien et ainsi simplifier en partie les étapes de calculs. Question bonus (pour les plus courageux-ses) : reproduire la méthode avec les coordonnées sphériques.  $\triangleleft$

Nous avons vu comment interpréter le PFD comme un principe variationnel dans le cas d'un point matériel seul, soumis à un potentiel extérieur. Il est alors naturel de se poser la question de l'existence d'un principe variationnel sous tendant d'autres types de systèmes mécaniques, plus complexes.

Un premier exemple généralisant le cas ci-dessus est celui d'un système de  $N$  particules interagissant entre elles et/ou avec l'extérieur. Dans ce cas, le lagrangien est donné par la somme des énergies cinétiques moins la somme des énergies potentielles :

$$\mathcal{L}(\vec{x}^{(a)}, \dot{\vec{x}}^{(a)}, t) = \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_i^{(a)})^2 - V(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(N)}), \quad (1.23)$$

où  $\vec{x}^{(a)}$  et  $m_a$  sont respectivement la position et la masse de la particule  $a$ . Le potentiel  $V$  encode les diverses actions soumises aux particules, que ce soit des interactions entre les particules ou des interactions avec des sources extérieurs.

*Exemple 4.* Le problème à deux corps

Considérons deux corps, de masses  $m_1$  et  $m_2$ , repérés par les positions  $\vec{x}^{(1)}$  et  $\vec{x}^{(2)}$ , et interagissant *via* un potentiel  $V$  dépendant seulement de la distance entre les particules. Le lagrangien du système est alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^{(1)})^2 + \frac{1}{2} m_2 \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^{(2)})^2 - V(|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}|)$$

C'est un résultat classique de mécanique newtonienne que la dynamique du centre de masse des deux particules découple de celle de la particule réduite. Nous allons observer ce fait directement au niveau du lagrangien. On pose :

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}^{(1)} + m_2 \vec{x}^{(2)}}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}.$$

On définit de plus la masse totale et la masse réduite du système :

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Un peu d'algèbre permet alors d'exprimer le lagrangien en fonction des nouvelles coordonnées :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|).$$

On observe alors que le lagrangien s'écrit comme la somme d'un lagrangien d'une particule libre de masse  $M$  pour le centre de masse  $\vec{X}$  et comme le lagrangien d'une particule de masse  $\mu$  dans un potentiel  $V$  pour

la particule réduite  $\vec{r}$ . Comme il n'y a aucun termes faisant intervenir à la fois  $\vec{X}$  et  $\vec{r}$ , on en déduit que les deux dynamiques découplent et évoluent indépendamment. Les équations d'Euler-Lagrange redonnent alors simplement

$$M\ddot{X} = 0 \quad \text{et} \quad \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}. \quad \triangleleft$$

L'exercice suivant donne un autre exemple de système mécanique composé de deux points matériels. Le but de l'exercice est de montrer comment la mise en équation du système est facilitée par l'approche lagrangienne, en comparaison à l'approche newtonienne plus traditionnelle.

### Exercice 1.11. \*\* Pendule attaché à un ressort

On considère une masse  $M$ , astreinte à se déplacer sur un axe horizontal et repérée par son abscisse  $x$ . On relie cette masse à l'origine par un ressort de raideur  $k$  et de position d'équilibre  $x_0$ . On attache à cette masse un pendule, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , repéré dans le plan par des coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  et soumis à son poids. Le système est représenté sur la figure 1.5.

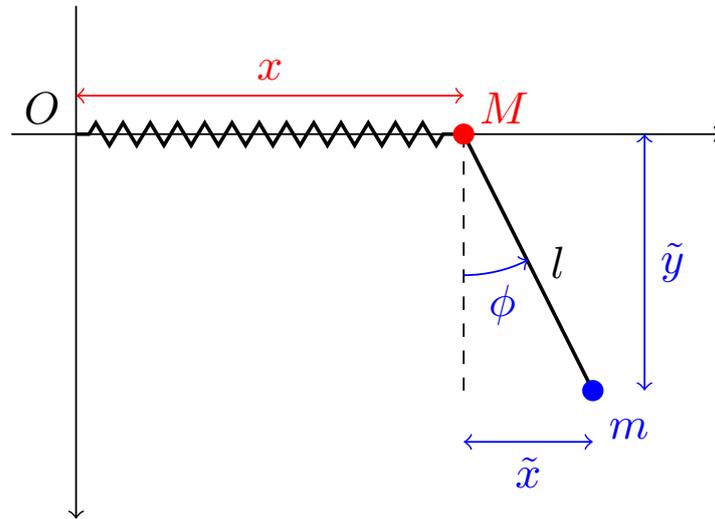


FIGURE 1.5 – Pendule attaché à l'extrémité d'un ressort

1. On note  $\phi$  l'angle que le pendule fait avec la verticale. Exprimer les énergies cinétiques et potentielles des deux masses en fonction de  $x$ ,  $\phi$  et leur dérivées temporelles  $\dot{x}$  et  $\dot{\phi}$ .
2. En déduire le lagrangien du système et écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Traiter le problème par une approche newtonienne (PFD, forces de tension, ...) et retrouver les équations de la question précédente. Comparer l'efficacité des méthodes. △left

Les trois prochains exercices concernent la formulation lagrangienne de problèmes de dynamique d'un point matériel soumis à des forces extérieures ne dérivant pas d'un potentiel : des systèmes non conservatifs et le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Le premier problème donne de plus un exemple de lagrangien dépendant explicitement du temps. Le troisième est particulièrement important car il montre que la structure de la force de Lorentz, qui peut paraître compliquée au premier regard, découle d'une formulation variationnelle simple.

**Exercice 1.12. \* Oscillateur harmonique amorti**

On considère un point matériel de masse  $m$ , repéré par sa position  $\vec{x}$ . Ce point est soumis à une force de rappel  $-k\vec{x}$  et à une force de friction  $-\lambda\dot{\vec{x}}$ .

1. Écrire le PFD pour ce point matériel.
2. Vérifier que les équations du mouvement obtenues par le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \exp\left(\frac{\lambda t}{m}\right) \left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2}k\vec{x}^2\right).$$

3. Effectuer le changement de variable  $\vec{x} \mapsto \vec{r} = \exp\left(\frac{\lambda t}{2m}\right) \vec{x}$  au niveau du lagrangien. Commenter.  $\triangleleft$

**Exercice 1.13. \* Frottement en régime turbulent**

On considère le lagrangien suivant, dépendant d'une unique coordonnée généralisée  $x$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{x}$  :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \exp\left(\frac{2\lambda x}{m}\right) \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - W(x)\right),$$

où  $W$  est une fonction de  $x$ , non déterminée pour le moment.

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée. Interpréter cette équation comme l'équation de la dynamique d'un point matériel, soumis à une force extérieure et à une force de frottement à haute vitesse (proportionnelle à la vitesse au carré). Quelle est la relation entre la fonction  $W$  et la force extérieure ? Comparer à la notion de potentiel. Discuter le signe que  $\lambda$  doit avoir pour que l'équation soit physiquement vraisemblable, selon les différentes cinématiques du problème.  $\triangleleft$

**Exercice 1.14. \*\* Particule chargée dans un champ électromagnétique - Lagrangien**

On considère une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , repérée par sa position  $\vec{x}$ . Elle est plongée dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . On choisit un potentiel électrique  $\phi$  et un potentiel magnétique  $\vec{A}$  correspondant, *i.e.* tels que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

où  $\vec{\nabla}$  désigne le gradient par rapport à  $\vec{x}$ .

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz et écrire le PFD pour la particule.
2. Vérifier que les équations du mouvement obtenues par le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\phi(\vec{x}, t) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (1.24)$$

Indication : On rappelle que la dérivée totale de  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  s'écrit grâce à l'équation (1.14) comme

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \left(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{A},$$

On pourra utiliser l'identité d'analyse vectorielle suivante

$$\vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{A}) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}),$$

valide pour tout vecteur  $\vec{V}$  indépendant de  $\vec{x}$ .

3. Question bonus : Rappeler la notion de transformation de jauge des potentiels  $(\phi, \vec{A})$ . Considérons le lagrangien  $\mathcal{L}'$  correspondant à un autre choix de jauge  $(\phi', \vec{A}')$  : calculer  $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$ . Commenter.  $\triangleleft$

Dans ce chapitre, nous abordons la formulation hamiltonienne de la mécanique analytique, qui est équivalente à la formulation lagrangienne. Notre point de départ est un système lagrangien, de coordonnées généralisées  $q$ , de lagrangien  $\mathcal{L}$  et d'action

$$S[q] = \int_a^b dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t).$$

## 2.1 Moments conjugués et hamiltonien

Une quantité très importante dans la formulation hamiltonienne est le **moment conjugué** de la coordonnée généralisée  $q_i$ , défini à partir du lagrangien comme :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.1)$$

Les équations d'Euler-Lagrange (1.7) se réécrivent alors simplement

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (2.2)$$

Le **hamiltonien** du système est définie comme la transformée de Legendre du Lagrangien :

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

En utilisant l'équation (1.14) pour calculer la dérivée totale du lagrangien, on obtient l'équation d'évolution temporelle du hamiltonien

$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}. \quad (2.4)$$

Une conséquence importante de cette équation est que le hamiltonien est une quantité conservée si et seulement si le lagrangien est indépendant du temps.

*Exemple 5.* Considérons un point matériel de masse  $m$  plongé dans un potentiel extérieur  $V$ . Son lagrangien est donné par  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}, t)$ . Le moment conjugué à la coordonnée  $x_i$  est alors simplement la quantité de mouvement  $p_i = m\dot{x}_i$ .

De plus, le hamiltonien coïncide avec l'énergie mécanique  $H = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + V$ . D'après l'équation (2.4), cette énergie est conservée si et seulement si le potentiel  $V$  ne dépend pas explicitement du temps : on retrouve ainsi la loi de conservation de l'énergie mécanique pour un potentiel conservatif.  $\triangleleft$

**Exercice 2.1. \* Intégrale de Painlevé**

Considérons une particule de masse  $m$  et de position  $\vec{x}$ , plongée dans un potentiel  $V(\vec{x}, t)$ . Sa dynamique est donnée par le lagrangien  $\mathcal{L} = T - V$ , où  $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2$  est l'énergie cinétique de la particule. On choisit un système de coordonnées  $q_i$ , potentiellement dépendantes du temps, telles que la position  $\vec{x}$  s'écrive comme une fonction  $\vec{\chi}(q, t)$ .

1. Exprimer la vitesse  $\dot{\vec{x}}$  en fonction de  $(q, \dot{q}, t)$ , à l'aide des dérivées partielles de  $\vec{\chi}$ .
2. En déduire que l'énergie cinétique s'écrit comme  $T = T_2 + T_1 + T_0$ , avec  $T_n$  homogène de degré  $n$  en les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$ . Remarquer de plus que  $T_0$  et  $T_1$  sont nuls si la fonction  $\vec{\chi}$  est indépendante du temps.
3. Démontrer que le hamiltonien du système s'écrit  $H = T_2 - T_0 + V$ .

Indication : la formule d'Euler pour une fonction  $f$ , homogène de degré  $n$  en les variables  $u_i$  s'écrit

$$\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = nf(u). \quad \triangleleft$$

**Exercice 2.2. \* Moments conjugués et hamiltonien d'une particule chargée**

On utilise les conventions et les notations de l'exercice 1.14, décrivant une particule chargée dans un champ électromagnétique.

1. Déterminer les moments conjugués  $p_i$  associés aux coordonnées  $x_i$ . Comparer au cas d'une particule dans un potentiel.
2. Écrire le Hamiltonien du système. A-t-il une interprétation énergétique ? Quand est-il conservé ?
3. On considère un champ électrique constant  $\vec{E} = E_0\vec{u}_z$ . On choisit comme potentiels électrique et magnétique  $\phi = -E_0z$  et  $\vec{A} = 0$ . Écrire le lagrangien  $\mathcal{L}$  et le hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système dans ce cas. Ce dernier est-il conservé ?
4. On considère toujours le même champ électrique constant, mais on se place dans une autre jauge :  $\phi' = 0$  et  $\vec{A}' = -E_0t\vec{u}_z$ . Écrire le lagrangien  $\mathcal{L}'$  et le hamiltonien  $\mathcal{H}'$  correspondant.  $\mathcal{H}$  est-il conservé ? En utilisant l'équation (2.4), retrouver la quantité conservée de la question précédente.  $\triangleleft$

## 2.2 Équations de Hamilton

Jusqu'alors, en formulation lagrangienne, les variables que nous utilisons pour décrire les systèmes mécaniques étaient les coordonnées généralisées  $q$  et les vitesses généralisées  $\dot{q}$ . La formulation hamiltonienne utilise un autre système de variables : les coordonnées  $q$  et les moments conjugués  $p$ .

Ces derniers, tels que définis par l'équation (2.1), sont des fonctions de  $(q, \dot{q}, t)$ . Afin de passer à la formulation hamiltonienne, nous allons supposer que l'on peut inverser la relation entre  $p$  et  $\dot{q}$ , *i.e.* que l'on peut exprimer les  $\dot{q}_i$  en fonction des  $p_i$ . Cette hypothèse est vérifiée pour la grande majorité des cas

que l'on rencontre en mécanique<sup>1</sup>. Mathématiquement, cela se traduit par l'existence d'une fonction  $\nu$  de  $(q, p, t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\dot{q}_i = \nu_i(q, p, t)$  ou encore

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \nu(q, p, t), t) = p_i. \quad (2.5)$$

À partir de maintenant, on considèrera que l'on a effectué ce changement de variables  $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, p, t)$ . L'espace des variables  $(q, p)$  est appelé **espace des phases**. On va alors considérer le hamiltonien et les autres quantités comme des fonctions de l'espace des phases et du paramètre  $t$ . Notamment, les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial q}$  et  $\frac{\partial}{\partial p}$  sont à comprendre respectivement à  $p$  et  $q$  constant. En particulier, on considèrera l'hamiltonien comme la fonction de  $(q, p, t)$  définie par

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i p_i \nu_i(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t). \quad (2.6)$$

*Exemple 6.* Dans le cas d'une particule dans un potentiel, le moment conjugué  $\vec{p}$  coïncide avec la quantité de mouvement  $m\dot{\vec{x}}$ . L'inversion de la transformation  $\dot{\vec{x}} \mapsto \vec{p}$  est donc triviale, la fonction  $\nu$  étant donnée par  $\nu_i(\vec{x}, \vec{p}, t) = p_i/m$ . Pour une particule dans un champ électromagnétique, le moment conjugué est donné par  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}(\vec{x}, t)$  (cf. exercice 2.2). Ici aussi, l'inversion est aisée, mais elle fait intervenir les coordonnées  $\vec{x}$  et le temps, *via* le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ . Plus précisément, la fonction  $\nu$  est alors

$$\nu_i(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{p_i - qA_i(\vec{x}, t)}{m}. \quad (2.7)$$

Calculons la dérivée partielle du hamiltonien par rapport au moment conjugué  $p_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_j \nu_j(q, p, t) p_j - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t) \right) \\ &= \nu_i(q, p, t) + \sum_j \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i}(q, p, t) p_j - \sum_j \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i}(q, p, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q, \nu(q, p, t), t) \\ &= \nu_i(q, p, t) = \dot{q}_i, \end{aligned}$$

en utilisant la relation d'inversion (2.5). De même, la dérivée partielle du hamiltonien par rapport à  $q_i$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_j \nu_j(q, p, t) p_j - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t) \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial \nu_j}{\partial q_i}(q, p, t) p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \nu(q, p, t), t) - \sum_j \frac{\partial \nu_j}{\partial q_i}(q, p, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q, \nu(q, p, t), t) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \nu(q, p, t), t), \end{aligned}$$

où l'on a encore utilisé l'équation (2.5). On obtient donc que les équations d'Euler-Lagrange (2.2) sont équivalentes aux équations de Hamilton

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}. \quad (2.8)$$

1. Le traitement des cas où la transformation  $\dot{q} \mapsto p$  est non inversible a donné lieu à la riche théorie des contraintes de Dirac, qui dépasse le cadre de ce cours.

*Exemple 7.* Considérons une particule de masse  $m$  dans un potentiel  $V$ . Le hamiltonien du système, égal à l'énergie mécanique de la particule, s'écrit en fonction de  $\vec{p}$  et  $\vec{x}$  comme

$$\mathcal{H}(p, q, t) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(\vec{x}, t).$$

La première équation de Hamilton redonne alors la définition lagrangienne de  $p_i$  :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}.$$

La seconde équation est équivalente à l'équation d'Euler-Lagrange et donc au PFD :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i.$$

On a donc bien réécrit la dynamique du problème comme les équations de Hamilton pour  $\mathcal{H}$ . ◁

### Exercice 2.3. \*\* Particule chargée dans un champ électromagnétique - Hamiltonien

On utilise les notations des exercices 1.14 et 2.2. On veut retrouver la dynamique de la particule chargée grâce à la formulation hamiltonienne.

1. Les moments conjugués et le hamiltonien du système, en tant que fonctions de  $(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ , ont été calculés dans l'exercice 2.2. Utiliser ces résultats pour exprimer le hamiltonien du système comme une fonction sur l'espace des phases.
2. Écrire la première équation de Hamilton et retrouver la relation entre  $\dot{\vec{x}}$  et  $\vec{p}$ .
3. Écrire la seconde équation de Hamilton et retrouver le PFD pour la particule chargée. On se rappellera l'indication de la question 2 de l'exercice 1.14. ◁

### Exercice 2.4. De \*\* à \*\*\* Et c'est reparti pour un tour

Reprendre tout ou une partie des divers exemples et exercices traités dans le chapitre précédent grâce aux équations d'Euler-Lagrange, cette fois-ci grâce à l'approche hamiltonienne.

- Commencer par écrire les moments conjugués et le hamiltonien du système en fonctions de  $(q, \dot{q}, t)$ .
- Le hamiltonien est-il conservé? A-t-il une interprétation énergétique? (On pourra notamment commenter le cas de l'exercice 1.13)
- Effectuer, lorsqu'elle est possible, la transformation  $\dot{q} \mapsto p$  (voir notamment ce qu'il se passe pour les exercices 1.1, 1.4 et 1.5). Exprimer alors le hamiltonien en fonction de  $q$  et  $p$ .
- Écrire les équations de Hamilton et comparer aux équations d'Euler-Lagrange. ◁

Pour terminer cette section, appliquons les équations d'Hamilton au calcul de la dérivée temporelle de l'hamiltonien. On a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{H}(q(t), p(t), t) \right) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \stackrel{(2.8)}{=} \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

d'où l'équation d'évolution du hamiltonien :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}} \quad (2.9)$$

Cette équation peut aussi se retrouver à partir de l'équation lagrangienne (2.4), en effectuant le changement de variable  $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, p, t)$ . Ce calcul est laissé aux lecteurs·trices intéressé·e·s en exercice.

## 2.3 Crochets de Poisson

Une fonction sur l'espace des phases, dépendant de  $(p, q, t)$ , est appelée une **observable**. L'ensemble des observables  $\text{Obs}$  joue un rôle fondamental en formulation hamiltonienne, car il est muni du **crochet de Poisson**, défini comme suit. Soient  $f$  et  $g$  deux observables, le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  est une nouvelle observable définie par

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (2.10)$$

Le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes :

- antisymétrie :  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ,
- règle de Leibniz :  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ ,
- composition ( $\Phi$  fonction de  $\mathbb{R}^p$  vers  $\mathbb{R}$ ) :  $\{f, \Phi(g_1, \dots, g_p)\} = \sum_{i=1}^p \{f, g_i\} \frac{\partial \Phi}{\partial g_i}(g_1, \dots, g_p)$ ,
- identité de Jacobi :  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .

L'antisymétrie est évidente à partir de la définition et les règles de Leibniz et de composition découlent directement de celles pour les dérivées partielles. La preuve de l'identité de Jacobi est laissée en exercice. Enfin, il est clair que l'on a les crochets de Poisson élémentaires suivants :

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (2.11)$$

L'intérêt principal du crochet de Poisson réside dans la propriété suivante. Soit  $\mathcal{O}$  une observable, on a, grâce aux équations de Hamilton (2.8),

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{O}\} = \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left( \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p_i} \right) = \frac{d\mathcal{O}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}.$$

La dynamique de tout observable  $\mathcal{O}$  est donc donnée par

$$\boxed{\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{O}\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}}. \quad (2.12)$$

On remarque que cette équation, évaluée pour  $\mathcal{O} = q_i$  et  $\mathcal{O} = p_i$  redonne les équations de Hamilton pour l'évolution de  $q_i$  et  $p_i$ . Elle est donc équivalente aux équations de Hamilton. De plus, en prenant  $\mathcal{O} = \mathcal{H}$ , on ré-obtient l'équation d'évolution temporelle du hamiltonien (2.9) :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

*Exemple 8.* Présentons un exemple d'application de la formule (2.12). On considère une particule de masse  $m$ , repérée par sa position  $\vec{x}$  et soumise à un potentiel de la forme  $\frac{K}{r^2}$  (avec  $K$  une constante et  $r = |\vec{x}|$ ). Le hamiltonien du système est alors

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{K}{r^2}.$$

$\mathcal{H}$  est indépendant du temps donc est une constante du mouvement. On pose  $\mathcal{V} = \vec{x} \cdot \vec{p} = \sum_i x_i p_i$ . On obtient alors aisément :

$$\{p_i, \mathcal{V}\} = p_i \quad \text{et} \quad \{x_i, \mathcal{V}\} = -x_i.$$

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\{|\vec{p}|^n, \mathcal{V}\} = n|\vec{p}|^{n-1} \quad \text{et} \quad \{r^n, \mathcal{V}\} = -nr^{n-1},$$

d'où

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\} = 2\mathcal{H}. \quad (2.13)$$

$\mathcal{H}$  étant constant au cours du temps, on en déduit simplement que

$$\mathcal{V} = 2\mathcal{H}t + \mathcal{V}_0,$$

avec  $\mathcal{V}_0$  une constante d'intégration égale à  $\mathcal{V}$  à  $t = 0$ . Or

$$\mathcal{V} = \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}} = m\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} r^2.$$

On en déduit donc l'équation temporelle de la distance à l'origine  $r$  :

$$r = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}t^2 + 2\mathcal{V}_0t + C}{m}}, \quad \text{avec } C \text{ constante.} \quad \triangleleft$$

**Exercice 2.5. \*\* Crochets de Poisson du moment cinétique** (sujet C2010, question B.III.3)

On considère un vecteur  $\vec{x}$  dans  $\mathbb{R}^3$  et le moment conjugué  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  associé. On définit le moment cinétique comme  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ . En notations indicielles, on a donc  $L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$ , avec  $\epsilon_{ijk}$  le tenseur de Levi-Civita totalement antisymétrique et avec une sommation sous-entendue sur les indices répétés.

1. Calculer les crochets de Poisson  $\{L_i, p_j\}$  et  $\{L_i, x_j\}$ .
2. En déduire le crochet de Poisson  $\{L_i, L_j\}$ .
3. Établir que  $\{L_i, |\vec{p}|\} = 0$  et  $\{L_i, |\vec{x}|\} = 0$ .
4. En déduire que pour le mouvement d'une particule dans un potentiel central  $V(|\vec{x}|)$ , le moment cinétique  $\vec{L}$  est une constante du mouvement. △

**Exercice 2.6. \*\*\*\* Problème de Kepler et vecteur de Runge-Lenz** (sujet C2010)

On considère le problème de Kepler, *i.e.* le mouvement de deux particules massives interagissant par interaction gravitationnelle. On travaillera ici avec la particule réduite, de position  $\vec{x}$ , qui est soumise à un potentiel central  $V(r) = -\frac{K}{r}$ , où  $r = |\vec{x}|$ . L'hamiltonien du système est  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + V(r)$ . On pourra utiliser les résultats de l'exercice 2.5. Dans cet exercice, les calculs de crochets de Poisson vont en difficulté croissante, le dernier est assez laborieux et est à essayer seulement si tout le reste est bien compris.

1. On définit le vecteur de Runge-Lenz  $\vec{A} = \vec{L} \times \vec{p} + mK\frac{\vec{x}}{r}$ , soit indicielement  $A_i = \epsilon_{ijk}L_kp_k + mK\frac{x_i}{r}$ . Calculer les crochets de Poisson de  $A_i$  avec  $x_j, p_j, r$  et  $|\vec{p}|$ .
2. En déduire que  $\vec{A}$  est une constante du mouvement.
3. Calculer le crochet de Poisson de  $A_i$  avec  $L_j$ .
4. Calculer le crochet de Poisson de  $A_i$  avec  $A_j$ . △

### 3.1 Symétries d'un système lagrangien

On considère un système lagrangien, de coordonnées généralisées  $q_i$  et de paramètre  $t$ . La dynamique du système est donnée par les équations d'Euler-Lagrange. Celles-ci sont des équations différentielles du second ordre sur les coordonnées généralisées  $q_i$ , que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathcal{D}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0.$$

Considérons une transformation de coordonnées inversible  $q \mapsto q' = f(q, t)$ . On a établi dans la section 1.2.2 la covariance des équations d'Euler-Lagrange, *i.e.* le fait que les équations d'Euler-Lagrange sur  $q$  étaient équivalentes à celles sur  $q'$  avec le lagrangien  $\mathcal{L}'$  tel que

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \quad (3.1)$$

On écrit ces équations sous la forme  $\mathcal{D}'(q', \dot{q}', \ddot{q}', t) = 0$ . On dit alors que la transformation est une symétrie des équations du mouvement si les fonctions  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont identiques.

Selon la section 1.2.1, une condition nécessaire pour avoir cela est que les lagrangiens  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  diffèrent d'une dérivée totale :

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}. \quad (3.2)$$

Il s'agit même en fait d'une condition suffisante, résultat que l'on admettra ici (voir exercice 1.8). En utilisant l'équation de covariance (3.1), on obtient

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d\mathcal{G}(q, t)}{dt}. \quad (3.3)$$

On dit alors que la transformation  $q \mapsto q'$  est une **symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}$** , ou encore que le **lagrangien  $\mathcal{L}$  est invariant** sous la transformation  $q \mapsto q'$ .

*Remarque 5.* Attention, il ne faut pas confondre covariance et invariance (notamment, il convient de bien distinguer le sens des deux équations (3.1) et (3.3)). ◁

### 3.2 Transformations continues et symétries infinitésimales

On considère une famille de transformations de coordonnées  $q \mapsto q^{(\alpha)} = f(q, t, \alpha)$  dépendant "lissement" d'un paramètre réel  $\alpha$  et telle que la transformation pour  $\alpha = 0$  soit triviale, *i.e.*  $f(q, t, \alpha = 0) = q$ . On dit que cette transformation est une **symétrie continue** du lagrangien  $\mathcal{L}$  si elle est une symétrie pour toute valeur du paramètre  $\alpha$ . En utilisant la définition (3.3) d'une symétrie, on en déduit que la transformation est une symétrie continue de  $\mathcal{L}$  si et seulement s'il existe  $\mathcal{G}(q, t, \alpha)$  telle que

$$\mathcal{L}(q^{(\alpha)}, \dot{q}^{(\alpha)}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d\mathcal{G}(q, t, \alpha)}{dt}. \tag{3.4}$$

Dans ce cas, on sait de plus que  $\mathcal{G}(q, t, \alpha = 0) = 0$  car la transformation à  $\alpha = 0$  est égale à l'identité.

Considérons maintenant le cas d'une transformation infinitésimale proche de l'identité, *i.e.* considérons la transformation ci-dessus pour un paramètre  $\alpha = \epsilon + o(\epsilon)$  et effectuons un développement limité à l'ordre 1 en  $\epsilon$ .  $q^{(\alpha)}$  dépendant de  $\alpha$  de manière lisse et étant égal à  $q$  pour  $\alpha = 0$ , on peut écrire, à l'ordre 1 en  $\epsilon$ ,  $q^{(\alpha)} = q + \delta q = q + \epsilon \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + o(\epsilon)$ . De même, on développe  $\mathcal{G}$  à l'ordre 1 en  $\epsilon$  comme  $\mathcal{G}(q, t, \alpha) = \epsilon \mathcal{F}(q, t) + o(\epsilon)$ . En développant la condition de symétrie continue à l'ordre 1 en  $\epsilon$ , on obtient

$$\delta \mathcal{L} := \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt} + o(\epsilon). \tag{3.5}$$

On parle alors de **symétrie infinitésimale** du lagrangien  $\mathcal{L}$ .

*Exemple 9.* Considérons le lagrangien de l'oscillateur harmonique à deux dimensions

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

On vérifie facilement que ce lagrangien est invariant sous la transformation de rotation

$$x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \quad \text{et} \quad y^{(\alpha)} = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y.$$

En écrivant  $\alpha = \epsilon + o(\epsilon)$ , la transformation infinitésimale s'écrit

$$\delta x = \epsilon y \quad \text{et} \quad \delta y = -\epsilon x.$$

On vérifie alors que la variation du lagrangien  $\delta \mathcal{L}$  est nul à l'ordre 1 en  $\epsilon$ . ◁

*Exemple 10.* Considérons le lagrangien d'une particule en chute libre

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz.$$

On considère la transformation de translation suivante :

$$z^{(\alpha)} = z + \alpha.$$

Il s'agit d'une symétrie de  $\mathcal{L}$ , car

$$\mathcal{L}(z^{(\alpha)}, \dot{z}^{(\alpha)}, t) = \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) - \frac{d}{dt} (mg\alpha t).$$

Au niveau infinitésimal, on a  $\delta z = \epsilon$  et  $\delta \mathcal{L} = -\epsilon \frac{d}{dt} (mgt)$ . ◁

### 3.3 Théorème de Noether et quantités conservées

Dans cette sous-section, nous allons présenter le théorème de Noether, qui associe à toute symétrie infinitésimale d'un lagrangien une quantité conservée au cours du temps, *i.e.* une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange. Il s'agit d'un théorème très général, qui a joué un rôle fondateur dans la physique théorique moderne. Nous en donnerons ici un énoncé simplifié, pour éviter de se lancer dans des notations et des calculs trop compliqués. Avant cela, nous allons illustrer sur un exemple simple le lien entre symétries et lois de conservation.

*Exemple 11.* On dit qu'une coordonnée généralisée  $q_i$  est une **variable cyclique** d'un lagrangien  $\mathcal{L}$  si celui-ci n'en dépend pas explicitement, *i.e.* si  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ .

Il est alors clair que la transformation  $q_i \mapsto q_i + \epsilon$  est une symétrie infinitésimale du Lagrangien, dans le sens où elle vérifie la condition (3.5). De plus, par les équations d'Euler-Lagrange (1.7) sur  $q_i$ , on obtient directement que le moment conjugué

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

est une quantité conservée au cours du temps. On a donc relié l'invariance du lagrangien par la "translation" de coordonnée  $q_i$  avec la conservation du moment conjugué  $p_i$ . Remarquons qu'il est facile de généraliser cette loi de conservation au cas où  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  est une dérivée totale (cf exercice 3.1).

Dans le cas où la coordonnée  $q_i$  considérée est une coordonnée cartésienne d'espace-temps et que l'on considère le lagrangien d'un point matériel, on relie ainsi l'invariance par translation spatiale avec la **conservation de la quantité de mouvement**. De même, dans l'exemple 4 du problème à deux corps, nous avons obtenu un lagrangien indépendant de la position du centre de masse  $\vec{X}$  : on en déduit la conservation de la quantité de mouvement totale du système  $M\dot{\vec{X}}$ . ◁

Énonçons maintenant le **théorème de Noether**. Nous utiliserons les conventions et notations de la sous-section précédente. On considère un lagrangien  $\mathcal{L}$  possédant une symétrie infinitésimale

$$q'_i = q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon g_i(q, t).$$

La symétrie revient alors à l'existence d'une quantité  $\mathcal{F}$  dépendant de  $q$  et de  $t$  telle que :

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt} + o(\epsilon).$$

Le théorème de Noether stipule alors que la quantité

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i - \mathcal{F} \tag{3.6}$$

est conservée au cours du temps. On appelle cette grandeur la **charge de Noether** associée à la symétrie.

*Exemple 12.* Reprenons l'exemple de la chute libre 10 traité ci-dessus. On avait une symétrie infinitésimale

$$\delta z = \epsilon \quad \text{et} \quad \delta \mathcal{L} = -\epsilon \frac{d}{dt} (mgt),$$

soit avec les notations du paragraphe  $g_z = 1$  et  $\mathcal{F} = -mgt$ . Par le théorème de Noether, la grandeur

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} g_z - \mathcal{F} = m\dot{z} + mgt$$

est conservée. Cette loi de conservation est en accord avec l'équation du mouvement  $m\ddot{z} = -mg$ .  $\triangleleft$

### Exercice 3.1. \* Variables quasicycliques et théorème de Noether

On considère un lagrangien  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . On suppose qu'il existe une coordonnée généralisée  $q_i$  et une grandeur  $\mathcal{G}(q, t)$  telles que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}. \quad (3.7)$$

On dira que  $q_i$  est une variable quasicyclique de  $\mathcal{L}$ .

1. En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée  $q_i$ , trouver une intégrale première du mouvement.
2. Relier la propriété (3.7) à une symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}$  (penser aux translations de coordonnée  $q_i$ ).
3. Écrire la charge de Noether associée à cette symétrie et comparer à la grandeur conservée obtenue à la question 1.
4. Réinterpréter l'exemple 12 grâce à ces résultats.  $\triangleleft$

### Exercice 3.2. \*\* Symétries de rotation et moment cinétique

On considère un lagrangien, de coordonnées cartésiennes  $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , de la forme  $\mathcal{L} = T - V$  où  $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2$  est l'énergie cinétique et où  $V = V(r)$  est un potentiel central, avec  $r = |\vec{x}|$ .

1. Soit  $R$  une matrice de rotation. Montrer que le lagrangien  $\mathcal{L}$  est invariant sous la transformation de coordonnées  $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x}$ .
2. On se concentre sur les rotations d'axe  $Oz$ . La rotation d'angle  $\alpha$  est donnée par

$$x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, \quad y^{(\alpha)} = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)x, \quad z^{(\alpha)} = z.$$

Écrire la transformation infinitésimale associée et montrer que le lagrangien  $\mathcal{L}$  vérifie la condition de symétrie infinitésimale (3.5).

3. Écrire la charge de Noether associée. Qu'en est-il pour les rotations d'axes  $Ox$  et  $Oy$ ? Interpréter.
4. Exprimer le lagrangien  $\mathcal{L}'$  du système en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  (voir aussi l'exercice 1.10). Étudier la dépendance de  $\mathcal{L}'$  en  $\theta$ . Que peut-on en conclure? Comparer aux questions précédentes.  $\triangleleft$

L'énoncé du théorème de Noether que nous avons donné ici est une version simplifiée d'un résultat plus général. Il correspond au cas d'une transformation de symétrie impliquant seulement les coordonnées :  $q \mapsto q' = f(q, t)$ .

Une première généralisation possible est de considérer aussi des transformations du paramètre  $t$ . Ceci permettrait par exemple de traiter le cas d'une translation temporelle  $t \mapsto t' = t + \alpha$ . On montrerait alors qu'un lagrangien est invariant sous cette transformation s'il ne dépend pas explicitement du temps. La charge de Noether associée à cette symétrie est le hamiltonien du système. On avait en fait déjà observé ce lien entre invariance temporelle et conservation du hamiltonien *via* l'équation (2.4). Ainsi, **l'invariance par translation temporelle** d'un système mécanique est liée, par le théorème de Noether, à la **conservation de l'énergie**.

Une autre généralisation possible traite de ce qu'on appelle les symétries dynamiques. Il s'agit de transformations faisant aussi intervenir les vitesses généralisées  $\dot{q}_i : q \mapsto q' = f(q, \dot{q}, t)$ . Là encore, l'invariance du lagrangien sous ces transformations est liée à la conservation d'une charge de Noether. Un exemple de quantité conservée associée à une symétrie dynamique est le vecteur de Runge-Lenz dans le problème de Kepler (voir exercice 2.6).

Nous allons clore cette section par un exercice un peu particulier. Celui-ci est volontairement très vague et donc potentiellement difficile : le but est de laisser aux lecteurs·trices la possibilité d'aborder un problème sans questions guidées et de chercher librement les informations que l'on peut en tirer. Il n'est pas attendu une résolution complète du problème mais plutôt une analyse de ce qu'il est possible de dire sur le sujet grâce à une approche de mécanique analytique. Il pourra être bénéfique d'avoir déjà résolu les autres exercices de cette section avant de commencer celui-ci.

**Exercice 3.3. \*\*\* Problème libre : particule dans un champ magnétique à direction unique**

Considérons un champ magnétique dirigé selon l'axe  $Oz$  et dépendant uniquement de la distance  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  à cet axe :

$$\vec{B} = f(\rho)\vec{e}_z.$$

On plonge une particule massive et chargée dans ce champ. Que pouvez-vous dire sur son mouvement ? Indication : étonnamment, on suggère d'aborder le problème avec une approche de mécanique analytique, par exemple lagrangienne.

Vraie indication : on pourra notamment se demander si le système possède des symétries et comment les exploiter ? ◁