Recueil d'exercices pour les MP*

Julien Allasia - ENS de Lyon

Remarques préliminaires

- Les rubriques "A retenir" au début de chaque thème ne se veulent ni exhaustives ni représentatives du cours : elles sont là pour résumer quelques points clés qui apparaissent dans les exercices présentés.
- La difficulté des exercices est indiquée par des étoiles. Attention cependant, l'évaluation de la difficulté d'un exercice est assez subjective, ne vous y fiez donc pas trop.
  1. Une étoile = exercice plutôt court, facile ou pas très conceptuel, mais pas forcément trivial pour autant ! Il n'est pas forcément inquétant de ne pas réussir ces exercices.
  2. Deux étoiles = exercice plus difficile, long et/ou conceptuel. Il n'est pas inquiétant de ne pas arriver à résoudre ces exercices sans indication.
  3. Trois étoiles = exercice difficile, réservé aux meilleurs, qu'on ne peut résoudre qu'en ayant très bien assimilé le cours et fait un certain nombre d'exercices de niveau inférieur, voire qu'on ne peut pas résoudre sans être guidé.
- Il convient d'être raisonnable dans la difficulté des exercices que l'on recherche, surtout lorsqu'on est seul face à l'exercice (à la différence d'un exercice fait en TD ou en colle). La grande majorité des exercices présentés ici nécessitent un recul important sur le cours. Il est donc impératif d'avoir fait des exercices d'applications directes du cours avant toute chose. Passer un temps déraisonnable sur un exercice difficile alors que le cours et les exercices classiques ne sont pas maîtrisés est contre-productif.
- Les titres des exercices peuvent soit vous donner une indication sur la manière de résoudre l'exercice, soit vous permettre d'inscrire l'exercice dans un contexte mathématique (cas particulier d'un gros théorème, utilisation d'une méthode classique, etc.).

1 Algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

A retenir

- En dimension finie, penser à utiliser des supplémentaires.
- Introduire des applications linéaires bien choisies (dont la surjectivité ou l'injectivité est claire).
- Bien comprendre l'intérêt majeur de la dimension finie : transformer une CN en CNS, une inclusion en égalité, une application linéaire injective ou surjective en isomorphisme, une somme en somme directe...

Exercice 1 (*) *Bases duale et antéduale*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual. Soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie, et admet une base $(e_i)_{i\in I}$. La famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est-elle libre ? génératrice ?

Exercice 2 (*) *Une caractérisations des homothéties*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $k \in \{1, ..., n-1\}$. Que dire d'un endormorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de E de dimension k ?

Exercice 3 (*) *Un théorème de factorisation*

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f) \iff \exists\, h \in \mathrm{GL}(F), k \in \mathcal{L}(E),\ h \circ g = f \circ k.$$

Exercice 4 (**) *Détermination d'une image*
Soit E, F, G, H quatre K-espaces vectoriels de dimension finie, $a \in \mathcal{L}(E,F)$, $b \in \mathcal{L}(G,H)$ et $\psi_{a,b}$ l'application de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,H)$ définie par

$$\psi_{a,b}(u) = b \circ u \circ a.$$

Déterminer l'image de $\psi_{a,b}$ en fonction de a et b.
Indication : commencer par déterminer la dimension du noyau.

Exercice 5 (***) *Sommes de projecteurs*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p_1, ..., p_m$ des projecteurs de E.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ est un projecteur si et seulement si pour tous $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.
Indication : Pour le sens direct, montrer que $\mathrm{Im}\left(\sum_i p_i\right) = \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Im}(p_i)$.
Bonus : donner une condition sur K pour que le résultat soit vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par K et donner un exemple de corps K ne vérifiant pas cette condition pour lequel le résultat est faux.

1.2 Matrices

A retenir

- Bien comprendre le lien entre matrice et application linéaire et savoir basculer de l'un à l'autre, plutôt que de voir une matrice seulement en tant que telle
- La méthode de récurrence sur la dimension de l'espace
- Bien distinguer équivalence (problèmes de rang, valable aussi pour les matrices non carrés) et similitude (beaucoup plus fort, il faut souvent revenir au point de vue endomorphisme).

Exercice 6 (*) *Un problème d'équivalence de matrices*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Exercice 7 (*) *Réduction de Jordan en dimension 4*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 2. Soit $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (*) *Fonctions multiplicatives et inversibilité*
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)\, f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 9 (*) *Déterminant de la transposition*
Déterminer le déterminant de l'application linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right. .$$

Exercice 10 (**) *Matrices de rang 1*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $M = X^tY$.
2. Montrer que si M est de rang 1, $I_n + M$ est inversible si et seulement $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$, et donner une expression de son inverse.

Exercice 11 (**) *Un exemple de récurrence sur la dimension de l'espace*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle.
Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Bonus : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et un contre-exemple sur un corps K ne vérifiant pas cette condition.

Exercice 12 (**) *Matrices étant des crochets de Lie*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 \iff \exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = BC - CB.$$

Indication : Utiliser l'exercice précédent.
Bonus : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1.3 Réduction des endomorphismes

Exercice 13 (*) *Eléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions*
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application qui à $f \in E$ associe la fonction définie par

$$T(f) : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 14 (**) *Eléments propres d'un endomorphisme d'un espace de suites*
Soit E l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, bornées. Soit T l'application qui à $u \in E$ associe la suite $\left(\dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 15 (*) *Matrices strictement stochastiques*
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients réels strictement positifs telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et que l'espace propre associé (sur $\mathbb{C}$) est une droite.
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.
3. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.

Exercice 16 (**) *Trigonalisation simultanée*
Soit I un ensemble quelconque, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise tous les f_i.
Indication : Commencer par montrer que les f_i admettent un vecteur propre en commun en utilisant un raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace.

Exercice 17 (*) *Spectre de la comatrice*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Déterminer les valeurs propres de la comatrice de A en fonction des λ_i.

Exercice 18 (***) *Endomorphismes semi-simples*
Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

(ii) Le polynôme minimal de u est sans facteur carré, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $r \geqslant 1$ et $P_1, ..., P_r$ des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts tels que $P = \lambda\, P_1 \dots P_r$.

Exercice 19 (**) *Endomorphismes simples*
Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est irréductible sur K.

Indication : Pour le sens direct, on pourra d'abord justifier qu'un endomorphisme vérifiant *(i)* est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = E$.

Exercice 20 (*) *Similitude et extension de corps*
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (**) *Matrices circulantes*
Soit $n \geqslant 1$. Montrer que les matrices de la forme

$$C_{a_0,\dots,a_{n-1}} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont simultanément diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer leurs valeurs propres.

2 Algèbre générale

Exercice 22 (*) *Un énoncé très court*
Quels sont les groupes qui possèdent un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 23 (**) *Groupes finis d'exposant 2*

1. Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.
   Indication : On pourra commencer par montrer que G est abélien.
2. En déduire que tout groupe d'ordre $2p$ avec p premier possède un élément d'ordre p.

Exercice 24 (**) *Cyclicité de K^* : preuve via l'exposant d'un groupe abélien fini*

1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
2. En déduire que si K est un corps, tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Exercice 25 (**) *Cyclicité de K^* : preuve par dénombrement*
Soit K un corps et G un sous-groupe fini de K^*. Dénombrer l'ensemble des éléments de G d'ordre d pour tout d diviseur de $|G|$, et en déduire que G est cyclique.
Indication : On pourra commencer par dénombrer l'ensemble des éléments d'ordre *divisant d*.

Exercice 26 (***) *Prolongement des caractères d'un groupe abélien fini*
Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Soit $\chi : H \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Montrer que χ se prolonge en un morphisme de groupe $\tilde{\chi} : G \to \mathbb{C}^*$.

Exercice 27 (*) *Formule de Legendre*
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$
2. Déterminer le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de l'entier 100!.

Exercice 28 (*) *Anneau intègre fini*
Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps. *Variante* : Montrer qu'une algèbre intègre de dimension finie est un corps.

Exercice 29 (**) *Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*
Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. Déterminer le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et montrer que si $x \neq 0$,

$$\begin{cases} x \text{ est un carré} & \iff \quad x^{\frac{p-1}{2}} = 1; \\ x \text{ n'est pas un carré} & \iff \quad x^{\frac{p-1}{2}} = -1. \end{cases}$$

Exercice 30 (**) *Polynômes cyclotomiques*
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\phi_d = \prod_{1 \leqslant k \leqslant d,\ k \wedge d = 1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{d}}\right).$$

Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 31 (**) *Lemme de Gauss*

1. Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ non nuls. On note $c(P), c(Q)$ les PGCD des coefficients de P et Q. Montrer que

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement s'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et tel que $c(P) = 1$.

Exercice 32 (**) *Critère d'Eisenstein*
On admet le lemme de Gauss (exercice précédent).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier, tels que

(i) p ne divise pas a_n ;
(ii) p divise $a_0, \ldots, a_{n-1}$;
(iii) p^2 ne divise pas a_0.

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Exercice 33 (***) *Corps cyclotomique*
On admet le critère d'Eisenstein (exercice précédent). Soit p un nombre premier. Montrer que

$$\mathbb{Q}[e^{\frac{2i\pi}{p}}] = \{Q(e^{\frac{2i\pi}{p}}),\ Q \in \mathbb{Q}[X]\}$$

est un corps, et déterminer sa dimension comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

3 Analyse réelle

3.1 Autour des formules de Taylor

Exercice 34 (*) *Dérivées contrôlées par un polynôme*
Soit P une fonction polynomiale réelle de degré impair et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(x)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Que dire de f ?

Exercice 35 (*) *Une application de l'égalité de Taylor-Lagrange*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $|f''(x)| \geqslant 4$.

Exercice 36 (*) *Théorème de Glaeser*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ positive. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable.

Exercice 37 (**) *Une méthode "intégrer pour dériver"*
Déterminer tous les morphismes continues de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL_n(R)}, \cdot)$.

Exercice 38 (**) *Théorème de Darboux*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle (autrement dit, toute dérivée vérifie les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 39 (**) *Théorème de division*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $f''(0) \neq 0$ et $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$. Montrer qu'il existe g $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g^2 = f$.

Exercice 40 (**) *Caractérisations des dérivations*
Soit $T : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ une application linéaire telle que si f possède un maximum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $T(f)(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $T(f) = \varphi f'$.

Exercice 41 (***) *Inégalités de Kolmogorov*
Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Montrer que les M_k sont finis et que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

3.2 Fonctions convexes

Exercice 42 (**) *Une définition équivalente de convexité*
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in [0,1],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 43 (*) *Minimisation d'une fonction convexe*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $f'' \geq \alpha$. Montrer que f possède un unique minimum local et global. Qu'en est-il si on suppose seulement que $f'' > 0$?

Exercice 44 (*) *De la manipulation d'inégalités de convexité*
Soit $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto x\, f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est.

3.3 Suites numériques

A retenir

- Retenir la méthode du $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour les suites récurrentes (accompagnée d'une intuition discret/continu), et conclure avec le théorème de Cesàro.
- Pour les suites définies implicitement, faire des dessins, étudier la monotonie pour aboutir à la convergence, puis déterminer la limite et le développement en réinjectant successivement la suite dans son équation.

Exercice 45 (**) *Etude asymptotique d'une suite définie implicitement (1)*
Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, notée x_n. Donner un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ de x_n.

Exercice 46 (**) *Etude asymptotique d'une suite définie implicitement (2)*
Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives $u_n < v_n$ pour n assez grand, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 47 (**) *Etude asymptotique d'une suite définie implicitement (3)*
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique racine positive notée x_n. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 48 (*) *Etude asymptotique d'une suite définie par récurrence*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$. Donner un équivalent de u_n.
Indication : On pourra considérer $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Cette astuce est très classique pour traiter ce genre d'exercices.

3.4 Intégrales généralisées

A retenir

- Ne pas oublier de commencer par déterminer quelles sont les bornes impropres, et de préciser que la fonction est localement intégrable par ailleurs (par exemple, parce qu'elle est continue).
- La première chose à tester pour étudier une intégrale est de trouver un équivalent ou un développement asymptotique de l'intégrande. En cas d'échec, essayer de changer l'intégrale (restreinte à des segments excluant les bornes impropres) par changement de variable et/ou IPP.
- Quand on utilise un développement asymptotique pour déterminer la nature d'une intégrale, il faut s'arrêter au premier terme divergent de signe constant, ou absolument convergent (sinon les théorèmes de comparaison à des fonctions positives ne s'appliquent pas !)

Exercice 49 (*) *Nature de deux intégrales impropres*
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, \mathrm{d}t$
2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t}\, \mathrm{d}t$

Exercice 50 (*) *Nature d'une intégrale impropre*
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^a)}{x^b}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 51 (*) *Intégrabilité d'une fonction*
Pour quels réels α la fonction

$$f : x \mapsto x^\alpha \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1 + t^2}}\, \mathrm{d}t$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 52 (**) *Intégrabilité et limites en l'infini*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f'^2 sont intégrables.
Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Remarque : Il est recommandé de garder en tête qu'en général, l'intégrabilité n'implique pas la convergence vers 0 en $+\infty$, et d'avoir un contre-exemple en tête.

Exercice 53 (***) *Un changement de variable*
Soit $n \geqslant 2$ et $a_1 < b_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ des réels.
On définit pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{b_1, ..., b_{n-1}\}$,

$$\phi(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(x - b_i)}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support bornée. Montrer qu'alors $f \circ \phi$ l'est également et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ \phi = \int_{\mathbb{R}} f.$$

3.5 Séries numériques

A retenir Pour déterminer la nature d'une série (grosso modo, par ordre de priorité) :

1. Si le terme général est positif, le comparer à quelque chose de plus simple (majoration ou équivalent) ;
2. Sinon, essayer d'obtenir un développement asymptotique qu'on arrête au premier terme absolument convergent (ou positif divergent) ;
3. Utiliser le critère spécial des séries alternées si besoin ;
4. Regrouper par paquets (par exemple, pour les termes généraux ayant un comportement périodique, ou faisant apparaître une fonction discontinue comme la partie entière...) ;
5. Voir s'il n'y a pas un télescopage (surtout si l'on demande de calculer la somme) ;
6. Revenir à la suite des sommes partielles plutôt que de regarder le terme général seulement :
   - Les majorer si le terme général est positif ;
   - Utiliser une comparaison série-intégrale si le terme général fait apparaître une fonction décroissante ou croissante ;
   - Utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 54 (*) *Nature de séries*
Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\, dt$, en fonction de $\alpha > 0$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \cos\left(n^2\,\pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n\, f(1/n)$ où $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$;
5. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n\, a^n}{\sum_{k=1}^{n} k!}$ en fonction de $a > 0$.

Exercice 55 (*) *Calcul d'une somme*
Montrer la convergence de la série suivante et calculer sa somme :

$$\left(\ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\, \ln(n+2)}\right)\right)_{n\geqslant 2}.$$

Exercice 56 (**) *Une comparaison série-intégrale inhabituelle*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictements positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et en cas d'existence $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. Si $\sum u_n$ diverge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
2. Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha < 1$.
3. Application : Remontrer le critère de Bertrand à l'aide de 1.

Exercice 57 (***) *Une comparaison série-intégrale raffinée*
Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{1/n}.$$

Exercice 58 (**) *Séries convergentes à terme général décroissant*
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence leurs sommes sont égales.
Conséquence (qui découle aussi de Fubini) : Si $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs, et si $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, alors $\sum R_n$ et $\sum n\, u_n$ ont même nature et en cas de convergence, leurs sommes sont égales.

3.6 Familles sommables

Exercice 59 (*) *Une interversion de sommes (1)*
On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer la quantité $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty}(\zeta(q) - 1)$.

Exercice 60 (*) *Une interversion de sommes (2)*
On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer la quantité $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty}(-1)^q\,(\zeta(q) - 1)$.

Exercice 61 (*) *Une interversion de sommes (3)*
On rappelle l'existence de la constance d'Euler $\gamma > 0$, telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer, en fonction de γ, la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty}(-1)^q\,\frac{\zeta(q) - 1}{q}.$$

Exercice 62 (*) *Convolution de fonctions arithmétiques*
Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d).$$

On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sont absolument convergentes. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ est absolument convergente et donner une expression de sa somme.

3.7 Intégrales à paramètres

Exercice 63 (*) *"Norme" α d'une fonction*
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose, pour $\alpha > 0$,

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha\, \mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}.$$

Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0 et $+\infty$.
Remarque : Le résultat en $+\infty$ est très classique et justifie l'appellation de "norme infinie".

Exercice 64 (*) *Calcul d'une intégrale à paramètres*
Soit $a, b > 1$. Calculer
$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 65 (**) *Etude asymptotique d'une intégrale à paramètre*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Pour $t \geqslant 0$, on définit
$$g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx} \mathrm{d}x.$$
Donner un équivalent en $+\infty$ de g.

4 Topologie

A retenir

- Attention aux fausses vérités en topologie. Toujours avoir en tête des contre-exemples très simples (par exemple, sur $\mathbb{R}$). Par exemple, on peut penser beaucoup de choses fausses sur la distance à un fermé (voir exercice plus loin).
- Bien comprendre l'intérêt de la compacité : avoir des limites en extrayant, transformer des inf en min, des sup en max, des inégalités larges en inégalités strictes...

4.1 Généralités de topologie

Exercice 66 (*) *Une preuve epsilonesque*
Soit E un espace vectoriel normé (ou métrique). Soit D une partie dense de E. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue qui admet un prolongement continu à $D \cup \{x\}$ pour tout $x \in E$. Montre que f admet un prolongement continu sur E.

Exercice 67 (*) *Autour de la distance entre deux fermés*
Soit E un espace vectoriel normé (ou un espace métrique). Soit A et B deux parties non vides disjointes de E. On définit la distance de A à B par
$$d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

1. On suppose A fermé. A-t-on $d(A,B) > 0$? Et si l'on suppose B fermé ? réduit à un point ? compact ?
2. Donner des conditions suffisantes sur A, B ou E pour qu'il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $d(A,B) = d(x,y)$.
3. Si A et B sont fermés, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 68 (*) *Distance à un fermé en dimension infinie*
Soit $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et
$$F = \left\{ f \in \mathcal{E},\ f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f = 1 \right\}.$$
Montrer que F est fermé mais que la distance de 0 à F n'est pas atteinte.

4.2 Compacité

Exercice 69 (**) *Théorème de Riesz*
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) E est de dimension finie.
(ii) La boule unité fermée de E est compacte.
(iii) La sphère unité de E est compacte.
(iv) De toute suite bornée de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

Indication : On pourra s'inspirer du cas où E est un espace préhilbertien.

Exercice 70 (**) *Un théorème de point fixe*
Soit K un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et $f : K \to K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K, \;\; d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f possède un unique point fixe α et que si $x_0 \in K,\ x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers α.

Exercice 71 (***) *Un exemple d'extraction diagonale*
On note $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\right\}$, qu'on munit de $||u||_{\ell^1} = \sum |u_n|$.
Soit $a, b \in \ell^1(\mathbb{N})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$. On définit

$$K = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}),\ \forall n,\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n\}.$$

Montrer que K est un compact de $\ell^1(\mathbb{N})$.

4.3 Applications linéaires et multilinéaires continues

Exercice 72 (*) *Continuité d'une forme linéaire en dimension infinie*
Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle sur E.

1. A quoi peut-être égal l'adhérence de $\mathrm{Ker}(f)$?
2. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 73 (*) *Un calcul de norme triple (1)*
On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$, et l'application f définie pour $x \in E$, par

$$f(x) = \int_0^1 x - \int_{-1}^0 x.$$

Montrer que f est linéaire continue et déterminer sa norme subordonnée. Est-elle atteinte, c'est-à-dire existe-t-il $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |||f|||\ ||a||$?

Exercice 74 (*) *Un calcul de norme triple (2)*
On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), ||.||_1)$.

1. Soit $g \in E$. Montrer que l'application $\phi_g : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 g(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme subordonnée.
2. Qu'en est-il si l'on considère la fonction $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \in L^1(]0,1])$?

4.4 Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 75 (**) *Orbites denses dans le cercle*

1. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{i\alpha n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$.

4.5 Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 76 (*) *Fermeture des applications coercives*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
2. Généralisation : Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout K compact de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F.

Exercice 77 (***) *Théorème de l'application ouverte en dimension finie*
Soit E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que s'équivalent :

(i) Pour tout $O \subset E$ ouvert, $u(O)$ est ouvert ;

(ii) Il existe $O \subset E$ ouvert non vide tel que $u(O)$ est ouvert ;

(iii) u est surjective.

Exercice 78 (**) *Boule minimale contenant une partie bornée*
Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et X une partie bornée de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant X. Cette boule est-elle unique ?
Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.

4.6 Connexité par arcs

Exercice 79 (*) *Une utilisation classique de la connexité par arcs*
Existe-t-il une fonction continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 2$?

Exercice 80 (**) *Connexité par arcs du complémentaire d'un compact*
Soit E un espace vectoriel normé **réel**. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que E est de dimensoin finie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $E \setminus F$ soit connexe par arcs.
2. (Généralisation) On ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs si et seulement si F n'est pas un hyperplan fermé.
   On pourra admettre qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Noter que si H n'est pas fermé, il est dense, car $\bar{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 81 (**) *Connexité par arcs du complémentaire d'un compact*
On admet le théorème de Riesz : la sphère unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compacte.
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et K un compact de E. Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

Exercice 82 (***) *Un exemple d'utilisation de la connexité*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, Ω un ouvert connexe par arcs non vide de E tel que $\bar{\Omega}$ est compact. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une fonction continue telle que $f(\Omega)$ est ouvert. Montrer qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $d(x_0, \partial\Omega) = d(f(x_0), \partial\Omega)$.
On pourra admettre qu'un ensemble connexe par arcs est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Indications : Commencer par montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \geqslant d(f(x), \partial\Omega)$. Ensuite, pour montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \leqslant d(f(x), \partial\Omega)$, raisonner par l'absurde et montrer qu'alors f est surjective.

5 Algèbre bilinéaire

5.1 Généralités

Exercice 83 (**) *Détermination d'une projection orthogonale*
Calculer
$$\inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Indication : On pourra utiliser la formule $\int_0^{\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x = k!$ pour tout $k \geqslant 0$.

Exercice 84 (**) *Théorème ergodique de Von Neumann en dimension finie*
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| \leqslant 1$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} u^k\right)_p$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
Indication : On pourra commencer par montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 85 (**) *Théorème de projection sur un convexe fermé en dimension finie*
Soit E un espace euclidien, C un convexe fermé non vide de E, $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p(x) \in C$ tel que $||x - p(x)|| = d(x, C)$.
   Indication : Pour l'unicité, on pourra utiliser l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, $2\,AB^2 + 2\,BC^2 = AC^2 + BD^2$.
2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0$.
3. Montrer que l'application p est 1-lipschitzienne.

Bonus : Montrer par des contre-exemples la nécessité des hypothèses.

5.2 Endomorphismes symétriques et orthogonaux

Exercice 86 (*) *Réduction simultanée en base orthonormée*
Soit I un ensemble quelconque, E un espace euclidien, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E autoadjoints, commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous les f_i.
Variante : En remplaçant autoadjoints par trigonalisables, montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui trigonalise tous les f_i.

Exercice 87 (**) *Un exemple de récurrence sur la dimension de l'espace*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 88 (**) *Résolution d'une équation matricielle*
Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout valeur propre complexe λ de A, $|\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S - AS^tA = B$.

6 Suites et séries de fonctions

6.1 Convergence simple et convergence uniforme

Exercice 89 (**) *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 90 (*) *Suite de polynômes convergeant uniformément vers l'exponentielle*
Montrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ pour $n \geqslant 1$ par $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 91 (**) *Etude d'une fonction somme d'une série de fonctions (1)*
Soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha x}$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 92 (**) *Etude d'une fonction somme d'une série de fonctions (2)*
Montrer que la formule $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et déterminer des équivalents de f en -1 et $+\infty$.

Exercice 93 (**) *Autour du critère spécial des séries alternées*
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ($\circ\, n$ signifie composée n fois).

Exercice 94 (***) *Théorème de Whitney*
Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6.2 Théorèmes d'interversion

Exercice 95 (*) *Une interversion limite-intégrale (1)*
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

Exercice 96 (*) *Une interversion limite-intégrale (2)*
Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$. Déterminer $\lim_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{t\,(a-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 97 (*) *Une interversion série-intégrale (1)*
Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{2\,(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 98 (*) *Une interversion série-intégrale (2)*
Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}.$$

En déduire une expression de $\ln 2$ sous forme de série.

Exercice 99 (**) *Des applications successives de la convergence dominée*
Donner un développement asymptotique à deux termes quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 100 (**) *Une interversion série-intégrale (3)*
Soit $T > 0$ et $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Déterminer la limite simple de la suite $g_n : t \in [0,T] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)\,e^{-kn(t-u)}\,\mathrm{d}u$.
2. On suppose que $\left(\displaystyle\int_0^T f(t)\,e^{nt}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $f = 0$.

6.3 Approximation uniforme

Exercice 101 (*) *Injectivité de la transformée de Laplace*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite en $+\infty$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\infty f(t)\,e^{-nt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 102 (**) *Inexistence d'une généralisation du théorème de Weierstrass*
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Que dire de f ?

Exercice 103 (*) *Approximation et interpolation (1)*
Soit $a < b$ et $x_1, ..., x_n$ des points distincts de $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui coïncident avec f en les x_k et qui converge uniformément vers f.

Exercice 104 (**) *Approximation et interpolation (2)*
Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de degré au plus d, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est une fonction polynomiale de degré au plus d, et que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

6.4 Séries entières

Exercice 105 (**) *Théorème d'Abel, version sectorielle*
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe z_0 tel que $|z_0| = R$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge. Montrer qu'alors la convergence de la série entière est uniforme sur tout ensemble de la forme

$$C_{\theta_0} = \{z_0(1 - \rho e^{i\theta}) \in D(0, R) \cup \{z_0\},\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0, |\theta| \leqslant \theta_0\}$$

où $0 \leqslant \theta_0 < \pi/2$ et $0 \leqslant \rho < 2\cos\theta_0$.

Exercice 106 (**) *Théorème de Tauber faible*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ est de rayon au moins 1 et que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que $a_n \geqslant 0$ pour tout n. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.
2. On suppose que $a_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Exercice 107 (*) *Un développement en série entière*
Développer en série entière en 0 la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 108 (**) *Un exemple d'extraction diagonale*
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales à coefficients positifs qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n.$$

Exercice 109 (***) *Un très bel exercice*
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha\, x^n}{1 - x^n}$ converge, et donner un équivalent de sa somme lorsque x tend vers 1.
Indication : On pourra commencer par réécrire la quantité étudiée sous la forme d'une série entière. Pour l'étude de cette série entière, on pourra admettre que les propriétés de l'intégrale s'étendent bien aux fonctions réglées sur un segment (c'est-à-dire admettant en tout point une limite à gauche et à droite), en particulier l'approximation par les sommes de Riemann.

Exercice 110 (**) *Une caractérisation de l'analyticité*
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est analytique, c'est-à-dire développable en série entière en tout point de I ;

(ii) Pour tout $x_0 \in I$, il existe $\eta > 0$ et des constantes $C, r > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow\ |f^{(n)}(x)| \leqslant C r^n n!.$$

Remarque : Avec la propriété de Borel-Lebesgue, on montre en fait que *(ii)* est aussi équivalent à : pour tout segment $J \subseteq I$, il existe des constantes $C, r > 0$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant C r^n n!$.

7 Probabilités

Exercice 111 (*) *Loi de Zipf*
Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\},\ p \text{ premier}\}$, montrer que

$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 112 (*) *Déterminant aléatoire*
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont donnés par des variables aléatoires i.i.d. admettant une variance σ^2. Déterminer l'espérance de $\det X$ ainsi que sa variance dans le cas où les coefficients sont centrés.

Exercice 113 (*) *Une application des probabilités à l'analyse*
En utilisant des variables de Poisson, déterminer un équivalent de

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor an \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a > 1$;
2. $\displaystyle\sum_{k=\lfloor an \rfloor}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a < 1$.

Exercice 114 (**) *Graphe d'Erdös-Renyi*
Soit une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}$ (avec $X_{i,j} = X_{j,i}$ pour tout i, j) une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $[\![1, n]\!]$, et d'arêtes $\{\{i, j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.
Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ dans les deux cas suivants :

1. $n\, p_n - \ln n \to +\infty$;
2. $n\, p_n \to a > 0$.

Exercice 115 (**) *Nombre de cycles d'une permutation*
On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ (on compte aussi les points fixes) tirée uniformément au hasard.

1. Montrer que la fonction génératrice G_n de X_n vérifie

$$\forall x \in]0, 1[,\ \frac{G_n'(x)}{G_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x + k}.$$

2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \delta > 0,\ \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\ln n} - 1\right| > \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 116 (**) *Différents modes de convergence*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $1 \leqslant p < q$. Montrer que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)* et *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(v)*, où

(i) Convergence L^q : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^q] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(ii) Convergence L^p : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(iii) Convergence presque sûre : $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty) = 1$;

(iv) Convergence en probabilité : $\forall \delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(v) Convergence en loi : $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$.

On pourra justifier que dans *(iii)*, l'ensemble en argument est bien mesurable. *Remarque* : Il existe d'autres définitions (équivalentes dans le cas des variables discrètes) de la convergence en loi.

Exercice 117 (**) *Lemme de Borel-Cantelli*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que presque sûrement seul un nombre fini de A_n sont réalisés.
2. On suppose que les (A_n) sont indépendants et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que presque sûrement une infinité de A_n sont réalisés.

Exercice 118 (**) *Une réciproque partielle*
On reprend les notations de l'exercice précédent. Supposons que (X_n) converge en probabilité vers X_∞. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $(X_{\varphi(n)})$ converge presque sûrement vers X_∞.

8 Equations différentielles linéaires

Exercice 119 (*) *Une EDL non résolue*
Résoudre l'équation différentielle

$$x(x-a)\, y' + (2x-a)\, y = \sin x,$$

où $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 120 (*) *Une équation d'Euler*
Résoudre pour $x > 0$ l'équation différentielle

$$x^2\, y'' + 3x\, y' + y = 0.$$

Indication : On pourra chercher une première solution sous la forme d'une fonction puissance, puis trouver une autre solution en utilisant le Wronskien ou un changement de variable.

Exercice 121 (*) *Une utilisation astucieuse des EDL (1)*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 122 (**) *Une utilisation astucieuse des EDL (2)*
Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|u| \leqslant 1$ et $u(0)^2 + u'(0)^2 = 4$. Montrer que la fonction $u + u''$ s'annule en un point de $\mathbb{R}$.

Exercice 123 (**) *Un problème de recollement*
Résoudre l'équation différentielle $y'^2 = y^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 124 (**) *Equations différentielles hyperboliques*
Soit q est une fonction continue positive. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - q(x)\, y = 0$ admet une unique solution telle que $y(0) = a$ et $y(1) = b$.

Exercice 125 (**) *Conditions initiales en* $+\infty$
Soit q une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^\infty x\,|q(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(x)\, y = 0.$$

Montrer qu'il existe une unique solution f telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 126 (**) *Un système différentiel linéaire*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute valeur propre λ de A, $\lambda \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique. Montrer que le système

$$X' = AX + B(t)$$

possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 127 (**) *Une application du lemme de Gronwall*
Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'' + \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) y = 0$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifie

$$y(x) \underset{x\to+\infty}{=} A\cos x + B\sin x + o(1).$$

Indication : On pourra utiliser le lemme de Gronwall : si y est continue, b est continue positive et $C \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité

$$\forall x \geqslant 0,\ \ y(x) \leqslant C + \int_0^x b(t)\, y(t)\,\mathrm{d}t$$

implique l'inégalité

$$\forall x \geqslant 0,\ \ y(x) \leqslant C\,\exp\left(\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

9 Calcul différentiel

Exercice 128 (*) *Fonctions harmoniques*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]0, r_0[,\ \ f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 129 (**) *L'ouvert des matrices cycliques*
On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que le rang de $\mathrm{d}f_M$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont égaux est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 130 (**) *Fonctions affines et différentielle seconde*
Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction deux fois différentiable telle que $d^2 f = 0$. Montrer que f est la restriction à U d'une fonction affine (c'est-à-dire d'une fonction linéaire translatée d'un vecteur).

Exercice 131 (*) *Différentielle de l'inverse* Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Justifier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ et calculer la différentielle de l'application

$$\mathrm{Inv} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array} \right. .$$

Exercice 132 (**) *Stricte différentiabilité*
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. On dit que $f : E \to F$ est strictement différentiable en $x \in E$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\frac{\|f(x+h) - f(x+k) - L(h-k)\|}{\|h-k\|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

1. Montrer que si f est strictement différentiable, elle est différentiable.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est strictement différentiable en tout point.
3. La réciproque du premier point est-elle vraie ?

Exercice 133 (*) *Un passage en coordonnées polaires (1)*
Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,\, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 134 (*) *Un passage en coordonnées polaires (2)*
Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad x > 0,\, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 135 (**) *Théorème de Poincaré*
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $f = \nabla g$;

(ii) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\partial_i f_j = \partial_j f_i$.