Recueil d'exercices pour les MPSI

Julien Allasia - ENS de Lyon

1 Notions de base

1.1 Ensembles et applications

Exercice 1 Soit E un ensemble. On appelle différence symétrique de deux parties F et G de E la partie

$$F\Delta G = (\bar{F} \cap G) \cup (F \cap \bar{G}).$$

1. Montrer que, pour toutes parties F et G de E, on a $F\Delta G = (F \cup G) \cap \overline{F \cap G}$.
2. Montrer que, pour toutes parties F et G, la fonction indicatrice de $F\Delta G$ est égale à $\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_G - 2\mathbb{1}_F\mathbb{1}_G$. Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Montrer que Δ est une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$ associative, commutative, d'élément neutre $\emptyset$, et telle que toute partie admette un élément symétrique.
4. Montrer que la loi $\cap$ est distributive sur Δ.

Exercice 2 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On pose

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que ϕ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit surjective.
3. On suppose que ϕ est bijective. Calculer son inverse.

Exercice 3 Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 4 Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A une partie de E. Quelle relation a-t-on entre $f^{-1}(f(A))$ et A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité pour toute partie A de E.
3. Soit B une partie de F. Quelle relation a-t-on entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité pour toute partie B de F.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les opérateurs suivants (c'est-à-dire des fonctions de E dans E) :

— pour tout $f \in E$, $\tau(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1)$

— pour tout $f \in E$, $\delta(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$.

1. τ, δ sont-elles injectives ?
2. Déterminer l'image réciproque de 0 par δ.
3. Montrer que δ est surjective.

1.2 Sommes et produits

Exercice 6 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \min(i,j)$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i)$ (pour $n\geq 2$)

Exercice 7 Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. Soit $S_1=\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$ et $S_2=\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$. Calculer S_1+S_2 et S_1-S_2, en déduire S_1 et S_2.
2. En déduire une méthode pour calculer la somme $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k=0[3]}}^{n}\binom{n}{k}$.

Exercice 8 Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ avec des factorielles.

Exercice 9 Déterminer les réels $x_1,...,x_n$ tels que l'on ait

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k=n.$$

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}u_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)^2.$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n$.

Exercice 11 Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(3k-1)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 12

1. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n}k$.
2. Déduire de la formule de la somme géométrique la somme suivante, où a est un réel et p,q sont deux entiers positifs : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}k\,a^{k-1}$.

3. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$.

4. En déduire une autre méthode pour calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} k$.

1.3 Nombres complexes

Exercice 13 Soit z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si z_1 et z_2 ont le même argument modulo 2π.

Exercice 14 On identifie le plan muni de son repère orthonormé avec $\mathbb{C}$. Décrire géométriquement et par un dessin l'ensemble des points dont les affixes vérifient $|z| \leq 1$ et $|z+1| \geq \sqrt{2}$.

Exercice 15 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|.$$

Étudier le cas d'égalité et interpréter l'inégalité en terme de parallélogramme.

Exercice 16 Soit z un complexe de module 1. Calculer $|z-1|^2 + |z+1|^2$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \bar{z}$.

Exercice 18 Déterminer la partie réelle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{15}$.

Exercice 19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (i-2)z^2 + (3-3i)z + 2i - 2 = 0$.
Indication : Commencer par chercher si l'équation admet une solution réelle.

Exercice 20 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 21 Déterminer les solutions complexes de $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$.

Exercice 22 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.
Montrer que les solutions de l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ sont toutes réelles si et seulement si $\alpha \in \mathbb{U}$.

Exercice 23 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le n^e noyau de Dirichlet par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Montrer que, si x n'est pas un multiple entier de 2π,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Qu'en est-il si x est un multiple entier de 2π ?

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \neq 0\,[3]$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{3k}) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{k}).$$

Indication : Montrer que les termes du produit sont les mêmes (à changement de l'ordre près).
En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1+2\cos\frac{2k\pi}{n})$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(\frac{n}{2}-k\right)t}\right)^2 = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}.$$

1. Montrer que, si $x_0, ..., x_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{p+q=k} x_p\, x_q$$

2. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Montrer que l'ensemble $\{(p,q) \in [\![0,n]\!],\ p+q=k\}$ est de cardinal :
   — $k+1$ si $k \leq n$;
   — $2n-k+1$ si $k \geq n+1$.
3. En déduire le résultat.

Exercice 26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$.
2. Soit $a_0, a_1, ... a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on définit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k$ et $M = \max\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{U}_n\}$.
   Montrer que, pour tout k, $|a_k| \leq M$.

1.4 Fonctions usuelles

Exercice 27

1. Rappeler la définition de la fonction tangente hyperbolique. Tracer son graphe. Vérifier qu'elle est injective. Quelle est son image ?
2. On appelle argth sa réciproque. Déterminer sa dérivée.
3. Déterminer une expression explicite de argth avec la fonction logarithme.

Exercice 28

1. Soit $x \in [-1,1]$. Que vaut $\cos(\arccos x)$?
2. Tracer la courbe de la fonction $\arccos \circ \cos$.

Exercice 29

1. Soit $x \in [-1,1]$. Que valent $\cos(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\sin(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\tan(\arccos x)$, $\tan(\arcsin x)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que valent $\tan(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$?

Exercice 30 Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression du module et d'un argument de z en fonction de x et y.

Exercice 31 Calculer les quantités suivantes :

1. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$
2. $\arccos(1-2x^2)$ pour $x \in [-1,1]$
3. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ pour $x \in [-1,1]$

Exercice 32 Résoudre l'équation $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$.

Exercice 33 Tracer le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1.5 Équations différentielles

Exercice 34 Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = x\cos(2x)$.

Exercice 35 Résoudre l'équation $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ en se ramenant à une équation de degré 2.

Exercice 36 Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toutes les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ soient bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 37 Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 38 Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x.$$

Exercice 39 Déterminer les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $x \longmapsto f(x) - \int_0^x t\,f(t)\,dt$ est constante.

Exercice 40 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(a-x).$$

Exercice 41

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que
$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u).$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues telles que
$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u).$$

Exercice 42 Résoudre l'équation $(1-x^2)y' + 2xy = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 43 Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = x$.

1. Quelle équation différentielle vérifie la fonction $z : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(e^t)$?
2. En déduire une résolution de l'équation initiale.

2 Analyse réelle

2.1 Les nombres réels

Exercice 44 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b.$$

1. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2. Exhiber un exemple tel que l'on ait $\sup A = \inf B$ et

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a < b.$$

Exercice 45 Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on appelle partie entière supérieure de x et on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier vérifiant l'inégalité $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.

1. Quel vaut $\lceil x \rceil$ en termes de $\lfloor x \rfloor$
2. Que vaut $\lfloor -x \rfloor$ en termes de $\lceil x \rceil$?
3. Tracer le graphes des fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A.$$

(On appelle diamètre de A cette quantité.)

Exercice 47 Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+4}$. Déterminer $\sup_{\mathbb{R}} f$ et $\inf_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 48 Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On appelle ouvert de I toute partie $U \subset I$ telle que

$$\forall x \in U,\ \exists \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap I \subset U.$$

Montrer que I est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire sous la forme

$$I = U \cup V \text{ avec } U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset, \text{ ouverts disjoints de } I.$$

Indication : Si une telle écriture existe, considérer l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, [a,x] \in U\}$.

Exercice 49 Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in G^2,\ x-y \in G.$$

Montrer que :

— Soit il existe $a \in G$ tel que $G = a\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $\{ak,\ k \in \mathbb{Z}\}$).
— Soit G est dense dans $\mathbb{Z}$.

En déduire une preuve du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.2 Suites numériques

Exercice 50 Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Exercice 51 Soit $x \in]0,1[$. Étudier la convergence de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$p_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n}).$$

Exercice 52 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1}-u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$.
Montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{\varphi(n)} - n \to 0$.

Exercice 53 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que $u_{n+1}-u_n \to 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 54 On admet le théorème suivant :
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in G$, $x-y\in G$. Alors G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel a.

1. Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a, b \neq 0$ et $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$.
2. Montrer que, si $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, alors l'ensemble $\{e^{in\theta},\, n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle unité.
3. Montrer que l'ensemble $\{2^a5^b,\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 55 Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection telle que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 56 Montrer que l'équation à inconnue dans $\mathbb{R}$

$$x + x^2 + ... + x^n = 1$$

admet une unique solution x_n dans $[0,1]$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 57 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On considère la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{... + \sqrt{a_n}}}}$$

1. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n) dans le cas où la suite (a_n) est constante égale à 1.
2. Montrer que (u_n) converge si est seulement si

$$\exists A \geq 0,\, \forall n\geq 1,\, a_n \leq A^{2^n}.$$

Exercice 58 Étudier la bonne définition et la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

2.3 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 59 Soit $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $x \mapsto \lim\limits_{x^+} f$ est croissante.

Exercice 60 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $g : x \mapsto \lfloor x\rfloor + f(x-\lfloor x\rfloor)$. Déterminer à quelle condition sur f la fonction g est continue.

Exercice 61 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a+\frac{T}{2}\right]\right).$$

Exercice 62 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est infini.

Exercice 63 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 64 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, telle que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\to} l < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 65 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue en 0 et 1 qui admet en tout point de $]0,1[$ des limites à gauche et à droite vérifiant

$$\lim_{x^-} f \leq f(x) \leq \lim_{x^+} f.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 66 Soit $a_1 < a_2 < ... < a_n$ des réels et

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + ... + \frac{1}{x-a_n}.$$

Montrer que f s'annule exactement $n-1$ fois sur son ensemble de définition.

Exercice 67 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 68 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq ax + b.$$

Exercice 69

1. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ à valeurs dans I,
$$x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$
2. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

2.4 Analyse asymptotique

Exercice 70 Déterminer le développement limité à l'ordre 8 de Arcsin en 0.

Exercice 71 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\ln\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)$ en 0.

Exercice 72 Déterminer un équivalent en ∞ de $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$.

Exercice 73 Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2-1}-n}.$$

Exercice 74 Déterminer un développement généralisé à trois termes en $+\infty$ de $x\exp\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$.

Exercice 75 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)$ est croissante est majorée, déterminer sa limite.
3. Donner un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ de $x_n - n\pi$.

Exercice 76

1. Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives notées u_n et v_n (avec $u_n < v_n$) pour n assez grand.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Trouver sa limite l.
3. Montrer que $u_n - l \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 77

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique racine positive notée x_n. Montrer que la suite $(x_n)_n$ possède une limite l. Donner l.
2. On pose $x_n = l - \epsilon_n$. Calculer la limite de $(n\epsilon_n)$.
3. Trouver la limite de $\left(\frac{\ln n}{n\epsilon_n}\right)_n$.
4. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 78

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$. Étudier la suite (u_n) et donner un équivalent de u_n.
   Indication : On pourra considérer $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 79

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-u_{n+1}} \leq u_{n+1} - u_n \leq e^{-u_n}.$$

   Étudier (u_n) et montrer que $u_n = \ln n + o(1)$.

Dérivabilité

Exercice 80 Soit $a \geq 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_a(x) = |x|^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer à quelle condition sur a la fonction f_a se prolonge en une fonction continue g_a sur $\mathbb{R}$. On se place dans ce cadre dans la suite.
2. Déterminer à quelle condition sur a la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Même question avec $\mathcal{C}^1$, et deux fois dérivable. Généraliser.

Exercice 81

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que f' admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer cette limite.
2. Soit f une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$. Que dire de f' ?

Exercice 82 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f tend vers une même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 83 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = ... = f^{(n-1)}(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

2.5 Intégration

Exercice 84 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$, et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n$.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence faisant intervenir I_n et I_{n+2}.
4. En déduire l'expression générale de I_n.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \, I_n \, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que $\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \, I_n \longrightarrow 1$.

Exercice 85 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{2 + \cos x}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Exercice 86 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 87 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x \, (1 + \ln^5 x)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Exercice 88 Calculer $\int_1^4 \dfrac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

Exercice 89 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, \sin^3 x \, dx$.

Exercice 90 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \, e^x \, dx$.

1. Donner une relation de récurrence sur I_n.
2. En déduire la minoration $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq \dfrac{e}{n+2}$.

Exercice 91 Donner une primitive de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$.

3 Algèbre générale

3.1 Arithmétique

Exercice 92 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$
2. Déterminer le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de l'entier 100!.

Exercice 93

1. On appelle p_n le n^e nombre premier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $p_n < 2^{2^n}$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

3.2 Groupes

Exercice 94 Soit p un nombre premier. Notons $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.
On appelle ordre de $z \in G$ le plus petit exposant $k > 0$ tel que $z^k = 1$. On admet que z est d'ordre k si et seulement si tout élément de $\mathbb{U}_k$ est une puissance de z.

1. Montrer que G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Soit H un sous-groupe strict de G. Soit $z_0 \in G \setminus H$, d'ordre p^{n_0}.
   (a) Montrer que si H contient un élément d'ordre p^n, alors $\mathbb{U}_{p^n} \subset H$.
   (b) Montrer que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.
   (c) En déduire qu'il existe n tel que $H = \mathbb{U}_{p^n}$.

Exercice 95 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que soit G est monogène, soit G est dense dans $\mathbb{Z}$.
2. En déduire une preuve du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 96 Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est un maximal s'il est distinct de G et n'est contenu dans aucun autre sous-groupe de G que G et H.

1. Z admet-il des sous-groupes maximaux ?
2. Q admet-il des sous-groupes maximaux ?

Exercice 97 Soit $(G, \times)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$. Montrer que G est un groupe commutatif.

3.3 Anneaux

Exercice 98 Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

Exercice 99 Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

3.4 Polynômes

Exercice 100 Soit $n \in \mathbb{N}$.
On cherche à définir un polynôme réel T_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer l'existence d'un tel polynôme et en donner une formule explicite sous forme de somme.
   Indication : utiliser la formule de Moivre.
2. En utilisant le fait qu'un polynôme admettant une infinité de racines est nul, montrer que le polynôme obtenu est le seul qui convient. On le note T_n et on l'appelle n^e polynôme de Tchebychev.
3. Quels sont le degré et le coefficient dominant de T_n ?
4. Déterminer les racines de T_n.

Exercice 101 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant unitaire.
Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\Im(z)|^{\deg P}.$$

Exercice 102 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :
(i) Pour tout réel x, $A(x) \geq 0$.
(ii) Il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A = P^2 + Q^2$.

Exercice 103 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser le polynôme $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 104 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, a un réel non nul. Montrer que $P' + aP$ est aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 105 Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

3.5 Fractions rationnelles

Exercice 106 Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{X(X-1)...(X-n)}$.

Exercice 107 Décomposer en éléments simples dans $R[X]$ la fraction $\frac{X^2}{X^4+1}$.

Exercice 108 Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$.

Exercice 109

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin((2n+1)\theta) = P_n(\sin\theta).$$
2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{P_n}$ en éléments simples.

Exercice 110 Soit $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$. On appelle enveloppe convexe de $\{z_1, ..., z_n\}$ le plus petit convexe du plan complexe qui contient tous les z_i. On montre qu'il s'agit de l'ensemble
$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i,\ \lambda_i \geq 0\, \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

1. Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.
2. Montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.
3. De quel théorème ce théorème est-il la généralisation ?

4 Algèbre linéaire

4.1 Généralités

Exercice 111 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in (E)$ tel que $P(f) = 0$.
   Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 112 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est une famille liée pour tout $x \in E$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f = f \circ u$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}$.

Exercice 113 Soit E l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques. Soit u l'application linéaire qui à f dans E associe sa dérivée seconde.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 114 Soit r un entier impair positif. Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto |x-a|^r$.
Montrer que la famille $\{f_a,\, a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 115 Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$.
Montrer que la famille $\{f_a,\, a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 116 Soit, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(ax)$.
Montrer que la famille $\{f_a,\, a \in \mathbb{R}_+^*\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 117 Soit E un K-espace vectoriel, u, $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.
Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et v.

Exercice 118 Soit E un K-espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs sur E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition au moyen de $\operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker} q$, $\operatorname{Im} q$.
3. Si les conditions du 1. sont vérifiées, décrire le projecteur $p+q$.

Exercice 119 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f, g deux endomorphismes de E.

1. On suppose que g est un projecteur. Montrer que
$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$
2. On suppose que f (et non plus g) est un projecteur. Montrer que
$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$
3. On suppose que f et g sont des projecteurs. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si
$$\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

4.2 Dimension finie

Exercice 120 Montrer qu'il existe $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X) + \sum_{k=1}^{n} a_k\, P(X+k) = 0.$$

Exercice 121 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^* son espace dual. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. On note e_i^* l'application qui à un vecteur $x \in E$ fait correspondre sa coordonnée devant e_i.

1. Montrer que les e_i sont bien définies et sont des formes linéaires.
2. On suppose que I est un ensemble fini. Montrer que $(e_i^*)_{i \in I}$ est une base de E^*.
3. On suppose que I est infini. Montrer que $(e_i^*)_{i \in I}$ est libre mais pas génératrice.

Exercice 122 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$
2. $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$
3. $E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$
4. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$

4.3 Matrices

Exercice 123 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = X^tY$.

Exercice 124 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Exercice 125 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 2. Soit $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 126 Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 127 Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)\, f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

4.4 Systèmes linéaires

Exercice 128 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & + & 8t & = & 5 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & + & 4t & = & 3. \end{array}\right.$$

Exercice 129 Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système suivant admette au moins une solution :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & b \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & c. \end{array}\right.$$

Exercice 130 Déterminer les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} xyz & = & 1 \\ xy^2z^4 & = & 2 \\ xy^3z^9 & = & 3. \end{array}\right.$$

Exercice 131 Soit $n \geq 1$. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & ... & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & ... & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & 3x_n & = & 1 \\ ... & & & & & & & & & & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_2 & + & ... & + & nx_n & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice 132 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & + & t & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & + & t & = & \lambda + 1. \end{array}\right.$$

Exercice 133 Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & \mu y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda\mu y & + & z & = & \mu \\ x & + & \mu y & + & \lambda z & = & 1. \end{array}\right.$$