Rapport de stage
Le théorème de Gauss-Bonnet

Julien Allasia - L3
ENS de Lyon - Département de Mathématiques

6 août 2018

L'étude des surfaces a longtemps été un sujet de questionnement majeur en mathématiques. Gauss cherchait déjà à généraliser ce qui était connu sur le plan à des surfaces, et découvrit ainsi une première version du théorème présenté ici, en étudiant la somme des angles d'un triangle construit sur une surface. Aujourd'hui, le théorème de Gauss-Bonnet est un des résultats les plus profonds de l'étude des surfaces. De fait, il relie de manière inattendue deux manières complètement différentes d'étudier une surface : une géométrique, l'autre topologique. La première sera détaillée dans la suite.

1 Rappels de géométrie des surfaces

On commence par rappeler quelques éléments de géométrie des surfaces, qu'on ne démontre pas.

1.1 Définition et conséquences

On étudie dans toute la suite les surfaces comme étant des parties de l'espace $\mathbb{R}^3$. On se restreint de plus à ce qu'on appelle les surfaces régulières (au sens $\mathcal{C}^\infty$), qui auront les bonnes propriétés afin de généraliser le calcul différentiel en dimension 2 aux surfaces. Enfin, la définition qu'on donne se place dans le cadre de ce qu'on appelle en général les surfaces sans bord.

Définition. Une surface régulière est un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $p \in S$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et une fonction $X : U \to V \cap S$ tels que :

1. X est $\mathcal{C}^\infty$.
2. X est un homéomorphisme.
3. Pour tout $q \in U$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective.

X est appelé paramétrage de S en p. $X(U)$ est appelé voisinage de coordonnées de p.

Proposition 1.1. *Soit S une surface régulière et $X : U \to S$ un paramétrage de S en $p \in S$.*

- ▷ *S admet en tout point $p \in S$ un plan tangent T_pS. Il peut être vu soit comme $dX_q(\mathbb{R}^2)$ (où $q = X^{-1}(p)$), soit comme l'ensemble des vecteurs tangents $\alpha'(0)$ où α est une courbe définie et dérivable au voisinage de 0 et telle que $\alpha(0) = p$.*
- ▷ *Une base naturelle de ce plan est formée des vecteurs indépendants $X_u(q) = \partial_u X(q)$ et $X_v(q) = \partial_v X(q)$.*
- ▷ *Un vecteur normal unitaire associé au paramétrage est $N(q) = \frac{X_u(q)\wedge X_v(q)}{||X_u(q)\wedge X_v(q)||}$*
- ▷ *Soit $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ et $Y : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ deux paramétrages en $p \in S$. Soit $W = X(U) \cap Y(V)$. Alors le changement de coordonnées $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.*

Ce dernier point permet de définir une notion de différentiabilité sur une surface, indépendamment du paramétrage choisi.

Définition. Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières, et V un ouvert de S_1. Soit $f : V \to S_2$. On dit que f est différentiable en $p \in V$ s'il existe un paramétrage $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ tel que $p \in X(U) \subseteq V$ et $f \circ X : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable en $X^{-1}(p)$. On définit alors, pour $p \in V$, la différentielle de f en p par

$$df_p : \left| \begin{array}{ccc} T_pS_1 & \longrightarrow & T_{f(p)}S_2 \\ w = \alpha'(0) & \longmapsto & (f \circ \alpha)'(0) \end{array} \right.$$

Notation. Dans toute la suite, S désigne une surface régulière, p est un point de S, $X : U \to S$ est un paramétrage de S en p et $q = X^{-1}(p)$.

1.2 Première forme fondamentale

Définition. La première forme fondamentale d'une surface régulière S en $p \in S$ est la forme quadratique I_p sur T_pS définie par $\mathrm{I}_p(w) = \langle w, w \rangle = ||w||^2$, où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ et $||.||$ est la norme associée.

Fait 1.2. *Soit $w \in T_pS$ de coordonnées (w_1, w_2) dans la base $(X_u(q), X_v(q))$. Alors la première forme fondamentale s'écrit :* $\mathrm{I}(w) = E(q)w_1^2 + 2F(q)w_1w_2 + G(q)w_2^2$, *où*

$$\left| \begin{array}{l} E(q) = \langle X_u(q), X_u(q) \rangle \\ F(q) = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle \\ G(q) = \langle X_v(q), X_v(q) \rangle \end{array} \right.$$

Fait 1.3. $||X_u \wedge X_v|| = \sqrt{EG - F^2}$.

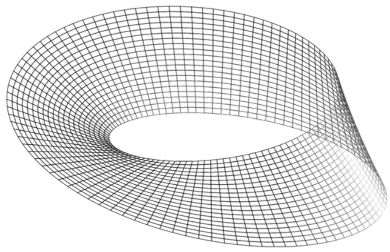
1.3 Orientation d'une surface

Définition. S est dite orientable s'il existe une application continue $N : S \to \mathbb{R}^3$ qui à $p \in S$ associe un vecteur normal unitaire. N est alors appelée orientation de S.

Proposition 1.4. *Si S est orientable, alors toute orientation N de S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Exemple. Un exemple de surface régulière non-orientable est le ruban de Möbius. Il s'obtient en prenant un rectangle du plan et en recollant après torsion deux côtés opposés.

FIGURE 1 – Ruban de Möbius



N.B. Dans toute la suite, on supposera que toutes les surfaces sont régulières, orientables et orientées, et on notera N leur orientation.

1.4 Seconde forme fondamentale et courbure de Gauss

Définition. Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité. $N : S \to \mathbb{S}^2$ est appelée fonction de Gauss de S. Dans la suite, on confondra souvent N et $N \circ X$, considérant ainsi N comme une fonction de (u, v).

Fait 1.5.

▷ *On a l'égalité $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$. Ainsi, dN_p est un endomorphisme du plan T_pS.*
▷ *dN_p est auto-adjointe : $\forall w_1, w_2 \in T_pS$, $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$.*

Définition. La seconde forme fondamentale de S en p est la forme quadratique

$$\mathrm{II}_p : \left| \begin{array}{ccc} T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & -\langle dN_p(w), w \rangle \end{array} \right.$$

Définition. Soit C une courbe tracée sur S au voisinage de p. Soit $\alpha : I \to S$ un paramétrage par longueur d'arc de cette courbe. On rappelle que la courbure est alors définie par $k(s) = ||\alpha''(s)||$ et la normale par $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Soit $\theta = (n, N) \in [0, \pi]$. La courbure normale de C en p est : $k_n = k \cos \theta$.

Proposition 1.6.

▷ *Soit $w \in T_pS$ avec $||w|| = 1$. Soit C une courbe passant par p et tangente à w en p.*
Alors $\mathrm{II}_p(w) = k_n(p)$ où la courbure normale est celle de la courbe C.

▷ *Ainsi, toutes les courbes sur S qui ont la même droite tangente en p ont la même courbure normale en p. On parle donc de courbure normale selon une direction.*

Théorème 1.7. *Il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de T_pS et deux réels $k_1 \geq k_2$ tels que :*

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1 \ , \quad dN_p(e_2) = -k_2 e_2 \quad \text{et} \quad \forall w \in T_pS, \, ||w|| = 1 \Rightarrow k_2 \leq \mathrm{II}_p(w) \leq k_1.$$

Autrement dit, $-dN_p$ se diagonalise en base orthonormée et ses valeurs propres k_1 et k_2 sont les valeurs extrêmes de la courbure normale en p. k_1 et k_2 sont appelées courbures principales *en p.*

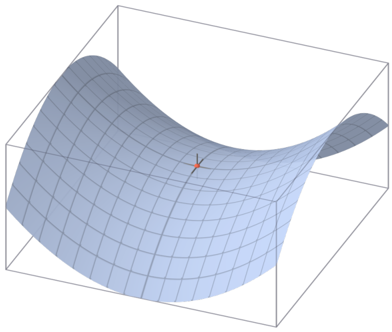
Définition.

▷ La *courbure de Gauss* de S en p est :

$$K = det(dN_p) = k_1 k_2.$$

▷ p est dit *elliptique* si $K > 0$ (courbures principales non nulles et de même signe).
▷ p est dit *hyperbolique* si $K < 0$ (courbures principales non nulles et de signes opposés).
▷ p est dit *parabolique* si $K = 0$ et $dN_p \neq 0$ (une courbure principale est nulle et pas l'autre).
▷ p est dit *planaire* si $dN_p = 0$ (les deux courbures principales sont nulles).
▷ p est dit *ombilical* si $k_1 = k_2$.

FIGURE 2 – Le point rouge est un point hyperbolique. Les deux courbes en gris foncé ont des courbures normales de signes opposés.



Exemple. La sphère est une surface dont tous les points sont ombilicaux et elliptiques. Par exemple, la sphère centrée en 0 et de rayon R admet comme orientation la fonction qui à $p \in S$ associe $N(p) = \frac{p}{R}$. Sa différentielle en p est donc $dN_p = \frac{1}{R} Id$, donc les directions principales sont égales à $\frac{1}{R}$ et la courbure de Gauss vaut partout $\frac{1}{R^2}$.

Remarque. La courbure normale change de signe selon l'orientation de S, mais pas la courbure de Gauss.

Proposition 1.8. *Soit $w \in T_pS$ de coordonnées (w_1, w_2) dans la base $(X_u(q), X_v(q))$. Alors la seconde forme fondamentale s'écrit : $\mathrm{II}_p(w) = e(q)\, w_1^2 + 2\, f(q)\, w_1\, w_2 + g(q)\, w_2^2$, où :*

$$\left| \begin{array}{l} e(q) = \langle N(q), X_{uu}(q) \rangle, \\ f(q) = \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle, \\ g(q) = \langle N(q), X_{vv}(q) \rangle. \end{array} \right.$$

Proposition 1.9. *La courbure de Gauss s'exprime en fonction des coefficients des première et seconde formes fondamentales selon :*

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q).$$

Exemple. Le tore privé d'un méridien et d'un parallèle admet le paramétrage suivant (avec $a > 0$ et $0 < r < a$) :

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \ 0 < u, v < 2\pi.$$

Le calcul des dérivées partielles de X donne E, F, G ainsi que e, f, g, et finalement : $K(X(u, v)) = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}$. Ainsi, les points sur la moitié extérieure du tore sont elliptiques, ceux sur la moitié intérieure sont hyperboliques, et ceux à la frontière de ces deux régions sont paraboliques.

1.5 Courbure géodésique

Définition. Soit $\alpha : I \to S$ une courbe tracée dans S et paramétrée par longueur d'arc. On note, pour $s \in I$, $\alpha''_T(s)$ la composante tangentielle de $\alpha''(s)$, c'est-à-dire la projection orthogonale de $\alpha''(s)$ sur $T_{\alpha(s)}S$. $\alpha''_T(s)$ est orthogonale à la fois à $\alpha'(s)$ et à $N(\alpha(s))$. On appelle alors *courbure géodésique* de α en s, notée $k_g(s)$, le scalaire vérifiant :

$$\alpha''_T(s) = k_g(s)\,(N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s))$$

Définition. Une *géodésique* de S est une courbe $\gamma : I \to S$ régulière non constante telle que

$$\forall\, t \in I,\ \gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}S^{\perp}.$$

Proposition 1.10. *Soit $\alpha : I \to S$ courbe paramétrée par longueur d'arc. Alors α est une géodésique si et seulement si pour tout $s \in I$, $k_g(s) = 0$.*

2 Théorème de Gauss-Bonnet

On rappelle que S désigne une surface régulière orientable et orientée.

2.1 Préliminaires géométriques

2.1.1 Cadre de travail

Définition. Soit $L > 0$. On appelle *courbe fermée simple régulière par morceaux* une fonction $\alpha : [0, L] \to S$ telle que :

▷ $\alpha(0) = \alpha(L)$

▷ Pour tout $x, y \in [0, L[$, si $\alpha(x) = \alpha(y)$, alors $x = y$.

▷ α est continue, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sauf en un nombre fini de points $t_0, ..., t_k$, en lesquels α admet des dérivées à gauche et à droite non nulles.

On appelle alors sommets de α les points $\alpha(t_0)$, ..., $\alpha(t_k)$ (on notera $t_{k+1} = t_0$). Si les dérivées à droite en 0 et à gauche en L sont différentes, on compte aussi un sommet en 0. Les angles aux sommets (entre dérivées à gauche et à droite) sont notés $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ et leur signe est donné par l'orientation de S.

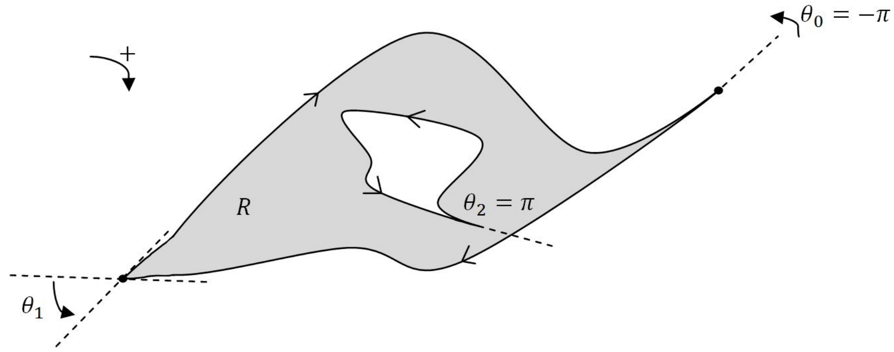
Définition. ▷ Une *région* de S est la réunion d'un ouvert connexe borné de S avec sa frontière.

▷ Une *région simple* de S est une région homéomorphe au disque dont la frontière est la trace d'une courbe fermée simple régulière par morceaux.

▷ Une *région régulière* de S est une région compacte dont la frontière est une union finie de traces de courbes fermées simples régulières par morceaux qui ne s'intersectent pas.

▷ On dit qu'une courbe α qui est le frontière d'une région R est *positivement orientée* si pour tout $t \in [0, L]$, la base orthogonale orientée positivement$(\alpha'(t), h(t))$ de $T_{\alpha(t)}S$ est telle que $h(t)$ pointe vers R, c'est-à-dire que pour toute courbe $\beta : [0, \epsilon[\to R$, vérifiant $\beta(0) = \alpha(t)$, on a $\langle \beta'(0), h(t) \rangle \geq 0$.

FIGURE 3 – Région régulière délimitée par des courbes fermées simples régulières par morceaux positivement orientées (la surface ambiante n'est pas représentée).



Remarque. Dans la suite, on appellera *surface compacte* toute surface régulière orientable compacte et *connexe*. Noter qu'une surface compacte est alors une région régulière d'elle-même (avec une frontière vide). Ce fait sera essentiel dans la suite.

2.1.2 Théorème des tangentes tournantes (admis)

Lemme 2.1. *Soit α une courbe fermée simple régulière par morceaux tracée dans un voisinage de coordonnées $X(U) \subseteq S$. On reprend les notations de la définition.*

Pour tout i, il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ qui mesure à 2π près l'angle entre X_u et α' (ou sa valeur à droite ou à gauche en les sommets).

Théorème 2.2. (Hopf, 1935)

$$\sum_{i=0}^{k} (\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = \pm 2\pi.$$

avec + si la courbe est orientée positivement.

2.1.3 Paramétrage orthogonal

Définition. On dit qu'un paramétrage $X : U \to V \cap S$ est orthogonal lorsque pour tout $q \in U$, on a $X_u(q) \perp X_v(q)$, c'est-à-dire $F = 0$. $X(U)$ est alors appelé voisinage de coordonnées orthogonales.

Proposition 2.3. *Toute surface régulière orientable est recouvrable par des systèmes de coordonnées orthogonales compatibles avec son orientation, c'est-à-dire telles qu'en tout point on ait $N = \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}$.*

On donne maintenant une formule qui permet d'exprimer la courbure de Gauss K en fonction des coefficients de la première forme fondamentale et de ses dérivées partielles. La preuve, purement calculatoire, utilise la formule de la proposition 1.9.

Proposition 2.4. *Dans le cas d'un paramétrage orthogonal :*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\partial_u \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \partial_v \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right).$$

Remarque. On note au passage que cette formule permet de démontrer le *theorema egregium*, qui affirme que la courbure de Gauss est une propriété intrinsèque de la surface, c'est-à-dire ne dépendant que de la première forme fondamentale. En pratique, cela signifie que K est invariante par isométrie locale.

Enfin, on donne une formule qui permet d'exprimer la courbure géodésique en fonction de la fonction d'angle entre X_u et α'. La preuve est aussi purement calculatoire.

Proposition 2.5. *Soit X un paramétrage orthogonal et $\alpha(s) = X(u(s), v(s)$ une courbe fermée simple régulière par morceaux paramétrée par longueur d'arc. On note s_0, ..., s_k les arguments de ses sommets (avec $s_{k+1} = s_0$). La courbure géodésique de α s'exprime en fonction de la fonction d'angle ϕ_i sur chaque section $[s_i, s_{i+1}]$ par :*

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v'(s) - E_v u'(s)) + \phi_i'(s).$$

2.2 Préliminaires topologiques

Les énoncés de cette partie sont admis, car l'aspect topologique n'est pas un objectif de ce rapport.

Définition. Soit R une surface régulière de S. Un triangle de R est une sous-région simple de R à 3 sommets (on appelle alors arêtes ses arcs réguliers). On appelle triangulation de R toute famille finie de triangles T_1, ..., T_n telle que $R = \cup_i T_i$ et telle que l'intersection de deux triangles T_i et T_j est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune aux deux triangles.

Lemme 2.6. *Toute région régulière R de S admet une triangulation dont chaque triangle est inclus dans un voisinage de coordonnées orthogonales et compatibles avec l'orientation de S.*

Définition. Etant donné une région régulière R de S et une triangulation $\mathcal{T}$ de R, on note E le nombre d'arêtes de $\mathcal{T}$, F le nombre de triangles de $\mathcal{T}$ et V le nombre de sommets de $\mathcal{T}$. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré l'entier :

$$\chi = F - E + V.$$

Théorème 2.7. *χ ne dépend pas du choix de la triangulation $\mathcal{T}$. On note donc $\chi(R)$.*

2.3 Notion d'intégration sur une surface

Définition. Soit R une région bornée d'une surface régulière S, contenue entièrement dans un voisinage de coordonnées $X(U)$. On appelle aire de R la quantité :

$$\mathcal{A}(R) = \iint_{X^{-1}(R)} ||X_u \wedge X_v|| \, du \, dv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}(u, v) \, du \, dv.$$

Cette expression est indépendante du choix du paramétrage, et donne l'intuition de la définition qu'on va pouvoir donner pour l'intégrale d'une fonction continue sur une surface.

Définition. $\triangleright$ Soit R une région simple de S, contenue entièrement dans un voisinage de coordonnées $X(U)$. Soit f une fonction continue sur R. On appelle *intégrale de f sur R* la quantité :

$$\iint_R f \, d\sigma = \iint_{X^{-1}(R)} f(X(u, v)) \sqrt{EG - F^2}(u, v) \, du \, dv.$$

$\triangleright$ Soit R une région régulière de S. Soit $\{T_1, ..., T_n\}$ une triangulation de R telle que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on ait $T_i \subseteq X_i(U_i)$ voisinage de coordonnées. Soit f une fonction continue sur R. On appelle *intégrale de f sur R* la quantité :

$$\iint_R f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint_{T_i} f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint_{X_i^{-1}(T_i)} f(X(u_i, v_i)) \sqrt{E_i G_i - F_i^2}(u_i, v_i) \, du_i \, dv_i.$$

Remarque. De même que pour l'aire, on montre que ces deux définitions d'intégrales ne dépendent pas du choix des paramétrages, ni, dans le deuxième cas, de la triangulation. On a donc bien défini une quantité purement géométrique.

2.4 Théorème de Gauss-Bonnet

Le théorème de Gauss-Bonnet relie de façon assez surprenante la courbure de Gauss (grandeur géométrique) à la caractéristique d'Euler-Poincaré (grandeur topologique). Pour le démontrer, on utilise des paramétrages. On le démontre donc d'abord dans une version locale, c'est-à-dire sur une région simple incluse dans un voisinage de coordonnées. Puis on obtiendra une version globale, pour des régions régulières, en se ramenant au cas local par triangulation.

Lemme 2.8. *(théorème de Gauss-Bonnet, version locale)*
Soit $X : U \to S$ un paramétrage orthogonal et compatible avec l'orientation de S. Soit $R \subseteq X(U)$ une région simple, dont la frontière est la trace d'une courbe fermée simple régulière par morceaux α supposée orientée positivement et paramétrée par longueur d'arc, de sommets $\alpha(s_0)$, ..., $\alpha(s_k)$ et d'angles aux sommets θ_0, ..., θ_k. Alors on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) \, ds + \iint_R K \, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.5,

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) \, ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} u'(s) \right) ds + \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \phi_i'(s) \, ds.$$

D'après la formule de Green-Riemann et la proposition 2.4, et en utilisant que $F = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} u'(s) \right) ds &= \iint_{X^{-1}(R)} \left(\partial_u \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \partial_v \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) du \, dv \\ &= - \iint_{X^{-1}(R)} K \sqrt{EG} \, du \, dv \\ &= - \iint_R K \, d\sigma \end{aligned}$$

De plus, par le théorème des tangentes tournantes, et comme l'orientation de la courbe frontière est positive, on a :

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}} \phi_i'(s)\,ds = -\sum_{i=0}^{k}\theta_i + 2\pi.$$

D'où le résultat en sommant les égalités. □

On peut maintenant en déduire la version globale du théorème de Gauss-Bonnet, qui s'applique à une région régulière d'une surface régulière orientée.

Théorème 2.9. (Bonnet, 1848)
Soit R une région régulière de S. Soit C_1, ..., C_n les courbes qui constituent sa frontière, orientées positivement et paramétrées par longueur d'arc. On note θ_0, ..., θ_p tous les angles aux sommets de la frontière de R. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum_{i=0}^{p}\theta_i = 2\pi\,\chi(R).$$

où l'intégrale sur C_i est la somme des intégrales sur chaque arc régulier de C_i.

Démonstration. On a vu qu'il existait une triangulation $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_F\}$ de R (avec F le nombre de triangles), telle que tout triangle soit dans un voisinage de coordonnées orthogonales et compatibles avec l'orientation de S. On oriente tous les triangles positivement, et, ainsi, l'arête commune de deux triangles adjacents est orientée de manière opposée pour chacun des deux triangles.

Un triangle étant une région simple, on peut appliquer la version locale du théorème de Gauss-Bonnet à chaque triangle et sommer. Notons $\theta_{j,k}$ l'angle au sommet k du triangle T_j. Comme l'intégrale des courbures géodésiques sur les arêtes internes se compensent, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\theta_{j,k} = 2\pi F.$$

Posons maintenant $\phi_{j,k} = \pi - \theta_{j,k}$ (angle interne). Posons aussi E_e le nombre d'arêtes externes, E_i le nombre d'arêtes internes, V_e le nombre de sommets externes, V_i le nombre de sommets internes, V_{ec} le nombre de sommets de la frontière de R et V_{et} le nombre de sommets externes qui ne sont pas des sommets de la frontière de R. Alors on a $V_e = V_{ec} + V_{et}$, $E_e = V_e$ (car les courbes C_i sont fermées), et $3F = 2E_i + E_e$. Donc

$$\sum_{j,k}\theta_{j,k} = 3\pi F - \sum_{j,k}\phi_{j,k} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k}\phi_{j,k}.$$

Or, dans cette dernière somme, on obtient 2π pour chaque somme de trois angles sur un sommet interne, et π pour chaque somme de deux angles sur un sommet externe compté dans V_{et}. Les angles restants sont les $\pi - \theta_i$, pour $i \in \{0, ..., p\}$. Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}\theta_{j,k} &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{i=0}^{p}(\pi - \theta_i)\\ &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=0}^{p}\theta_i\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum_{i=0}^{p}\theta_i = 2\pi(F - E + V).$$

où on reconnaît la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(R) = F - E + V$. □

Remarque. Une conséquence de ce théorème est le fait que $\chi(R)$ ne dépend effectivement pas de la triangulation choisie pour R.

En particulier, ce théorème permet de revenir à la version locale et précisément d'enlever l'hypothèse de localité. La version locale du théorème de Gauss-Bonnet est donc à considérer seulement comme une étape intermédiaire.

Corollaire 2.10. *(théorème de Gauss-Bonnet pour les régions simples)*
Soit R une région simple de S. En reprenant les notations du lemme 2.8, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

Corollaire 2.11. *(théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes)*
Soit S une surface régulière orientable compacte. Alors :

$$\iint_S K\, d\sigma = 2\pi\, \chi(S).$$

2.5 Remarques autour du théorème

Remarque. Il est à noter que la dernière formulation du théorème, particulièrement concise, est étonnante. La géométrie d'une surface compacte (à travers K) et sa topologie (à travers χ) sont très simplement liées. Si l'on déforme continûment la surface, on change K, mais pas la "courbure totale" $\iint_S K\, d\sigma$, car la caractéristique d'Euler-Poincaré est invariante par homéomorphisme.

On vérifie maintenant le théorème sur un exemple.
Exemple. Considérons S la sphère centrée en 0 et de rayon r. On utilise le paramétrage suivant, qui recouvre S sauf un demi-grand-cercle : $X(u,v) = (r\cos v \sin u, r \sin v \sin u, r\cos u)$ où $u \in]0,\pi[$ (colatitude) et $v \in]0, 2\pi[$ (longitude). On a :

$$\left|\begin{array}{l} X_u(u,v) = (r\cos v\cos u, r\sin v\cos u, -r\sin u) \\ X_v(u,v) = (-r\sin v\sin u, r\cos v\sin u, 0) \\ N(u,v) = (\cos v\sin u, \sin v\sin u, \cos u) \\ E(u,v) = r^2 \\ F(u,v) = 0 \\ G(u,v) = r^2\sin^2 u \end{array}\right.$$

On s'intéresse à la région simple R (qu'on appellera bol) délimitée en haut par un parallèle $u = u_0$.

▷ Le terme de courbure donne :

$$\iint_R K\, d\sigma = \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_{u_0}^{\pi} r^2 \sin u\, du\, dv = 2\pi\,(1+\cos u_0).$$

▷ Pour le terme de bord, il faut paramétrer le cercle $u = u_0$ positivement et par longueur d'arc. On vérifie que pour $s \in [0, 2\pi r\sin u_0]$, le paramétrage suivant convient :

$$\alpha(s) = \left(r\sin u_0 \cos\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right), -r\sin u_0 \sin\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right), r\cos u_0\right).$$

On a alors $\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{r\sin u_0}\cos\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right), \frac{1}{r\sin u_0}\sin\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right), 0\right)$, et

$$\begin{aligned} \alpha_T''(s) &= \alpha''(s) - \langle \alpha''(s),\, N(\alpha(s))\rangle\, N(\alpha(s)) \\ &= \frac{1}{r}\left(\cos\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right)\left(\sin u_0 - \frac{1}{\sin u_0}\right), -\sin\left(\frac{s}{r\sin u_0}\right)\left(\sin u_0 - \frac{1}{\sin u_0}\right), \cos u_0\right). \end{aligned}$$

Finalement, en comparant la direction de $\alpha_T''(s)$ avec celle de $N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s)$, on voit que $k_g > 0$ si $u_0 \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $k_g < 0$ sinon, donc $k_g(s) = \frac{-\cos u_0}{r\sin u_0}$.
En particulier, on retrouve que si $u_0 = \frac{\pi}{2}$, on a bien une géodésique. Le terme de bord vaut finalement :

$$\int_0^{2\pi\, r\, \sin u_0} \frac{-\cos u_0}{r\sin u_0}\, ds = -2\pi\cos u_0.$$

On a donc bien $\displaystyle\iint_R K\,d\sigma + \int_{\partial R} k_g = 2\pi$. $\square$

Il est intéressant de noter que, dans le cas où K ne s'annule pas et où N est injective, la valeur absolue de la courbure "totale" $\iint_R K\,d\sigma$ s'interprète en termes d'aire.

Proposition 2.12. *Supposons que R est une région régulière de S sur laquelle K ne s'annule pas et N est injective. Alors :*

$$\left|\iint_R K\,d\sigma\right| = \mathcal{A}(N(R)).$$

Démonstration. On le montre pour une région simple incluse dans un voisinage de coordonnées $X(U)$ sur lequel K est de signe constant. Le résultat général s'en déduit par triangulation. Comme N est supposée injective sur R et $K \neq 0$, $N \circ X$ est un paramétrage de $N(R)$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(N(R)) &= \iint_U ||dN_p(X_u) \wedge dN_p(X_v)||\,du\,dv \\
&= \iint_U |det(dN_p)|\,||X_u \wedge X_v||\,du\,dv \\
&= \iint_U |K(X(u,v))|\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \\
&= \left|\iint_R K\,d\sigma\right|.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Comme on s'est autorisé à avoir une frontière seulement régulière par morceaux, on peut se demander si le théorème de Gauss-Bonnet reste vrai pour une surface compacte admettant des points anguleux, par exemple un cube. La réponse est non. En effet, le cube est presque partout plan, donc $\iint_S K\,d\sigma = 0$, mais la caractéristique du cube est $\chi(S) = 2$ (on peut le vérifier facilement par triangulation ou invoquer l'homéomorphisme à la sphère).

3 Applications

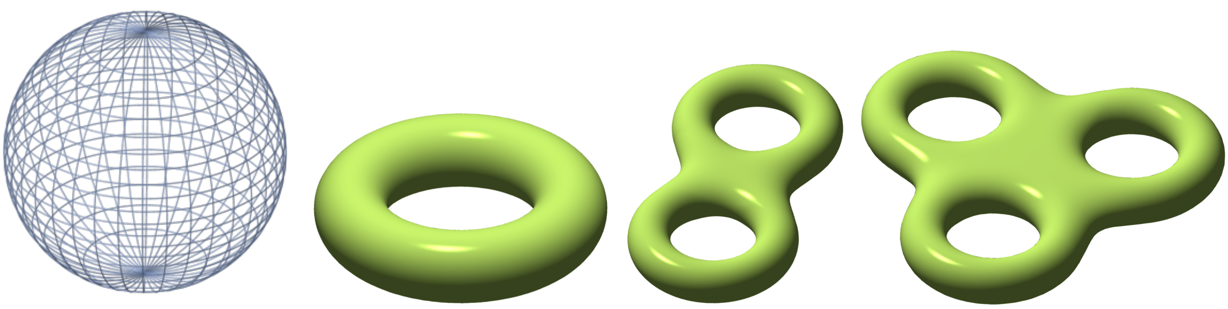
3.1 Etude des surfaces compactes

On admet tout d'abord le théorème essentiel suivant, qui donne une classification à homéomorphisme près des surfaces compactes (régulières orientables connexes) en fonction de leur caractéristique d'Euler-Poincaré.

Théorème 3.1. *(théorème de classification des surfaces compactes)*

- ▷ *Soit S_1 et S_2 deux surfaces compactes. Alors S_1 et S_2 sont homéomorphes si et seulement si $\chi(S_1) = \chi(S_2)$.*
- ▷ *Soit S une surface compacte. Alors $\chi(S) \in \{2, 0, -2, -4, ...\}$.*
- ▷ *Pour chaque entier $\chi(S) = -2(g-1)$ de la liste précédente, le tore à g trous est un représentant à homéomorphisme près de la classe de S. g est appelé le genre de S.*

FIGURE 4 – Sphère et tores à 1, 2 et 3 trous



On en déduit les liens suivants entre signe de la courbure et homéomorphisme à la sphère.

Proposition 3.2. *Soit S une surface compacte.*

1. *Il existe un point $p \in S$ tel que $K(p) > 0$.*
2. *Supposons que, pour tout $p \in S$, on a $K(p) \geq 0$. Alors S est homéomorphe à la sphère.*
3. *Supposons que S n'est pas homéomorphe à la sphère. Alors il existe des points tels que $K > 0$, $K < 0$ et $K = 0$.*

Démonstration.

1. Comme S est compacte, la fonction réelle $p \in S \mapsto ||p||^2$ admet un maximum global sur S, disons en p_0. Montrons que $K(p_0) > 0$. Notons $r = ||p_0||$ et N_0 le vecteur normal à la sphère en p_0, unitaire, rentrant. Soit $\alpha : I \to S$ une courbe régulière vérifiant $\alpha(0) = p_0$. Par maximalité, S est entièrement contenue dans la sphère centrée en 0 et de rayon r, donc pour tout $t \in I$, on a $\langle \alpha(t) - \alpha(0), N_0 \rangle > 0$ (en effet, les deux vecteurs pointent strictement vers le même côté du plan tangent à la sphère en p_0). En développant au premier ordre et en remarquant que $\langle \alpha'(0), N_0 \rangle = 0$ (car le plan tangent à la sphère et à la surface en p_0 sont égaux), il vient $\langle \alpha''(0), N_0 \rangle > 0$. Donc la courbure normale de α en 0 est strictement positive, et ce pour toute courbe α passant en p_0. On en déduit que $K(p_0) > 0$.
2. Le premier point assure que $\iint_S K \, d\sigma > 0$. Ensuite, on applique le théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes, qui donne :
$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K \, d\sigma > 0.$$
D'après le théorème de classification des surfaces compactes, on a donc $\chi(S) = 2$, donc S est homéomorphe à la sphère.
3. Le premier point a montré l'existence d'un point p_1 tel que $K(p_1) > 0$. D'après le deuxième point, comme S est supposée non homéomorphe à la sphère, il existe donc aussi un point p_2 tel que $K(p_2) < 0$. Soit maintenant une courbe continue tracée dans S qui relie p_1 à p_2. Une telle courbe existe car S est connexe et localement connexe par arcs (car localement homéomorphe à un ouvert du plan) donc connexe par arcs. La restriction de K à cette courbe est encore continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, K s'annule en un point de cette courbe.

□

Proposition 3.3. *Soit S une surface compacte de courbure de Gauss constante K. Alors, on a $K > 0$, et S est une sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{K}}$.*

Démonstration.

▷ D'après la proposition précédente, la courbure est strictement positive, et S est homéomorphe à la sphère.

▷ On cherche à montrer que tous les points de S sont ombilicaux. Supposons par l'absurde qu'il existe un point non ombilical. On admet qu'il existe un paramétrage orthogonal de S tel qu'on ait les formules suivantes, valables en tout point non ombilical :
$$G_u = \frac{2G}{k_1 - k_2} \frac{\partial k_2}{\partial u} \quad \text{et} \quad E_v = \frac{2E}{k_2 - k_1} \frac{\partial k_1}{\partial v}.$$
Toujours par compacité, k_2 admet un minimum sur S, disons en p. Mais alors, comme K est constante et strictement positive, k_1 admet en p un maximum. Dans ces conditions, p est un point non ombilical, sinon tous les points ont pour courbures principales $k_1 = k_2$ donc sont ombilicaux. De plus, on a $\frac{\partial k_2}{\partial u}(p) = 0$, donc $G_u(p) = 0$, et de même $\frac{\partial k_1}{\partial v}(p) = 0$, donc $E_v(p) = 0$. En dérivant à nouveau les expressions admises, et en tenant compte du fait qu'en p, on a $G_u = E_v = \frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{\partial k_1}{\partial v} = 0$, ainsi que la minimalité de k_2 et la maximalité de k_1, il vient
$$G_{uu} = \frac{2G}{k_1 - k_2} \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(p) > 0 \quad \text{et} \quad E_{vv} = \frac{2E}{k_2 - k_1} \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(p) > 0.$$
Alors, en utilisant la proposition 2.4 :
$$\begin{aligned} K(p) &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right) (p) \\ &= -\frac{1}{2EG} (G_{uu} + E_{vv})(p) < 0. \end{aligned}$$
Ceci est en contradiction avec le fait que $K > 0$. Donc, tous les points sont ombilicaux.

- ▷ En notant $k(p)$ la direction principale en p, on a $K = k(p)^2 =$ constante, donc par continuité, k est une constante non nulle. Le point $f(p) = p + \frac{1}{k}N(p)$ est fixe (on le note p_0), car en différentiant en obtient $df_p = Id + \frac{1}{k}dN_p = 0$ et car S est connexe. De plus, $||p - f(p)|| = \frac{1}{k} =$ constante. Ainsi, tous les points de S sont sur la sphère de centre p_0 et de rayon $R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{K}}$.
- ▷ Il reste à justifier que S est égale à toute la sphère. Cela vient du fait que S est homéomorphe à la sphère, et que la sphère n'est homéomorphe à aucune de ses parties strictes. En effet, soit A une partie stricte de $\mathbb{S}^2$. Si $\mathbb{S}^2 \setminus A$ contient au moins deux points distincts, alors il ne peut y avoir homéomorphisme, car la sphère est simplement connexe alors que A ne l'est pas. Si A est la sphère privée d'un point, le même raisonnement s'applique en retirant un point sur la sphère, qui reste simplement connexe, alors que A privée d'un point ne l'est plus.

□

3.2 Résultats sur les géodésiques

Le théorème de Gauss-Bonnet fait apparaître les courbures géodésiques, qui sont nulles pour des géodésiques. Il découle donc naturellement des résultats simples pour les géodésiques et les régions qu'elles délimitent.

Théorème 3.4. (Gauss, 1827)
Soit T un triangle géodésique de S (c'est-à-dire dont les côtés sont des portions de géodésiques). Soit ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 les angles internes de T. Alors

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi + \iint_T K\, d\sigma.$$

En particulier, si $K = 0$ sur T, la somme des angles vaut π. Elle est strictement supérieure à π dans le cas d'une géométrie dite sphérique ($K > 0$) et strictement inférieure à π dans le cas d'une géométrie dite hyperbolique ($K < 0$).

Cet exemple, dû à Gauss, est une des premières formes sous lesquelles le théorème de Gauss-Bonnet est apparu. Il généralise le théorème classique selon lequel "la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés".

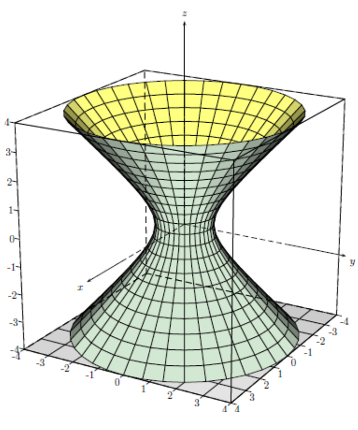
Démonstration. On applique le théorème de Gauss-Bonnet à la région simple T :

$$\iint_T K\, d\sigma + \sum_{i=1}^{3}(\pi - \phi_i) = 2\pi.$$

□

Proposition 3.5. *Soit S une surface homéomorphe à un cylindre, de courbure $K < 0$. Alors S admet au plus une géodésique simple fermée.*

Figure 5 – Un exemple : une surface de révolution obtenue à partir d'une branche d'hyperbole.



Cet exemple formalise notamment l'intuition selon laquelle une telle surface ne peut avoir une géodésique simple fermée qu'au niveau du "goulot d'étranglement" (voir figure 5).

Démonstration.

- ▷ On commence par rappeler le théorème de Jordan. Toute courbe fermée simple C du plan délimite une région simple du plan, appelée intérieur de C. On appelle extérieur le plan privé de C et de son intérieur.
- ▷ On aura besoin du résultat suivant. Soit S une surface de courbure $K \leq 0$. Soit γ_1 et γ_2 deux segments de géodésiques sur S d'extrémités p et q communes. Alors γ_1 et γ_2 ne délimitent pas une région simple de S. En effet, soit θ_1 et θ_2 les angles aux sommets formés par ces deux segments. Si γ_1 et γ_2 délimitent une région simple R, on peut appliquer le théorème de Gauss-Bonnet à R, qui donne

$$\iint_R K\, d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi.$$

Or, comme il existe une unique géodésique passant par un point et tangente à une direction donnée en ce point, on a $\theta_1,\, \theta_2 \in [0, \pi[$. De plus, $\iint_R K\, d\sigma \leq 0$. On a donc une contradiction.
- ▷ Il découle de ce résultat qu'une géodésique fermée simple d'une surface S de courbure $K \leq 0$ ne peut pas être la frontière d'une région simple (c'est le cas précédent avec $\theta_1 = \theta_2 = 0$).
- ▷ Revenons à notre surface. Le cylindre droit canonique est homéomorphe à la sphère unité privée des pôles nord et sud, qui, elle-même, est homéomorphe au plan privé de l'origine. Ainsi, S est homéomorphe au plan privé de 0, via un certain homéomorphisme noté Φ.
- ▷ Soit Γ la trace d'une géodésique simple fermée de S. D'après le point précédent, Γ ne peut pas délimiter une région simple de S. Il en découle que $\Phi(\Gamma)$ contient nécessairement 0 en son intérieur. Supposons maintenant que Γ' soit la trace d'une autre géodésique fermée simple de S. $\Phi(\Gamma')$ ne peut intersecter $\Phi(\Gamma)$, sinon on obtient une région simple délimitée par des portions de géodésiques, ce qui contredit le premier point. Donc, $\Phi(\Gamma')$ contient 0 en son intérieur et est contenue intégralement dans l'extérieur de $\Phi(\Gamma)$ (ou dans son intérieur, ce qui ne change pas le raisonnement).
- ▷ La région R située entre $\Phi(\Gamma)$ et $\Phi(\Gamma')$ a pour image inverse par Φ une région régulière. On peut donc lui appliquer le théorème de Gauss-Bonnet :

$$\iint_{\Phi^{-1}(R)} K\, d\sigma = 2\pi\, \chi(R).$$

(car χ est invariante par homéomorphisme). Or le premier terme de cette égalité est strictement négatif, par hypothèse. Et le second est nul, car R est homéomorphe à un cylindre fini, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle. On obtient donc une contradiction.

□

On utilise le même type d'argument dans la proposition suivante. On fera attention cependant au fait que le caractère géodésique n'est pas invariant par homéomorphisme. Il suffit de considérer la projection stéréographique de la sphère privée du pôle nord sur le plan : l'équateur est une géodésique de la sphère mais son image n'est pas une droite du plan.

Proposition 3.6. *Soit S une surface compacte, de courbure $K > 0$, admettant deux géodésiques fermées simples Γ_1 et Γ_2. Alors Γ_1 et Γ_2 s'intersectent.*

Démonstration. On a déjà vu que S est homéomorphe à la sphère. Soit Φ un tel homéomorphisme. Si Γ_1 et Γ_2 ne s'intersectent pas, leurs images $\Phi(\Gamma_1)$ et $\Phi(\Gamma_2)$ ne s'intersectent pas non plus, donc délimitent sur la sphère une région régulière R, qui est homéomorphe à un cylindre fini, donc de caractéristique $\chi(R) = 0$. En appliquant le théorème de Gauss-Bonnet à $\Phi^{-1}(R)$:

$$\iint_{\Phi^{-1}(R)} K\, d\sigma = 2\pi\, \chi(R) = 0,$$

ce qui contredit le fait que $K > 0$ sur S. Ainsi, Γ_1 et Γ_2 s'intersectent. □

Références

[1] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Traduit du portugais.

[2] J. J. Stoker, *Differential Geometry.* Wiley, New York, 1949.

[3] H. Hopf, Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, *Compositio Math. 2.* 1935, pp. 50-62. Traduit de l'allemand.