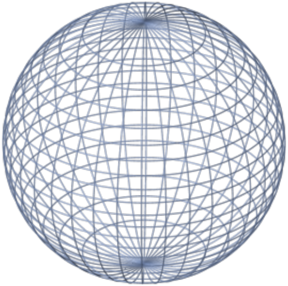
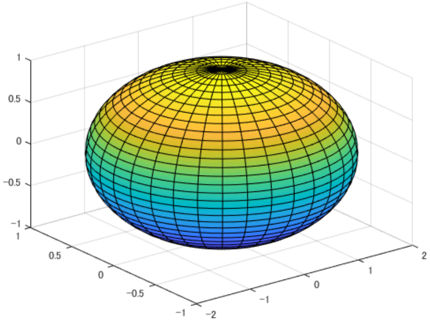
Théorème de Gauss-Bonnet

Julien Allasia

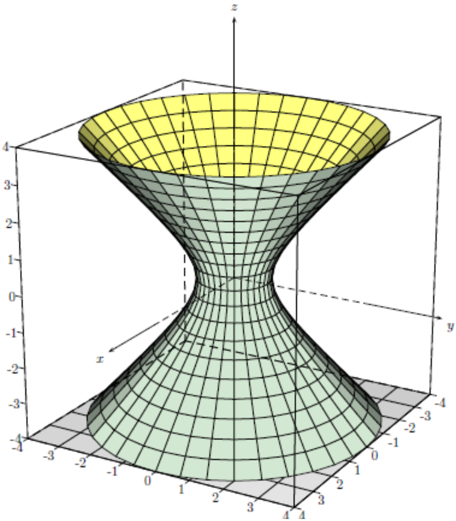
5 septembre 2018

Introduction





Introduction



1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Définition

Surface régulière $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$\forall\, p \in S$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et une fonction $X : U \to V \cap S$ tels que :

Définition

Surface régulière $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$\forall\, p \in S$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et une fonction $X : U \to V \cap S$ tels que :

1. X est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition

Surface régulière $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$\forall\, p \in S$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et une fonction $X : U \to V \cap S$ tels que :

1. X est $\mathcal{C}^\infty$.
2. X est un homéomorphisme.

Définition

Surface régulière $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$\forall\, p \in S$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et une fonction $X : U \to V \cap S$ tels que :

1. X est $\mathcal{C}^\infty$.
2. X est un homéomorphisme.
3. Pour tout $q \in U$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective.

Orientation d'une surface

- S est dite orientable s'il existe une application continue $N : S \to \mathbb{R}^3$ qui à $p \in S$ associe un vecteur normal unitaire.

Orientation d'une surface

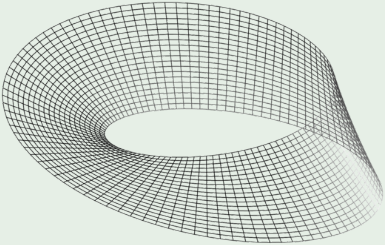
- S est dite orientable s'il existe une application continue $N : S \to \mathbb{R}^3$ qui à $p \in S$ associe un vecteur normal unitaire.
- Dans ce cas, N est $\mathcal{C}^\infty$.

Orientation d'une surface

- S est dite orientable s'il existe une application continue $N : S \to \mathbb{R}^3$ qui à $p \in S$ associe un vecteur normal unitaire.
- Dans ce cas, N est $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

Ruban de Möbius



Formes quadratiques fondamentales

- Première forme fondamentale :

$$\mathrm{I}_p : \left| \begin{array}{rcl} T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \langle w, w \rangle = ||w||^2 \end{array} \right.$$

Formes quadratiques fondamentales

- Première forme fondamentale :

$$\mathrm{I}_p : \left| \begin{array}{rcl} T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \langle w, w \rangle = ||w||^2 \end{array} \right.$$

- Seconde forme fondamentale :

$$\mathrm{II}_p : \left| \begin{array}{rcl} T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & -\langle dN_p(w), w \rangle \end{array} \right.$$

Expressions dans la base (X_u, X_v)

- $\mathrm{I}_p(w) = E\, w_1^2 + 2F\, w_1\, w_2 + G\, w_2^2$, où :

$$\left|\begin{array}{l} E = \langle X_u, X_u \rangle, \\ F = \langle X_u, X_v \rangle, \\ G = \langle X_v, X_v \rangle. \end{array}\right.$$

Expressions dans la base (X_u, X_v)

- $\mathrm{I}_p(w) = E\, w_1^2 + 2F\, w_1\, w_2 + G\, w_2^2$, où :

$$\left| \begin{array}{l} E = \langle X_u, X_u \rangle, \\ F = \langle X_u, X_v \rangle, \\ G = \langle X_v, X_v \rangle. \end{array} \right.$$

- $\mathrm{II}_p(w) = e\, w_1^2 + 2f\, w_1\, w_2 + g\, w_2^2$, où :

$$\left| \begin{array}{l} e = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{array} \right.$$

Courbure de Gauss

Théorème

Il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de T_pS et $k_1 \geq k_2$ tels que :

Courbure de Gauss

Théorème

Il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de T_pS et $k_1 \geq k_2$ tels que :

- $dN_p(e_1) = -k_1 e_1,$
- $dN_p(e_2) = -k_2 e_2,$

Courbure de Gauss

Théorème

Il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de T_pS et $k_1 \geq k_2$ tels que :

- $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$,
- $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$,
- $\forall w \in T_pS$, $||w|| = 1 \Rightarrow k_2 \leq \mathrm{II}_p(w) \leq k_1$.

Courbure de Gauss

Théorème

Il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de T_pS et $k_1 \geq k_2$ tels que :

- $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$,
- $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$,
- $\forall w \in T_pS,\ ||w|| = 1 \Rightarrow k_2 \leq \mathrm{II}_p(w) \leq k_1$.

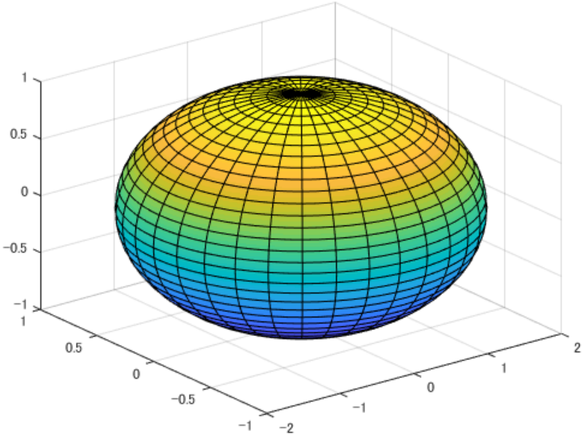
Définition

La courbure de Gauss de S en p est :

$$K = det(dN_p) = k_1 k_2.$$

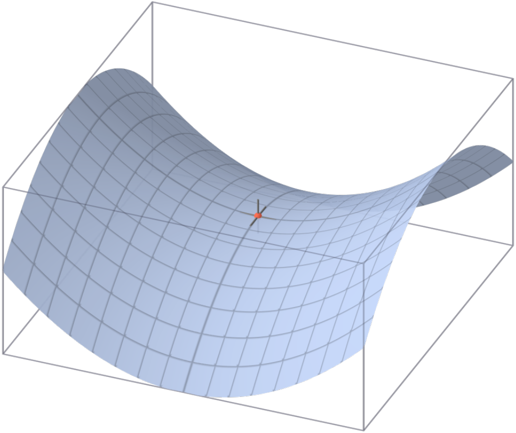
Courbure de Gauss

Point elliptique : $K > 0$



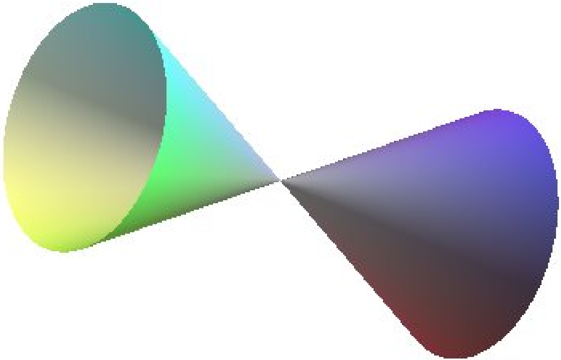
Courbure de Gauss

Point hyperbolique : $K < 0$



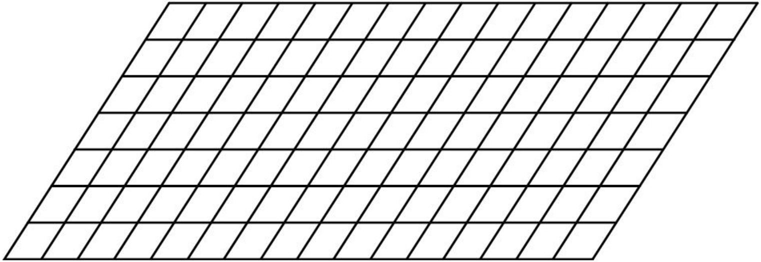
Courbure de Gauss

Point parabolique : $K = 0$ et $dN_p \neq 0$



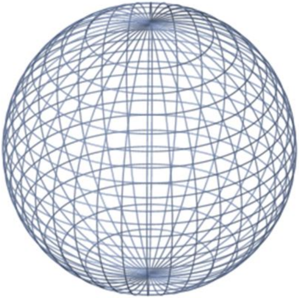
Courbure de Gauss

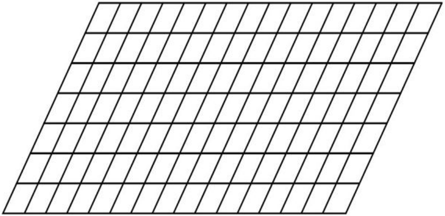
Point planaire : $dN_p = 0$



Courbure de Gauss

Point ombilical : $k_1 = k_2$





Courbure de Gauss

Formule d'intérêt pratique

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Courbure de Gauss

Formule d'intérêt pratique

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Formule d'intérêt théorique

Dans le cas $F = 0$:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\partial_u\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right) + \partial_v\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)\right).$$

Courbure de Gauss

Formule d'intérêt pratique

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Formule d'intérêt théorique

Dans le cas $F = 0$:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\partial_u \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \partial_v \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right).$$

- *Theorema egregium*
- Preuve du théorème de Gauss-Bonnet
- Applications du théorème de Gauss-Bonnet

Courbure géodésique

Courbe paramétrée par longueur d'arc : $\alpha : I \to S$
Composante tangentielle de l'accélération :

$$\alpha''_T(s) = k_g(s)\left(N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s)\right)$$

Courbure géodésique

Courbe paramétrée par longueur d'arc : $\alpha : I \to S$
Composante tangentielle de l'accélération :

$$\alpha''_T(s) = k_g(s)\,(N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s))$$

Définition

k_g est appelée courbure géodésique de α.

Courbure géodésique

Courbe paramétrée par longueur d'arc : $\alpha : I \to S$
Composante tangentielle de l'accélération :

$$\alpha''_T(s) = k_g(s)\,(N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s))$$

Définition

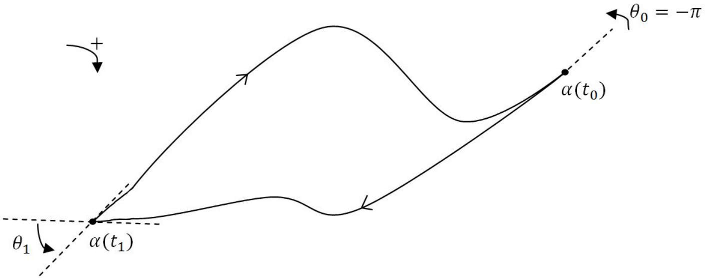
k_g est appelée courbure géodésique de α.

Proposition

α est une géodésique $\iff k_g = 0$.

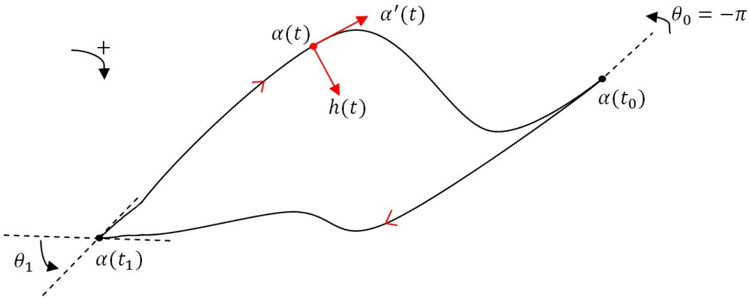
1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Courbes fermées simples régulières par morceaux



- Sommets de α : $\alpha(t_0)$, ..., $\alpha(t_k)$
- Angles aux sommets : $\theta_i \in [-\pi, \pi]$

Courbes fermées simples régulières par morceaux



Courbe **positivement orientée** :
dans la base orthogonale directe (α', h), h pointe vers R.

Régions

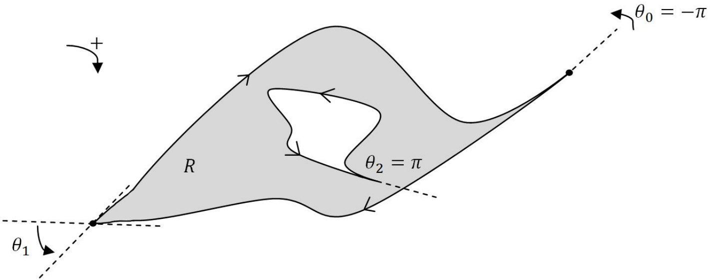
- **Région** de S : ouvert connexe borné $\cup$ sa frontière.

Régions

- **Région** de S : ouvert connexe borné $\cup$ sa frontière.
- **Région simple** :
  - R homéomorphe au disque
  - $\partial R =$ courbe fermée simple régulière par morceaux

Régions

- **Région** de S : ouvert connexe borné $\cup$ sa frontière.
- **Région simple** :
  - R homéomorphe au disque
  - ∂R = courbe fermée simple régulière par morceaux
- **Région régulière** :
  - R compacte
  - ∂R = union finie de courbes fermées simples régulières par morceaux qui ne s'intersectent pas



1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Triangulation d'une région régulière

- Triangle : sous-région simple de R à 3 sommets

Triangulation d'une région régulière

- Triangle : sous-région simple de R à 3 sommets
- Triangulation de R : T_1, ..., T_n avec :
  - $R = \cup T_i$
  - $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$ sommet commun ou arête commune

Triangulation d'une région régulière

- Triangle : sous-région simple de R à 3 sommets
- Triangulation de R : T_1, ..., T_n avec :
  - $R = \cup T_i$
  - $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$ sommet commun ou arête commune
- E = nombre d'arêtes
- F = nombre de triangles
- V = nombre de sommets

Triangulation d'une région régulière

- Triangle : sous-région simple de R à 3 sommets
- Triangulation de R : T_1, ..., T_n avec :
  - $R = \cup T_i$
  - $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$ sommet commun ou arête commune
- E = nombre d'arêtes
- F = nombre de triangles
- V = nombre de sommets

Caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi = F - E + V$$

Triangulation d'une région régulière

- Triangle : sous-région simple de R à 3 sommets
- Triangulation de R : T_1, ..., T_n avec :
  - $R = \cup T_i$
  - $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow$ sommet commun ou arête commune
- E = nombre d'arêtes
- F = nombre de triangles
- V = nombre de sommets

Caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi = F - E + V$$

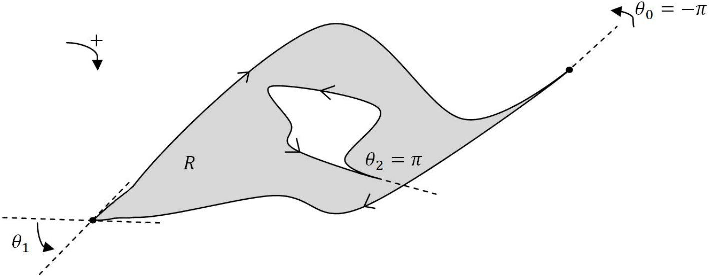
Théorème

χ ne dépend pas du choix de la triangulation.

1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Théorème de Gauss-Bonnet

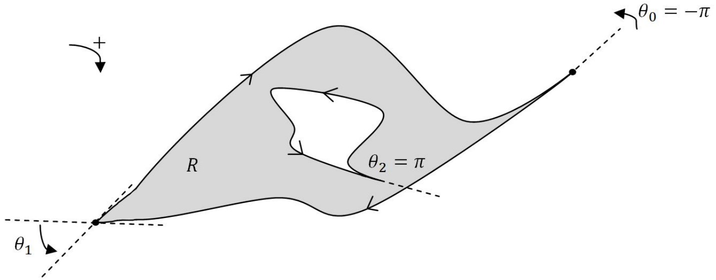
- R une région régulière de S
- $\partial R = \cup_{i=1}^{n} C_i$ orientées positivement
- Angles aux sommets : θ_0, ..., θ_p



Théorème de Gauss-Bonnet

- R une région régulière de S
- $\partial R = \cup_{i=1}^{n} C_i$ orientées positivement
- Angles aux sommets : θ_0, ..., θ_p

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{p} \theta_i = 2\pi\, \chi(R).$$



Idée de la preuve

1. Version locale

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite
   - **Outils** : calcul différentiel

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite
   - **Outils** : calcul différentiel
2. Passage du local au global

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite
   - **Outils** : calcul différentiel
2. Passage du local au global
   - **Cadre** : région régulière

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite
   - **Outils** : calcul différentiel
2. Passage du local au global
   - **Cadre** : région régulière
   - **Méthode** : triangulation assez fine

Idée de la preuve

1. Version locale
   - **Cadre** : région simple assez petite
   - **Outils** : calcul différentiel
2. Passage du local au global
   - **Cadre** : région régulière
   - **Méthode** : triangulation assez fine
   - **Outils** : topologiques

Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes

S : surface régulière orientable **compacte**

$$\iint_S K \, d\sigma = 2\pi \, \chi(S).$$

1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Théorème de classification des surfaces compactes

⚠ Surface compacte = régulière orientable compacte connexe

Théorème de classification des surfaces compactes

⚠ Surface compacte = régulière orientable compacte connexe

Théorème

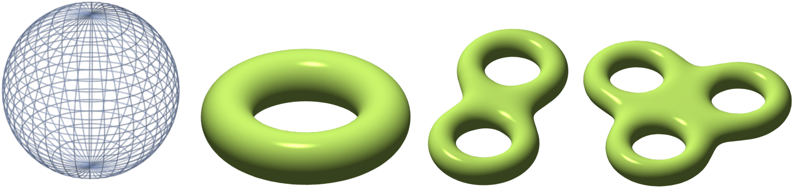
- S et S' sont homéomorphes $\iff \chi(S) = \chi(S')$.
- $\chi(S) \in \{2, 0, -2, -4, \ldots\}$.
- $\chi(S) = -2(g-1) \Rightarrow S$ est homéomorphe à un tore à g trous.

Théorème de classification des surfaces compactes

⚠ Surface compacte = régulière orientable compacte connexe

Théorème

- S et S' sont homéomorphes $\iff \chi(S) = \chi(S')$.
- $\chi(S) \in \{2, 0, -2, -4, \ldots\}$.
- $\chi(S) = -2(g-1) \Rightarrow S$ est homéomorphe à un tore à g trous.



Propriétés des surfaces compactes

Proposition

1. Il existe un point $p \in S$ tel que $K(p) > 0$.

Propriétés des surfaces compactes

Proposition

1. Il existe un point $p \in S$ tel que $K(p) > 0$.
2. Si $K \geq 0$, alors S est homéomorphe à la sphère.

Propriétés des surfaces compactes

Proposition

1. Il existe un point $p \in S$ tel que $K(p) > 0$.
2. Si $K \geq 0$, alors S est homéomorphe à la sphère.
3. Si S n'est pas homéomorphe à la sphère, il existe des points où $K > 0$, $K < 0$ et $K = 0$.

Propriétés des surfaces compactes

Proposition

1. Il existe un point $p \in S$ tel que $K(p) > 0$.
2. Si $K \geq 0$, alors S est homéomorphe à la sphère.
3. Si S n'est pas homéomorphe à la sphère, il existe des points où $K > 0$, $K < 0$ et $K = 0$.
4. Si K est constante, alors S est une sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

1. Rappels de géométrie différentielle
2. Théorème de Gauss-Bonnet
   - Cadre de travail
   - Préliminaires topologiques
   - Théorème de Gauss-Bonnet
3. Applications
   - Etude des surfaces compactes
   - Résultats sur les géodésiques

Triangles géodésiques

Théorème

T un triangle géodésique de S

Angles internes : ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

Triangles géodésiques

Théorème

T un triangle géodésique de S
Angles internes : ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi + \iint_T K \, d\sigma.$$

Une application non triviale

- S homéomorphe à un cylindre
- $K < 0$

Alors S admet au plus une géodésique fermée simple.