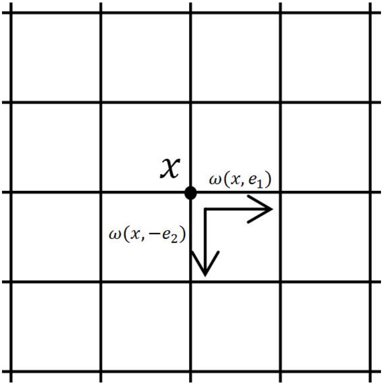
Marches aléatoires en environnements aléatoires

Julien Allasia

ENS de Lyon
Tutrice: Jessica Lin
McGill University, Montréal, Canada

Environnements

Environnement : $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$



$$\omega(x, \pm e_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} (\omega(x, e_i) + \omega(x, -e_i)) = 1.$$

Marche aléatoire dans ω

- ⚠ ω est maintenant fixé !
- $x \in \mathbb{Z}^d$ = point de départ de la marche aléatoire

$$\begin{cases} \mathbb{P}_\omega^x(X_0 = x) = 1 \\ \mathbb{P}_\omega^x(X_{n+1} = y \pm e_i \,|\, X_n = y) = \omega(y, \pm e_i). \end{cases}$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov

Idée du principe d'invariance

Etant donné un système stochastique évoluant dans un environnement aléatoire, est-il possible de le décrire, après changement d'échelle, par un système évoluant dans un environnement déterministe ?

Hypothèses de base

Translaté d'un environnement : $\theta^{x_0}\omega(x) = \omega(x + x_0)$

Hypothèses sur $\mathbb{P}$

- Stationarité : $\forall x_0 \in \mathbb{Z}^d,\ \forall F \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(\theta^{x_0}F) = \mathbb{P}(F)$
- Ergodicité : $\forall F \in \mathcal{F},\ (\forall x_0 \in \mathbb{Z}^d,\ \theta^{x_0}F = F) \Rightarrow \mathbb{P}(F) \in \{0, 1\}$

Hypothèses de base

Hypothèses sur les environnements ($\mathbb{P}$-*p.s.*)

- Equilibre : $\omega(x, e_i) = \omega(x, -e_i)$
- Ellipticité : $\omega(x, \pm e_i) > 0$

Conséquences sur la marche aléatoire

- Equilibre : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale
- Ellipticité : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible

Hypothèses additionnelles

1. Uniforme ellipticité : $\omega(x, \pm e_i) \geq \alpha$
2. Condition de moment avec $p > d$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\prod_{i=1}^{d} \omega(0, e_i)^{p/d}\right] < \infty$$

3. Condition de moment avec $p = d$

N.B. 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3.

Intermède 1 : Théorème de Donsker

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: marche aléatoire d'incréments i.i.d., centrés et de variance finie σ^2
$\tilde{X}_t$: interpolation linéaire des (X_n)
B : mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$

Théorème de Donsker

$$\left(\frac{\tilde{X}_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} B$$

Intermède 2 : Généralisation pour les martingales

$$V_n^i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_\omega^0 \left[(X_j^i - X_{j-1}^i)^2 \,|\, \mathcal{G}_{j-1} \right]$$

TCL pour les martingales

$$\left(\frac{\tilde{X}_{nt}}{\sqrt{V_n}} \right)_{t \geq 0} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} B$$

Principe d'invariance pour les marches aléatoires en environnements aléatoires

Théorème

Il existe $b \in \mathbb{R}^d$ tel que $b_i > 0$ et $\sum_{i=1}^d b_i = 1$, et

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \left(\frac{\widetilde{X}_{nt}}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} B^b$$

Après changement d'échelle spatiale et temporelle, presque toutes les marches aléatoires convergent vers un même mouvement brownien avec une matrice de covariance déterministe.

Ce qu'on sait :

$$\left(\frac{\widetilde{X}_{nt}}{\sqrt{V_n}}\right)_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$$

Ce qu'on veut :

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \left(\frac{\widetilde{X}_{nt}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B^b$$

Remarque : $V_n = 2\sum_{j=0}^{n-1}\omega(X_j)$

Théorème ergodique

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega(X_j) \xrightarrow{\mathbb{P}^0_\omega\text{-}p.s.} \frac{1}{2}b$$

Changement de point de vue

Marche aléatoire à valeurs dans Ω :

$$\bar{\omega}_n = \theta^{X_n}\omega$$

Soit $g_0 : \omega \longmapsto \omega(0)$.

Reformulation du théorème ergodique

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g_0(\bar{\omega}_j) \xrightarrow{\mathbb{P}^0_\omega\text{-}p.s.} \frac{1}{2}b$$

Objectif à atteindre

But : obtenir une mesure $\mathbb{Q}$ sur Ω telle que

- $\mathbb{Q}$ est invariante et ergodique pour $(\bar{\omega}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$

... de sorte que

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g_0(\bar{\omega}_j) \to \int_\Omega g_0 \,\mathrm{d}\mathbb{Q}$$

Méthode 1 : périodiser

- Δ_N : cube de largeur N
- ω^N : environnement tronqué à Δ_N et périodisé
- $(X_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$: marche aléatoire dans ω^N
- $(\hat{X}_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$: marche aléatoire ramenée dans Δ_N

$(\hat{X}_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure invariante μ_N

Méthode 1 : périodiser

- Φ_N : densité de μ_N par rapport à $\mathcal{U}(\Delta_N)$
- $\mathbb{Q}_N = \sum_{x \in \Delta_N} \Phi_N \, \delta_{\theta^x \omega^N}$
- $(\bar{\omega}_n^N) = (\theta^{X_n^N} \omega^N)$: environnement périodique du point de vue de la particule

$\mathbb{Q}_N$ est invariante pour $(\bar{\omega}_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$

Méthode 2 : temps de sortie

$T = \inf\{j \geq 0,\ X_j \notin \Delta_N\}$

$$\mathbb{Q}_N = \frac{1}{\mathbb{E}_\omega^0[T]}\, \mathbb{E}_\omega^0 \left[\sum_{j=0}^{T-1} \delta_{\theta^{X_j}\omega} \right]$$

⚠ Q_N n'est *a priori* pas invariante pour $(\bar{\omega}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Construction de $\mathbb{Q}$

Arguments de compacité

A extraction près, $\mathbb{Q}_N \longrightarrow \mathbb{Q}$

Etapes de la preuve :

- $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ $\Rightarrow$ étape difficile
- Invariance de $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$
- Ergodicité de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

Générateur de la chaîne de Markov :

$$L_\omega f(x) = \sum_{i=1}^{d} \omega(x, e_i) \left[f(x + e_i) + f(x - e_i) - 2\, f(x) \right]$$

L'unique solution de $\begin{cases} L_\omega f = -g & \text{dans } \Delta_N \\ f = 0 & \text{sur } \partial \Delta_N \end{cases}$ est

$$f(x) = \mathbb{E}_\omega^x \left[\sum_{j=0}^{T-1} g(X_j) \right]$$

avec $T = \inf\{j \geq 0,\ X_j \in \partial \Delta_N\}$.

$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

Soit $\epsilon_\omega(x) = \prod_{i=1}^d \omega(x, e_i)^{1/d}$.

Principe du maximum

Supposons que $\begin{cases} L_\omega f = -g & \text{dans } \Delta_N \\ f = 0 & \text{sur } \partial\Delta_N \end{cases}$

Alors

$$\max_{\Delta_N} f \leq C\, N^2 \left\| \frac{g}{\epsilon_\omega} \right\|_{L^d(\Delta_N)}$$

Application avec la méthode 2

Rappel : $\mathbb{Q}_N = \frac{1}{\mathbb{E}_\omega^0[T]} \mathbb{E}_\omega^0 \left[\sum_{j=0}^{T-1} \delta_{\theta^{X_j}\omega} \right]$

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mathbb{Q}_N = \frac{1}{\mathbb{E}_\omega^0[T]} \mathbb{E}_\omega^0 \left[\sum_{j=0}^{T-1} \tilde{g}(X_j) \right] \leq C \frac{N^2}{\mathbb{E}_\omega^0[T]} \left\| \frac{\tilde{g}}{\epsilon} \right\|_{L^d(\Delta_N)}$$

où $\frac{N^2}{\mathbb{E}_\omega^0[T]} \leq 1$

Application avec la méthode 2

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mathbb{Q}_N \leq C \left\| \frac{\tilde{g}}{\epsilon} \right\|_{L^d(\Delta_N)}$$

1. Uniforme ellipticité : $\left\| \frac{\tilde{g}}{\epsilon} \right\|_{L^d(\Delta_N)} \leq C_\alpha \left\| \tilde{g} \right\|_{L^d(\Delta_N)}$
2. $\mathbb{E}[\epsilon^{-p}] < \infty$ $(p > d)$: $\left\| \frac{\tilde{g}}{\epsilon} \right\|_{L^d(\Delta_N)} \leq \left\| \epsilon \right\|_{L_p(\Delta_N)} \left\| \tilde{g} \right\|_{L^q(\Delta_N)}$
3. $\mathbb{E}[\epsilon^{-d}] < \infty$: garder ϵ dans la norme suffit

Approcher $\mathbb{Q}$ par ergodicité

Rappel : théorème ergodique

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(\bar{\omega}_j) \xrightarrow{\mathbb{P}^0_\omega\text{-}p.s.} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\psi]$$

Si ψ bornée, convergence L^1 :

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\mathbb{E}^0_\omega\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\psi(\bar{\omega}_j) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\psi]\right)\right] \longrightarrow 0.$$

Vitesse de convergence

Soit $0 < p < d$.
Il existe c, $C, a > 0$ tels que pour tout τ,

$$\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}_\omega^0 \left[\sum_{j=0}^{\tau \wedge n-1} (\psi(\bar{\omega}_j) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\psi]) \right] \right| \leq C \, \|\psi\|_\infty \, n^{-a}$$

avec $\mathbb{P}$-probabilité $\geq 1 - C \, e^{-c \, n^{p/2}}$

Principe d'invariance 1D

Rappel : principe d'invariance

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad \left(\frac{\widetilde{X}_{nt}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B^b$$

A $t = 1$, projeté en 1D :

$$\frac{X_n \cdot l}{\sqrt{n}\sqrt{{}^t l \operatorname{diag}(b)\, l}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Vitesse de convergence

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $0 < p < d$, $l \in \mathbb{R}^d$.
Il existe $\gamma, C_0 > 0$ tel que

$$\sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}_\omega^0 \left(\frac{X_n \cdot l}{\sqrt{n}\sqrt{{}^t l\,\mathrm{diag}(b)\,l}} \leq r \right) - \phi(r) \right| \leq C_0\, n^{-\gamma}$$

avec $\mathbb{P}$-probabilité $\geq 1 - C_0\, e^{-n^{p/2}}$