

# MARCHES ALÉATOIRES EN MILIEU ALÉATOIRE DYNAMIQUE

Julien ALLASIA

Tutrice: Oriane BLONDEL - ICJ

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 1 Cadre initial : plus proches voisins



- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

# But

## Cadre de travail

- Marche aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , partant de 0
- Sauts à taux 1
- Sauts déterminés par un environnement dynamique
- Plus proches voisins :  sauts dans  $\{-1, 0, 1\}$  

# But

## Cadre de travail

- Marche aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , partant de 0
- Sauts à taux 1
- Sauts déterminés par un environnement dynamique
- Plus proches voisins :  $\triangle!$  sauts dans  $\{-1, 0, 1\}$   $\triangle!$

## Loi des grands nombres

Il existe  $v \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} v.$$

# But

## Cadre de travail

- Marche aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , partant de 0
- Sauts à taux 1
- Sauts déterminés par un environnement dynamique
- Plus proches voisins :  $\triangleleft$  sauts dans  $\{-1, 0, 1\}$   $\triangleleft$

## Loi des grands nombres

Il existe  $v \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} v.$$

## 2 idées clefs

- 1 Le couplage monotone des particules
- 2 Les schémas de renormalisation

# 1e idée clef : couplage des particules

- Espace-temps :  $\mathbb{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$

# 1e idée clef : couplage des particules

- Espace-temps :  $\mathbb{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$
- Marche aléatoire  $(Y_t^y)_{t \geq 0}$  partant de chaque  $y = (x, s) \in \mathbb{L}$  :
  - $\pi_1(Y_t^y) = X_t^y$
  - $X_0^y = x$
  - $\pi_2(Y_t^y) = t + s$



# 1e idée clef : couplage des particules

- Espace-temps :  $\mathbb{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$
- Marche aléatoire  $(Y_t^y)_{t \geq 0}$  partant de chaque  $y = (x, s) \in \mathbb{L}$  :
  - $\pi_1(Y_t^y) = X_t^y$
  - $X_0^y = x$
  - $\pi_2(Y_t^y) = t + s$
- Pour chaque site  $x \in \mathbb{Z}$ , allocation de
  - Temps de saut  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , qui ne sonnent pas en même temps
  - Aléas pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$

# 1e idée clef : couplage des particules

- Espace-temps :  $\mathbb{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$
- Marche aléatoire  $(Y_t^y)_{t \geq 0}$  partant de chaque  $y = (x, s) \in \mathbb{L}$  :
  - $\pi_1(Y_t^y) = X_t^y$
  - $X_0^y = x$
  - $\pi_2(Y_t^y) = t + s$
- Pour chaque site  $x \in \mathbb{Z}$ , allocation de
  - Temps de saut  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , qui ne sonnent pas en même temps
  - Aléas pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$

## Monotonie

Si  $x \leq x' \in \mathbb{Z}$  et  $s \geq 0$ , alors p.s.

$$X_t^{(x,s)} \leq X_t^{(x',s)}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

# 1e idée clef : couplage des particules

- Espace-temps :  $\mathbb{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$
- Marche aléatoire  $(Y_t^y)_{t \geq 0}$  partant de chaque  $y = (x, s) \in \mathbb{L}$  :
  - $\pi_1(Y_t^y) = X_t^y$
  - $X_0^y = x$
  - $\pi_2(Y_t^y) = t + s$
- Pour chaque site  $x \in \mathbb{Z}$ , allocation de
  - Temps de saut  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , qui ne sonnent pas en même temps
  - Aléas pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$

## Monotonie

Si  $x \leq x' \in \mathbb{Z}$  et  $s \geq 0$ , alors p.s.

$$X_t^{(x,s)} \leq X_t^{(x',s)}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

⚠ Valable uniquement pour les sauts aux plus proches voisins ⚠

# Formalisation du problème

## 3 processus indépendants

- L'environnement  $\eta$
- Les temps de sauts  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$
- L'aléa pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$

# Formalisation du problème

## 3 processus indépendants

- L'environnement  $\eta$
- Les temps de sauts  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$
- L'aléa pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$

**Environnement** :  $\eta = (\eta_t(x))_{(x,t) \in \mathbb{L}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{L}}$ , Markov et invariant par translation

# Formalisation du problème

## 3 processus indépendants

- L'environnement  $\eta$
- Les temps de sauts  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$
- L'aléa pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$

**Environnement** :  $\eta = (\eta_t(x))_{(x,t) \in \mathbb{L}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{L}}$ , Markov et invariant par translation

**Temps de sauts** :  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$  pour chaque  $x \in \mathbb{Z}$ , processus de Poisson i.i.d. de paramètres 1

# Formalisation du problème

## 3 processus indépendants

- L'environnement  $\eta$
- Les temps de sauts  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$
- L'aléa pour les sauts  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$

**Environnement** :  $\eta = (\eta_t(x))_{(x,t) \in \mathbb{L}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{L}}$ , Markov et invariant par translation

**Temps de sauts** :  $(T_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*}$  pour chaque  $x \in \mathbb{Z}$ , processus de Poisson i.i.d. de paramètres 1

**Aléa pour les sauts** : uniformes i.i.d.  $(U_i^x)_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{Z}}$

# Formalisation du problème

## Règles de saut

- Fonction de saut déterministe

$$g : \underbrace{S^{[-\ell, \ell]}}_{\substack{\text{environnement} \\ \text{à portée } \ell}} \times \underbrace{[0, 1]}_{\substack{\text{aléa pour} \\ \text{les sauts}}} \rightarrow \underbrace{\{-1, 0, 1\}}_{\substack{\text{sauts aux plus} \\ \text{proches voisins}}}$$



# Formalisation du problème

## Règles de saut

- Fonction de saut déterministe

$$g : \underbrace{S^{[-\ell, \ell]}}_{\substack{\text{environnement} \\ \text{à portée } \ell}} \times \underbrace{[0, 1]}_{\substack{\text{aléa pour} \\ \text{les sauts}}} \rightarrow \underbrace{\{-1, 0, 1\}}_{\substack{\text{sauts aux plus} \\ \text{proches voisins}}}$$

- Marche aléatoire partant de  $y = (x, s) \in \mathbb{L}$  :

Si  $t = T_i^X$  et  $X_{t-}^y = X$ ,

$$X_t^y = X + g\left(\eta_t(X - \ell), \dots, \eta_t(X + \ell), U_i^X\right).$$

# Hypothèse fondamentale

## Hypothèse de découplage faible

Il existe  $c_0, \alpha > 0$  tel que pour tout  $H \geq 1$ ,

- Pour tout  $B_1, B_2$  boîtes de longueurs  $\leq 5H$  séparée en temps par  $H$ ,
- Pour tout  $A_1, A_2$  mesurables par rapport à l'environnement dans  $B_1, B_2$ ,

$$|\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)| \leq c_0 H^{-\alpha}.$$

# Hypothèse fondamentale

## Hypothèse de découplage faible

Il existe  $c_0, \alpha > 0$  tel que pour tout  $H \geq 1$ ,

- Pour tout  $B_1, B_2$  boîtes de longueurs  $\leq 5H$  séparée en temps par  $H$ ,
- Pour tout  $A_1, A_2$  mesurables par rapport à l'environnement dans  $B_1, B_2$ ,

$$|\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)| \leq c_0 H^{-\alpha}.$$

**Question** : Comment utiliser en pratique cette hypothèse ?

## 2e idée clef : les schémas de renormalisation

- **But** :  $\mathbb{P}(\text{mauvais événement indexé par } H) \leq \text{borne}(H) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0.$

## 2e idée clef : les schémas de renormalisation

- **But** :  $\mathbb{P}(\text{mauvais événement indexé par } H) \leq \text{borne}(H) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0$ .
- **Etape 1** : Commencer par une sous-suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ .  
Montrer que sur  $A_{k+1}$ , 2 événements de probabilité  $p_k$  se produisent, dans des boîtes séparées de  $R_k$ .

## 2e idée clef : les schémas de renormalisation

- **But** :  $\mathbb{P}(\text{mauvais événement indexé par } H) \leq \text{borne}(H) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0$ .
- **Etape 1** : Commencer par une sous-suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ .  
Montrer que sur  $A_{k+1}$ , 2 événements de probabilité  $p_k$  se produisent, dans des boîtes séparées de  $R_k$ .
- **Etape 2** :  $p_k \leq \text{borne}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .
  - Hypothèse de découplage:

$$p_{k+1} \leq C_k (p_k^2 + c_0 R_k^{-\alpha}).$$

- Estimation de  $p_k$  par récurrence.

## 2e idée clef : les schémas de renormalisation

- **But** :  $\mathbb{P}(\text{mauvais événement indexé par } H) \leq \text{borne}(H) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0$ .
- **Etape 1** : Commencer par une sous-suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ .  
Montrer que sur  $A_{k+1}$ , 2 événements de probabilité  $p_k$  se produisent, dans des boîtes séparées de  $R_k$ .
- **Etape 2** :  $p_k \leq \text{borne}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .
  - Hypothèse de découplage:

$$p_{k+1} \leq C_k (p_k^2 + c_0 R_k^{-\alpha}).$$

- Estimation de  $p_k$  par récurrence.
- **Etape 3** : Interpoler.

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$



# Exemple

## Processus de Markov

- Càdlàg dans  $S^{\mathbb{Z}}$
- Mesure invariante  $\nu$
- Semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  continu dans  $(L^2(\nu), \|\cdot\|_\nu)$
- Générateur  $\mathcal{L}$  avec trou spectral  $\lambda > 0$

# Exemple

## Processus de Markov

- Càdlàg dans  $S^{\mathbb{Z}}$
- Mesure invariante  $\nu$
- Semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  continu dans  $(L^2(\nu), \|\cdot\|_{\nu})$
- Générateur  $\mathcal{L}$  avec trou spectral  $\lambda > 0$

Pour tout  $f \in L^2(\nu)$  et  $t \geq 0$ ,

$$\left\| P_t f - \int f \, d\nu \right\|_{\nu} \leq e^{-\lambda t} \left\| f - \int f \, d\nu \right\|_{\nu}.$$

## Exemple

Processus de Markov

- Càdlàg dans  $S^{\mathbb{Z}}$
- Mesure invariante  $\nu$
- Semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  continu dans  $(L^2(\nu), \|\cdot\|_\nu)$
- Générateur  $\mathcal{L}$  avec trou spectral  $\lambda > 0$

Pour tout  $f \in L^2(\nu)$  et  $t \geq 0$ ,

$$\left\| P_t f - \int f d\nu \right\|_\nu \leq e^{-\lambda t} \left\| f - \int f d\nu \right\|_\nu.$$

Soit  $B_1, B_2$  boîtes séparées de  $H$ ,  $A_1, A_2$  mesurables par rapport à  $\eta$  dans  $B_1, B_2$ .

$$|\mathbb{P}_\nu(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}_\nu(A_1)\mathbb{P}_\nu(A_2)| \leq e^{-\lambda H}.$$

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

# Résumé de la preuve

- **Etape 1** : définir des vitesses limites  $v_-$  et  $v_+$ , telles que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\text{aller plus vite que } v_+ + \varepsilon) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0 \\ \mathbb{P}(\text{aller moins vite que } v_- - \varepsilon) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

# Résumé de la preuve

- **Etape 1** : définir des vitesses limites  $v_-$  et  $v_+$ , telles que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\text{aller plus vite que } v_+ + \varepsilon) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0 \\ \mathbb{P}(\text{aller moins vite que } v_- - \varepsilon) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

- **Etape 2** : montrer que  $v_+ = v_-$ , ce qui donne  $v$ .

- Par l'absurde, supposer  $v_- < v_+$
- Par définition, on a souvent  $V \approx v_-$  et  $V \approx v_+$
- Quand  $V \approx v_-$ , prise de retard par rapport à  $v_+$
- Retard non rattrapable car  $\mathbb{P}(\text{aller plus vite que } v_+ + \varepsilon) \rightarrow 0$ .

# Evénements considérés

- Notation :  $V_{t_1, t_2}^w = \frac{1}{t_2 - t_1} (X_{t_2}^w - X_{t_1}^w)$

## Evénements considérés

- Notation :  $V_{t_1, t_2}^w = \frac{1}{t_2 - t_1} (X_{t_2}^w - X_{t_1}^w)$
- $A_{H, w}^+(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0, H}^y \geq v \right\}$
- $A_{H, w}^-(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0, H}^y \leq v \right\}$



## Événements considérés

- Notation :  $V_{t_1, t_2}^w = \frac{1}{t_2 - t_1} (X_{t_2}^w - X_{t_1}^w)$
- $A_{H,w}^+(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \geq v \right\}$
- $A_{H,w}^-(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v \right\}$

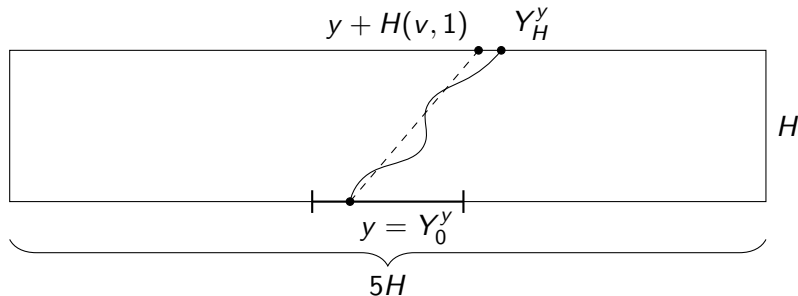


Figure: Illustration of the event  $A_{H,(0,0)}^+(v)$ .

# Définitions de vitesses limites

- $A_{H,w}^+(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \geq v \right\}$
- $A_{H,w}^-(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v \right\}$

# Définitions de vitesses limites

- $A_{H,w}^+(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \geq v \right\}$
- $A_{H,w}^-(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v \right\}$
- $p_H^+(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P} \left( A_{H,w}^+(v) \right)$
- $p_H^-(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P} \left( A_{H,w}^-(v) \right)$

# Définitions de vitesses limites

- $A_{H,w}^+(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \geq v \right\}$
- $A_{H,w}^-(v) = \left\{ \exists y \in (w + [0, H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v \right\}$
- $p_H^+(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P} \left( A_{H,w}^+(v) \right)$
- $p_H^-(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P} \left( A_{H,w}^-(v) \right)$
- $v_+ = \inf \left\{ v \in \mathbb{R}, \liminf_{H \rightarrow \infty} p_H^+(v) = 0 \right\}$
- $v_- = \sup \left\{ v \in \mathbb{R}, \liminf_{H \rightarrow \infty} p_H^-(v) = 0 \right\}$

# Définitions de vitesses limites

## Proposition

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$  tel que

$$p_H^+(v_+ + \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

$$p_H^-(v_- - \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

# Définitions de vitesses limites

## Proposition

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\rho_H^+(v_+ + \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

$$\rho_H^-(v_- - \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

**Idée de la preuve** : schéma de renormalisation

- Échelles de temps  $(L_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$
- Suite de vitesses  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$
- Événements considérés :  $A_{L_k, w}^+(v_k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$
- Passage de l'échelle  $k$  à l'échelle  $k + 1$  :

$$A_{L_{k+1}, w}^+(v_{k+1}) \implies \exists w_1, w_2 \text{ bien séparés t.q. } A_{L_k, w_1}^+(v_k) \text{ et } A_{L_k, w_2}^+(v_k)$$

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

# Points piégés et menacés

Raisonnement par l'absurde :

$$v_- < v_+ \quad \text{i.e.} \quad \delta := \frac{v_+ - v_-}{4} > 0.$$



# Points piégés et menacés

Raisonnement par l'absurde :

$$v_- < v_+ \quad \text{i.e.} \quad \delta := \frac{v_+ - v_-}{4} > 0.$$

- Point piégé :  $\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v_- + \delta.$

# Points piégés et menacés

Raisonnement par l'absurde :

$$v_- < v_+ \quad \text{i.e.} \quad \delta := \frac{v_+ - v_-}{4} > 0.$$

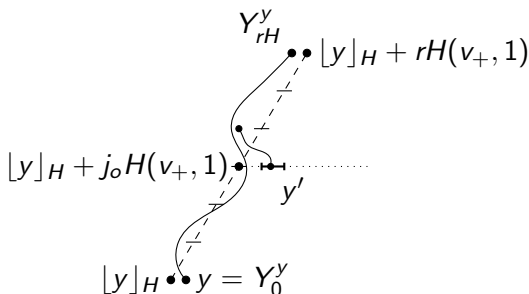
- Point piégé :  $\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}$ ,  $V_{0,H}^y \leq v_- + \delta$ .
- Point menacé :  $\exists j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $w + jH(v_+, 1)$  est  $H$ -piégé.

# Points piégés et menacés

Raisonnement par l'absurde :

$$v_- < v_+ \quad \text{i.e.} \quad \delta := \frac{v_+ - v_-}{4} > 0.$$

- Point piégé :  $\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}$ ,  $V_{0,H}^y \leq v_- + \delta$ .
- Point menacé :  $\exists j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $w + jH(v_+, 1)$  est  $H$ -piégé.



**Notation :**  $[y]_H =$  point de  $[\frac{\delta H}{4}] \mathbb{L}$  à gauche de  $y$

# Retard près d'un point menacé

## Proposition

Soit  $H \geq 1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\lfloor y \rfloor_H$  est  $(H, r)$ -menacé. Alors

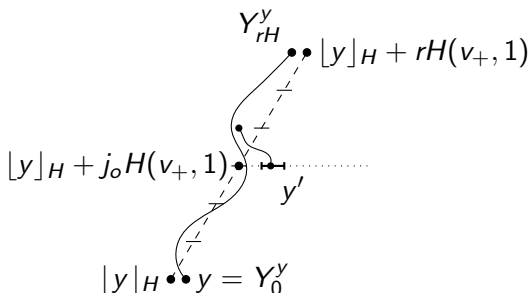
- 1 Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$ .
- 2 Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .

# Retard près d'un point menacé

## Proposition

Soit  $H \geq 1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\lfloor y \rfloor_H$  est  $(H, r)$ -menacé. Alors

- 1 Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$ .
- 2 Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .



## Proposition

Il existe  $c_2 > 0$  et  $H_0 \geq 1$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, r)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}.$$

# Probabilité d'être menacé

## Proposition

Il existe  $c_2 > 0$  et  $H_0 \geq 1$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, r)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}.$$

**Idée de la preuve** : schéma de renormalisation !

## Fin de la preuve

- *Conséquence de la proposition précédente :*  
une particule rencontre beaucoup de points menacés sur son chemin



## Fin de la preuve

- *Conséquence de la proposition précédente* :  
une particule rencontre beaucoup de points menacés sur son chemin
- *Conséquence de la propriété de déviation* :  
le reste du temps elle ne va pas plus vite que  $v_+ + \eta$

## Fin de la preuve

- *Conséquence de la proposition précédente* :  
une particule rencontre beaucoup de points menacés sur son chemin
- *Conséquence de la propriété de déviation* :  
le reste du temps elle ne va pas plus vite que  $v_+ + \eta$
- *Conclusion* :

$$p_{L_k^2}^+ \left( v_+ - \frac{\eta}{3} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui contredit la définition de  $v_+$ .

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$




## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## Cadre de travail

- Sauts à taux  $1/R$  
-  Sauts dans  $[-R, R]$  

# But

## Cadre de travail

- Sauts à taux  $1/R$  ⚠
- ⚠ Sauts dans  $[-R, R]$  ⚠

## Loi des grands nombres

Il existe  $v \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} v.$$

# Nouvelles hypothèses

**Ellipticité uniforme** : il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$\inf_{x \in [-R, R]} \inf_{\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_{\ell} \in S} \mathbb{P}(g(\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_{\ell}, U) = x) \geq \gamma.$$

# Nouvelles hypothèses

**Ellipticité uniforme** : il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$\inf_{x \in [-R, R]} \inf_{\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_{\ell} \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(g(\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_{\ell}, U) = x) \geq \gamma.$$

**Découplage fort** : il existe  $c_0, \kappa, \beta > 0$  tel que pour tout  $H \geq 1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

- Pour tout  $B_1, \dots, B_r$  boîtes de longueurs  $\leq 6H$  séparées en temps par  $H$ ,
- Pour tout  $A_1, \dots, A_r$  mesurables par rapport à l'environnement dans  $B_1, \dots, B_r$ ,

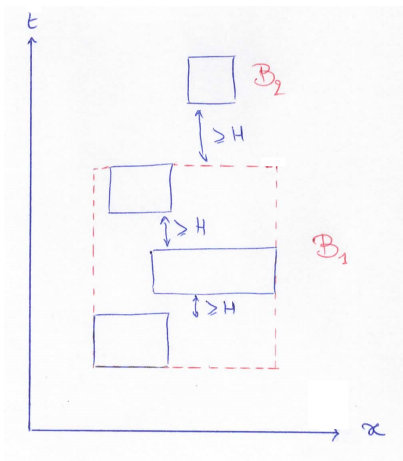
$$\left| \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^r A_i \right) - \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(A_i) \right| \leq c_0 r e^{-\kappa H^\beta}.$$



## Exemple

Processus de Markov stationnaires à trou spectral  $\lambda > 0$  :

- Décorrélation exponentielle pour 2 boîtes *quelconques* séparées de  $H$
- Récurrence sur  $r$
- $\kappa = \lambda, \beta = 1$



## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

# Estimations pour les déviations : inchangé

## Proposition

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$  tel que

$$p_H^+(v_+ + \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

$$p_H^-(v_- - \varepsilon) \leq c_1 H^{-\alpha/4}$$

## Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$

- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .


# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$

- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée


# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$

- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée
- **Etape 2** : retard près d'un point piégé

# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$


- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée
- **Etape 2** : retard près d'un point piégé
- **Etape 3** : nouvelle notion de point menacé 

# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$


- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée
- **Etape 2** : retard près d'un point piégé
- **Etape 3** : nouvelle notion de point menacé 
- **Etape 4** : probabilité d'être menacé



# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$

- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée
- **Etape 2** : retard près d'un point piégé
- **Etape 3** : nouvelle notion de point menacé 
- **Etape 4** : probabilité d'être menacé
- **Etape 5** : retard près d'un point menacé

# Stratégie de preuve pour $v_+ = v_-$

- **Raisonnement par l'absurde** :  $\delta = \frac{v_+ - v_-}{4} > 0$ .
- **Etape 1** : notion de piège inchangée
- **Etape 2** : retard près d'un point piégé
- **Etape 3** : nouvelle notion de point menacé 
- **Etape 4** : probabilité d'être menacé
- **Etape 5** : retard près d'un point menacé
- **Etape 6** : notion de point retardé et fin de la preuve

## 1 Cadre initial : plus proches voisins

- Cadre du problème
- Exemple d'environnement
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

## 2 Généralisation : portée quelconque

- Nouveau cadre
- Schéma de preuve
- Détails de la preuve de  $v_+ = v_-$

# Retard près d'un point piégé

**Définition** :  $w$  est dit  $H$ -piégé si

$$\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v_- + \delta.$$

# Retard près d'un point piégé

**Définition** :  $w$  est dit  $H$ -piégé si

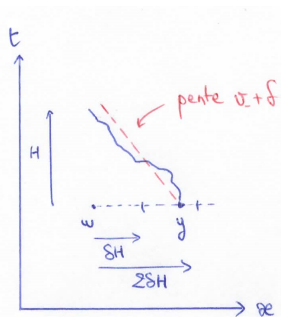
$$\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v_- + \delta.$$

Dans l'épisode précédent

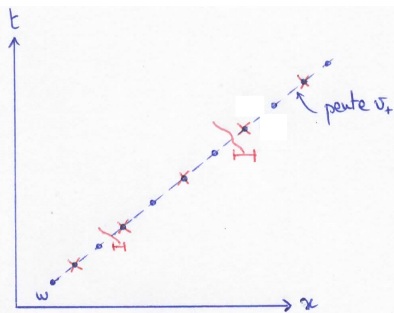
Pour tout  $w \in \mathbb{R}^2$  piégé, pour tout  $w' \in (w + (-\infty, \delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}$ ,

$$X_H^{w'} \leq \pi_1(w) + (v_+ - \delta)H.$$

# Retard près d'un point piégé



Point piégé



Point  $(H, I, q)$ -menacé

# Retard près d'un point piégé



**Définition** :  $w$  est dit  $H$ -piégé si

$$\exists y \in (w + [\delta H, 2\delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}, V_{0,H}^y \leq v_- + \delta.$$

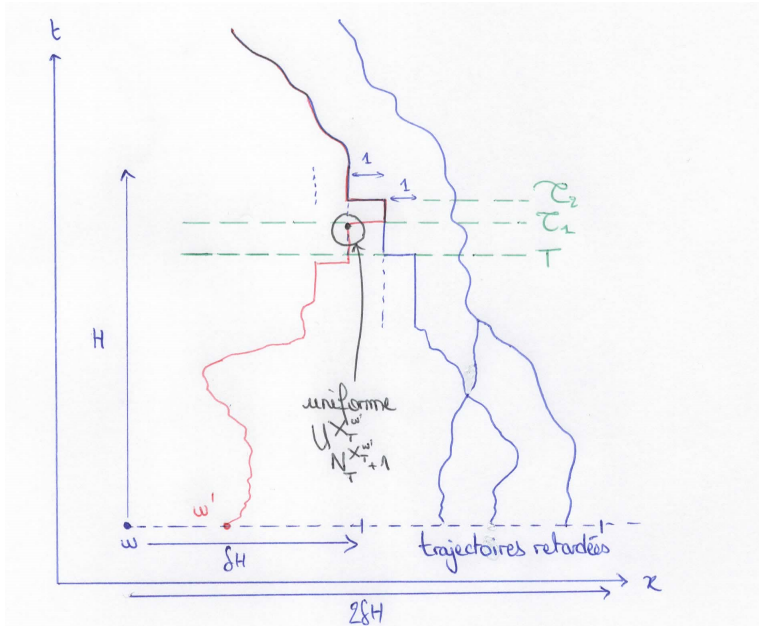
## Proposition

There exists  $H_1 \geq 1$  such that

$$\inf_{H \geq H_1} \inf_{w \in \mathbb{R}^2} \inf_{w' \in (w + (-\infty, \delta H) \times \{0\}) \cap \mathbb{L}} \mathbb{P} \left( \begin{array}{l} X_H^{w'} \leq \pi_1(w) + (v_+ - \delta)H \\ | w \text{ } H\text{-piégé} \end{array} \right) \geq \gamma_0.$$

 Preuve pas encore aboutie 

# Idées pour la preuve (ici $R = 2$ )





# Points menacés

Dans l'épisode précédent

$w$  est dit  $(H, r)$ -menacé si

$$\#\{j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, w + jH(v_+, 1) \text{ est } H\text{-piégé}\} \geq 1.$$

# Points menacés

## Dans l'épisode précédent

$w$  est dit  $(H, r)$ -menacé si

$$\#\{j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, w + jH(v_+, 1) \text{ est } H\text{-piégé}\} \geq 1.$$

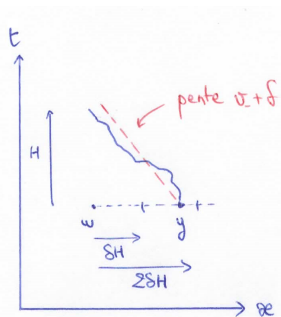
## Nouvelle définition

Soit  $I_r = \{j \text{ pair}, j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket\}$ .

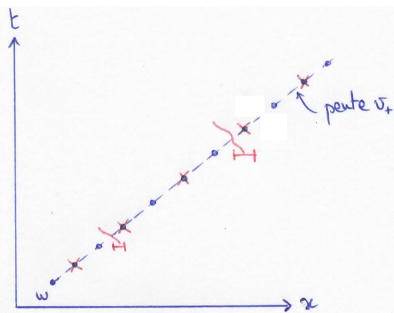
$w$  est dit  $(H, I_r, q)$ -menacé si

$$\#\{j \in I_r, w + jH(v_+, 1) \text{ est } H\text{-piégé}\} \geq q.$$

# Points menacés



Point piège



Point  $(H, I, q)$ -menacé

# Probabilité d'être menacé

## Dans l'épisode précédent

Il existe  $c_2 > 0$  et  $H_0 \geq 1$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, r)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}.$$

# Probabilité d'être menacé

## Dans l'épisode précédent

Il existe  $c_2 > 0$  et  $H_0 \geq 1$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, r)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}.$$

**N.B.** : A partir de maintenant  $q = q(r) = \lfloor \sqrt{r} \rfloor$ .

## Proposition

Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) \leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

# Probabilité d'être menacé

## Proposition

Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) \leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

# Probabilité d'être menacé

## Proposition

Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) \leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

## Preuve

- On montre que  $\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, 1)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}$

# Probabilité d'être menacé

## Proposition

Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) \leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

## Preuve

- On montre que  $\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, 1)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}$
- Soit  $s = s(r, q) = \sup \left\{ j \in l_r, j \leq \frac{r}{q} \right\}$ .



# Probabilité d'être menacé

## Proposition

Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $H \geq H_0$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) \leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

## Preuve

- On montre que  $\sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, 1)\text{-menacé}) \leq c_2 r^{-\alpha}$
- Soit  $s = s(r, q) = \sup \left\{ j \in l_r, j \leq \frac{r}{q} \right\}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_r, q)\text{-menacé}) &\leq \mathbb{P} \left( \begin{array}{l} \exists j \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket, w + sjH(v_+, 1) \\ \text{n'est pas } (H, l_s, 1)\text{-menacé} \end{array} \right) \\ &\leq q \sup_{w \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(w \text{ n'est pas } (H, l_s, 1)\text{-menacé}) \\ &\leq q c_2 s^{-\alpha} \\ &\leq c_3 r^{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

# Retard près d'un point menacé

## Dans l'épisode précédent

Soit  $H \geq 1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\lfloor y \rfloor_H$  est  $(H, r)$ -menacé. Alors

- 1 Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$ .
- 2 Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .

# Retard près d'un point menacé

## Dans l'épisode précédent

Soit  $H \geq 1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\lfloor y \rfloor_H$  est  $(H, r)$ -menacé. Alors

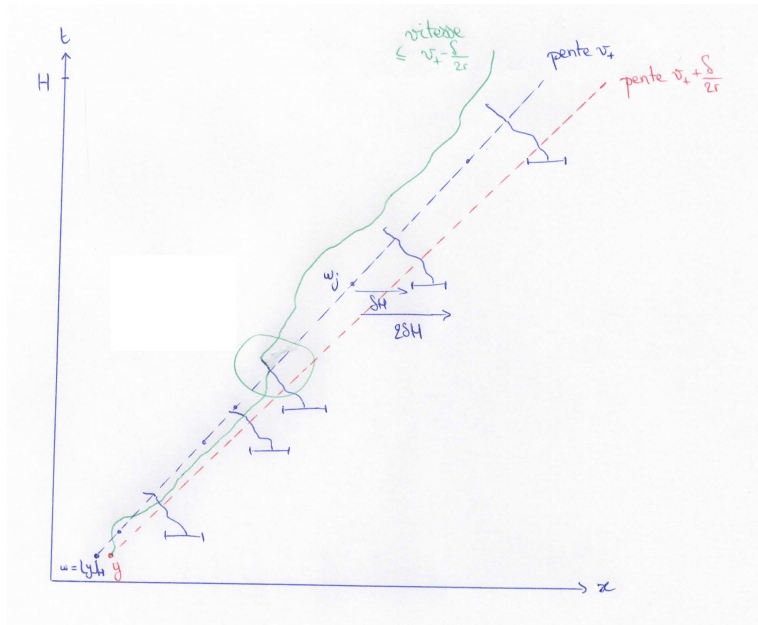
- 1 Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$ .
- 2 Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .

## Proposition

Soit  $H \geq H_1$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ .

$$\mathbb{P} \left( \begin{array}{l} V_{0, rH}^y > v_+ - \frac{\delta}{2r}; \\ \lfloor y \rfloor_H \text{ est } (H, l_r, q)\text{-menacé}; \\ \forall j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, V_{jH, (j+1)H}^y \leq v_+ + \frac{\delta}{2r} \end{array} \right) \leq (1 - \gamma_0)^q + c_3 r 4^r e^{-\kappa H^\beta}$$

# Retard près d'un point menacé



# Fin de la preuve

**Point retardé** :  $w$  est  $(H, l_r, q)$ -retardé si

- $w$  est  $(H, l_r, q)$ -menacé ;
- Pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lfloor y \rfloor_H = w$ ,
  - Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$  ;
  - Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .





# Fin de la preuve

**Point retardé** :  $w$  est  $(H, l_r, q)$ -retardé si

- $w$  est  $(H, l_r, q)$ -menacé ;
- Pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lfloor y \rfloor_H = w$ ,
  - Soit il existe  $j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$  tel que  $V_{jH, (j+1)H}^y > v_+ + \frac{\delta}{2r}$  ;
  - Soit  $V_{0, rH}^y \leq v_+ - \frac{\delta}{2r}$ .

**Fin de la preuve** : similaire en remplaçant "menacé" par "retardé"

# Bibliographie

-  AVENA L., BLONDEL O. and FAGGIONATO A.,  *$L^2$ -Perturbed Markov processes and applications to random walks in dynamic random environments*, [arxiv.org/abs/1602.06322](https://arxiv.org/abs/1602.06322), 2016.
-  BLONDEL O., HILÁRIO M. and TEIXEIRA A., *Random walks on dynamical random environments with nonuniform mixing*, The Annals of Probability, Vol. 48, No. 4, 2014-2051, 2020.
-  HILÁRIO M., DEN HOLLANDER F., SIDORAVICIUS V., DOS SANTOS R.R. and TEIXEIRA A., *Random walk on random walks*, Electronic Journal of Probability, Vol. 20, 1-35, 2015.
-  HILÁRIO M., KIOUS D. and TEIXEIRA A., *Random walk on the simple symmetric exclusion process*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 379, 61–101, 2020.

# Densité de points menacés

**Définition** Densité de  $\gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, hL_k]}$  :

$$D^h(\gamma) = \frac{L_{k_2+1}}{L_k} \# \left\{ 0 \leq j < \frac{L_k}{L_{k_2+1}}, \lfloor \gamma(jhL_{k_2+1}) \rfloor_{hL_{k_2}} \text{ is } (hL_{k_2}, l_{k_2})\text{-menacé} \right\}.$$

**N.B.** :  $k_2$  à choisir plus tard



# Densité de points menacés

**Définition** Densité de  $\gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, hL_k]}$  :

$$D^h(\gamma) = \frac{L_{k_2+1}}{L_k} \# \left\{ 0 \leq j < \frac{L_k}{L_{k_2+1}}, [\gamma(jhL_{k_2+1})]_{hL_{k_2}} \text{ is } (hL_{k_2}, l_{k_2})\text{-menacé} \right\}.$$

**N.B.** :  $k_2$  à choisir plus tard

## Proposition

Pour  $k > k_2$ ,  $w \in \mathbb{R}^2$  et  $h \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \begin{array}{l} \exists \gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, hL_k]} \text{ partant de} \\ l_{hL_k}(w) \cap \mathbb{L}, D^h(\gamma) < 1/2 \end{array} \right) \leq c_5 L_k^{-(\alpha-1)/5}.$$

## Densité de points menacés

**Définition** Densité de  $\gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, hL_k]}$  :

$$D^h(\gamma) = \frac{L_{k_2+1}}{L_k} \# \left\{ 0 \leq j < \frac{L_k}{L_{k_2+1}}, \lfloor \gamma(jhL_{k_2+1}) \rfloor_{hL_{k_2}} \text{ is } (hL_{k_2}, l_{k_2})\text{-menacé} \right\}.$$

**N.B.** :  $k_2$  à choisir plus tard

### Proposition

Pour  $k > k_2$ ,  $w \in \mathbb{R}^2$  et  $h \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \begin{array}{l} \exists \gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, hL_k]} \text{ partant de } \\ l_{hL_k}(w) \cap \mathbb{L}, D^h(\gamma) < 1/2 \end{array} \right) \leq c_5 L_k^{-(\alpha-1)/5}.$$

**Idee de la preuve** : schéma de renormalisation !

## Fin de la preuve

- On pose  $h = L_k$  et  $\eta = \frac{\delta}{4l_{k_2}}$ .

## Fin de la preuve

- On pose  $h = L_k$  et  $\eta = \frac{\delta}{4l_{k_2}}$ .
- On montre que  $p_{L_k}^+ (v_+ - \frac{\eta}{3}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

## Fin de la preuve

- On pose  $h = L_k$  et  $\eta = \frac{\delta}{4l_{k_2}}$ .
- On montre que  $p_{L_k}^+ \left( v_+ - \frac{\eta}{3} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Idée** : on montre qu'il y a un délai  $< v_+ - \eta/3$  sur les événements suivants, dont la probabilité tend vers 1 quand  $k \rightarrow \infty$ .

## Fin de la preuve

- On pose  $h = L_k$  et  $\eta = \frac{\delta}{4L_{k_2}}$ .
- On montre que  $p_{L_k}^+ \left( v_+ - \frac{\eta}{3} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Idée** : on montre qu'il y a un délai  $< v_+ - \eta/3$  sur les événements suivants, dont la probabilité tend vers 1 quand  $k \rightarrow \infty$ .

$$F(w) = \left\{ \forall y \in I_{L_k}^2(w) \cap \mathbb{L}, (Y_t^y)_{t \in [0, L_k^2]} \text{ reste dans } B_k(w) \right\};$$

$$G_1(w) = \left\{ \forall w' \in \hat{\mathcal{C}}, \forall y \in I_{L_k L_{k_2}}(w') \cap \mathbb{L}, V_{0, L_k L_{k_2}}^y \leq v_+ + \eta \right\};$$

$$G_2(w) = \left\{ \forall \gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, L_k^2]} \text{ partant de } I_{L_k}^2(w) \cap \mathbb{L}, D^{L_k}(\gamma) \geq 1/2 \right\}.$$

## Fin de la preuve

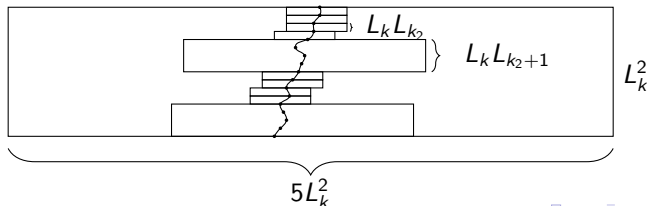
- On pose  $h = L_k$  et  $\eta = \frac{\delta}{4L_{k_2}}$ .
- On montre que  $p_{L_k^2}^+(v_+ - \frac{\eta}{3}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Idée** : on montre qu'il y a un délai  $< v_+ - \eta/3$  sur les événements suivants, dont la probabilité tend vers 1 quand  $k \rightarrow \infty$ .

$$F(w) = \left\{ \forall y \in I_{L_k^2}(w) \cap \mathbb{L}, (Y_t^y)_{t \in [0, L_k^2]} \text{ reste dans } B_k(w) \right\};$$

$$G_1(w) = \left\{ \forall w' \in \hat{\mathcal{C}}, \forall y \in I_{L_k L_{k_2}}(w') \cap \mathbb{L}, V_{0, L_k L_{k_2}}^y \leq v_+ + \eta \right\};$$

$$G_2(w) = \left\{ \forall \gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, L_k^2]} \text{ partant de } I_{L_k^2}(w) \cap \mathbb{L}, D^{L_k}(\gamma) \geq 1/2 \right\}.$$



## Dans le cas général

**Densité de retard** : Soit  $k > k_2$  et  $\gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, L_k^2]}$ .

$$\tilde{D}(\gamma) = \frac{L_{k_2+1}}{L_k} \# \left\{ 0 \leq j < \frac{L_k}{L_{k_2+1}}, \lfloor \gamma(jL_k L_{k_2+1}) \rfloor_{L_k L_{k_2}} \text{ est } (L_k L_{k_2}, l_{l_{k_2}}, q_{k_2})\text{-retardé} \right\}$$



# Dans le cas général

**Densité de retard** : Soit  $k > k_2$  et  $\gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, L_k^2]}$ .

$$\tilde{D}(\gamma) = \frac{L_{k_2+1}}{L_k} \# \left\{ 0 \leq j < \frac{L_k}{L_{k_2+1}}, \lfloor \gamma(jL_k L_{k_2+1}) \rfloor_{L_k L_{k_2}} \text{ est } (L_k L_{k_2}, l_{k_2}, q_{k_2})\text{-retardé} \right\}$$

## Conjecture

Pour tout  $k > k_2$  et  $w \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{P} \left( \begin{array}{l} \exists \gamma = (\gamma(t))_{t \in [0, L_k^2]} \text{ partant de} \\ I_{L_k^2}(w) \cap \mathbb{L}, \tilde{D}(\gamma) < 1/2 \end{array} \right) \leq c_4 L_k^{-(\alpha-3)/10}.$$