Équations différentielles - Cours no 1

1 Introduction aux équations différentielles

1.1 Le problème à deux corps

1.1.1 Historique

Tycho Brahé (1546 - 1603) : observations astronomique, trajectoire elliptique de la planète Mars.
J. Képler (1571 - 1630) : analyse des relevés de T. Brahé, lois de Képler :
- mouvement plan,
- loi des orbites,
- loi des aires.

I. Newton (1642 - 1727) : lois fondamentales de la dynamique, unité du principe de gravitation.

1.1.2 Le problème à deux corps

Voir cours.

Réduction du problème

Résolution du problème
- mouvement plan,
- coordonées polaires,
- conservation de l'énergie,
- calculs,
- nature de la conique.

Remarques :
- mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force + force centrale ⇒ conique,
- le problème à trois corps : étude *qualitative* des équations différentielles (H. Poincaré, XX^e siècle).

1.2 Quelques examples

Le pendule Énergie du pendule : ($x(t)$ désigne l'écart angulaire)

$$E = \frac{1}{2}m(l\dot{x})^2 + mgl(1-\cos(x)).$$

Équation de l'écart angulaire $x(t)$ du pendule :

$$\ddot{x} + \sin(x) = 0.$$

Remarque 1 *L'équation différentielle se réécrit comme une équation (vectorielle) d'ordre* 1 *: en posant $y(t) := \dot{x}(t)$, on obtient l'équation*

$$\dot{X} = F(X), \quad X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ -\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Évolution d'une population On note $x(t)$ la taille d'une population à l'instant t. Selon le modèle d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax & \text{(reproduction normale),} \\ \dot{x} &= ax^2 & \text{(reproduction explosive),} \\ \dot{x} &= (a-bx)x & \text{(modèle logistique)} \end{cases}$$

Particule dans un flot

Définition 1 *(restrictive) Une partie S de $\mathbb{R}^3$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ s'il existe une application $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $S = g^{-1}(0)$ et : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(x) \neq 0$.*

Exemple : plan ($g(x) = x_3$), sphère ($g(x) = |x|^2 - 1$).
Remarque : la direction T_xS du plan tangent à $x \in S$ est l'orthogonal de $\nabla g(x)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 2 *Un champ de vecteur sur une surface S de $\mathbb{R}^3$ est la donnée d'un vecteur $\mathbf{V}_x$ de T_xS en chaque point x de S ; plus précisément : un champ de vecteur sur une surface S est une application $\mathbf{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ telle que, pour tout $x \in S$, $\mathbf{V}(x) \in T_xS$.*

Remarque : on a donc $\nabla g(x) \cdot \mathbf{V}(x) = 0$ pour tout $x \in S$.
Équation de la trajectoire $x = x(t)$ d'une particule entraînée par un fluide qui se meut sur S :

$$\dot{x}(t) = \mathbf{V}(t, x(t)), \quad \mathbf{V}(t,\cdot) \text{ champ de vecteur.}$$

Exemples (dessin) :
– dans le plan :

$$\mathbf{V}(X) = X, \quad \mathbf{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

– sur la sphère : $\mathbf{V}(X)$ =projection orthogonale du vecteur e_3 sur le plan tangent à X, carte des vents à la surface du globe.

2 Équations différentielles du premier ordre

2.1 Équations linéaires

Équation
$$\dot{x}(t) - a(t)x(t) = f(t). \tag{1}$$
Solution : par la formule intégrale (dite parfois de Duhamel)
$$x(t) = x_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} f(s) ds, \quad A \text{ primitive de } a; \tag{2}$$
ou par la méthode de *variation de la constante*, qui est la suivante :

Étape 1 : résolution de l'équation **homogène** $\dot{x}(t) - a(t)x(t) = 0$. Donne
$$x(t) = \lambda e^{A(t)}, \quad A \text{ primitive de } a, \quad \lambda \text{ constante.}$$
Étape 2 : **variation de la constante** : reprendre la solution de l'équation homogène en décidant que λ est une fonction de t et introduire dans l'équation avec second membre (1). On aboutit à
$$\lambda'(t) e^{A(t)} = f(t).$$
La résolution redonne la formule intégrale (2).

2.2 Séparation des variables

Équation
$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}.$$
Résolue en $G(x) = F(t) + \text{Cte}$, G, F primitives de g, f respectivement.
Exemple : $\dot{x} = x^2$.

2.3 Équation homogène

Équation
$$\frac{dx}{dt} = \Phi\left(\frac{x}{t}\right).$$
Se ramène à une équation à variable séparable :
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Phi(y) - y}{t}, \quad y = x/t.$$

2.4 Équation de Ricatti

Équation du type
$$\dot{x}(t) = q_2(t)x(t)^2 + q_1(t)x(t) + q_0(t).$$
Recette : étant *connue* une solution x_1, en chercher une *deuxième* x_2 sous la forme
$$x_2(t) = x_1(t) + \frac{1}{y(t)}.$$
La fonction y est alors solution d'une équation *linéaire* (résolue au paragraphe 2.1).

Exemple : $x_1 \colon t \mapsto t$ est solution de $\dot{x}(t) = x(t)^2 - 2tx(t) + t^2 + 1$; on trouve
$$y(t) = C - t, \quad x_2(t) = t + \frac{1}{C - t}.$$

2.5 Équation de Bernoulli

Équation du type
$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t)x(t)^n$$
Recette : poser $y = x^{1-n}$. La fonction y est alors solution d'une équation *linéaire* (résolue au paragraphe 2.1) :

2.6 Équation de Lagrange

Équation du type
$$a(\dot{x})x + b(\dot{x})t = c(\dot{x}).$$
Recette : changer de variable : nouvelle variable $p := \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.
Dériver l'équation $a(p)x(p) + b(p)t(p) = c(p)$ par rapport à p, y remplacer t par $\frac{ax-c}{b}$ et $t' = \frac{dt}{dp} = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{dp}$ par $\frac{x'}{p}$ pour obtenir une équation linéaire en $x(p)$.

2.7 Équations exactes

E evn de dimension finie

Définition 3 (Forme différentielle) *Une forme différentielle sur U ouvert de E est une application $U \to E^*$.*

Exemple : Si $f \in C^1(U; \mathbb{R})$, alors $df \colon U \to E^*$ est une une forme différentielle sur U.
Dans la suite, E est $\mathbb{R}^n$.
Notation : On note $(dx_i)_{1,n}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: toute forme différentielle ω sur U admet alors l'écriture (unique)
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i, \quad p_i \colon U \to \mathbb{R}.$$

Définition 4 – *On dit que ω est de classe C^k sur U si les p_i sont de classe C^k sur U (c'est indépendant du choix de la base).*

– *Soit $k \geq 0$. Une forme différentielle ω de classe C^k sur U est dite* exacte *si il existe $f \in C^{k+1}(U; \mathbb{R})$ telle que*

$$\omega = df.$$

– *Une forme différentielle ω de classe C^1 sur U est dite* fermée *si*

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \frac{\partial p_i}{x_j} = \frac{\partial p_j}{x_i}.$$

Proposition 1 *Une forme différentielle C^1 exacte est fermée.*

Théorème 1 (Poincaré) *On suppose U ouvert étoilé, on a alors la réciproque de la proposition précédente : toute forme différentielle C^1 fermée est exacte.*

Définition 5 (Facteur intégrant) *Soit ω forme différentielle C^1 sur U. Une application $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$ est un* facteur intégrant *de ω si $\varphi\omega$ est exacte.*

Exemple : sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^3$, la forme

$$\omega = \frac{y+z}{x} dx + \frac{x+z}{y} dy + \frac{x+y}{z} dz$$

n'est pas exacte. Un facteur intégrant est

$$\varphi = \frac{1}{xyz}.$$