

Équations différentielles - Cours no 2

Résultats Généraux sur les équations différentielles

1 Problème de Cauchy

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E , f application $I \times \Omega \rightarrow E$ continue.

Problème de Cauchy : étant donnée $t_0 \in I$, $x_0 \in \Omega$, trouver $J \subset I$ intervalle contenant t_0 et une application $x: J \rightarrow \Omega$ dérivable sur J , satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), & t \in J, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Notation : On note (J, x) une solution telle que ci-dessus.

Forme intégrale du problème de Cauchy: Un couple (J, x) est solution du Problème de Cauchy si, et seulement si, l'équation intégrale suivante est vérifiée :

$$\forall t \in J, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Terminologie : Le temps t_0 est le temps initial, la valeur x_0 est la donnée initiale du Problème de Cauchy.

Proposition 1 *Régularité de la solution : $x \in C^1(J)$ et $x \in C^{k+1}(J)$ si f de classe C^k .*

Définition 1 • Solution locale : (J, x) solution locale si (J, x) solution et J voisinage de t_0 dans I ;

- Prolongement de solution locale : si (J, x) et (\tilde{J}, \tilde{x}) sont des solutions locales, on dit que (\tilde{J}, \tilde{x}) prolonge (J, x) si \tilde{J} contient J et x coïncide avec \tilde{x} sur J ; dans ce cas on dit aussi que (J, x) est restriction de (\tilde{J}, \tilde{x}) ;
- Solution maximale : une solution locale (J, x) est dite maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même ;
- Solution globale : une solution locale (J, x) est dite globale si elle est définie partout, i.e. si $I = J$.

Remarque 1 Pour alléger les preuves, on choisit de travailler avec un intervalle I ouvert ; on remarquera cependant qu'on pourrait faire la théorie en travaillant avec I intervalle quelconque contenant t_0 dans son intérieur. En particulier, les définitions données ci-dessus gardent alors leur sens.

Recollement de solutions locales : Soit (J_i, x_i) , $i \in \{1, 2\}$ deux solutions locales et S_1, S_2 deux sous segments de J_1 et J_2 respectivement qui s'intersectent en au moins un point : $S_i = [\sigma_i, \tau_i]$ avec $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \tau_1 \leq \tau_2$. On suppose $x_1(\tau_1) = x_2(\tau_2)$. En posant

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t), & t \in S_1 = [\sigma_1, \tau_1], \\ x(t) = x_2(t), & t \in [\tau_1, \tau_2], \end{cases}$$

on obtient une solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Si t_0 est dans l'intérieur de S_1 , c'est un prolongement de la solution locale (S_1, x_1) .

Exemples : voir cours.

2 Résolution du Problème de Cauchy

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E , f application continue $I \times \Omega \rightarrow E$.

Lemme 1 (Rappel) Soit F, G des espaces de Banach et $U \subset F$ ouvert. Toute application $g: U \rightarrow G$ continue est localement bornée. Si $K \subset U$ est compact, alors il existe un voisinage de K sur lequel g est bornée.

Preuve du Lemme 1: Soit $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0|_F < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)|_G < \varepsilon$. En particulier, f est bornée par $|f(x_0)|_G + \varepsilon$ sur le voisinage $B(x_0, \eta)$ de x_0 . Si $K \subset U$ est compact, chaque point x de K a un voisinage V_x sur lequel f est bornée (disons par M_x). On recouvre K par un nombre fini V_{x_i} , $i = 1, \dots, N$ des voisinages V_x . Alors $V = \cup_{i=1}^N V_{x_i}$ est un voisinage de K sur lequel f est bornée par $\max_{1, \dots, N} M_{x_i}$. ■

Dans la suite ce lemme sera appliqué à f , qui est supposée continue $I \times \Omega \rightarrow E$.

2.1 Définitions, rappels

2.1.1 Application localement lipchitzienne

Définition 2 • Soit $A \subset I \times \Omega$. L'application f est dite lipchitzienne en la deuxième variable sur A si il existe $L \geq 0$ tel que : $\forall (t, x_1) \in A, \forall (t, x_2) \in A$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E; \quad (1)$$

- L'application f est dite localement lipschitzienne en la deuxième variable si tout point de $I \times \Omega$ admet un voisinage A sur lequel f est lipschitzienne en la deuxième variable ;
- L'application f est dite globalement lipschitzienne en la deuxième variable si elle est lipschitzienne en la deuxième variable sur $I \times \Omega$.

Proposition 2 Si f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, et $K \subset I \times \Omega$ est compact alors f est lipschitzienne en la deuxième variable sur un voisinage de K .

2.1.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1 Soit X un fermé d'un espace de Banach. Une application contractante de X dans X admet un unique point fixe.

2.2 Résolution du Problème de Cauchy, régularité lipschitzienne globale

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (global Lipschitz)) On fait l'hypothèse $\Omega = E$ et f continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Le Problème de Cauchy admet alors une unique solution globale.

Preuve : Réduction au cas I compact, puis application du théorème du point fixe de Banach dans

$$X := C(I, E), \quad \|x\|_X := \max_{t \in I} (e^{-2L|t-t_0|} |x(t)|_E)$$

à

$$T: x \mapsto Tx, \quad Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

L'unicité est aussi une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3 On suppose que $\Omega = E$ et que f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit (I, x) et (I, \hat{x}) deux solutions globales au Problème de Cauchy de donnée initiale x_0 et $\hat{x}_0 \in E$ respectivement. L'écart entre les solutions au temps t est estimé de la manière suivante :

$$\forall t \in I, |x(t) - \hat{x}(t)|_E \leq e^{L|t-t_0|} |x_0 - \hat{x}_0|_E$$

où L est une constante de Lipschitz de f par rapport à sa deuxième variable.

C'est une conséquence du lemme de Gronwall

Lemme 2 (Gronwall) Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $u, f, g \in C(I; \mathbb{R})$ des fonctions positives telles que

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^t g(s)u(s)ds \right|.$$

La fonction u vérifie alors l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(\tau)d\tau} ds \right|.$$

Application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement Lipschitz : résolution des équations *linéaires*.

2.3 Résolution du Problème de Cauchy, régularité lipschitzienne locale

2.3.1 Solutions locales

Théorème 3 Soit f une application $I \times \Omega \rightarrow E$ continue et soit η, r, M, L positifs tels que

- $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \subset I \times \Omega$,
- $|f|_E \leq M$ sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r)$,
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E$,

pour tout $(t, x_1, x_2) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \times B(x_0, r)$. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy, avec $J = [t_0 - \hat{\eta}, t_0 + \hat{\eta}]$ où $\hat{\eta} := \min(\eta, r/2M)$.

Corollaire 1 (Existence d'une solution locale) On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy.

Théorème 4 (Unicité des solutions, cas localement Lipschitz) On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit (J, x) et (\hat{J}, \hat{x}) deux solutions locales du Problème de Cauchy de même donnée initiale x_0 . Les solutions x et \hat{x} coïncident sur $J \cap \hat{J}$.

Dans le Théorème 3, le temps d'existence $\hat{\eta}$ ne dépend pas de L . Cela permet de montrer (par utilisation du Théorème d'Ascoli) le Théorème de Péano, vrai uniquement lorsque E est de **dimension finie**

Théorème 5 (Péano) On suppose que f est continue $I \times \Omega$ et que E est de dimension finie. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy.

On peut même montrer que toute solution locale peut être prolongée en une solution maximale. Il n'y a **pas** unicité des solutions maximales (*contre-exemple* : vidange d'un bassin).

Preuve du Théorème d'existence d'une solution locale, Théorème 3 : Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ une fonction de *troncature* qui vaut 1 sur $[0, 1/2]$ et 0 sur $[1, +\infty[$. On pose

$$g(t, x) := \begin{cases} \theta\left(\frac{|x - x_0|_E}{r}\right) f(t, x) & \text{si } (t, x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r), \\ 0 & \text{si } (t, x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times (E \setminus B(x_0, r)). \end{cases}$$

On vérifie que g est continue, bornée par M et *globalement* lipschitzienne en sa deuxième variable sur $I \times E$. Le Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement Lipschitzien) donne l'existence d'une solution globale (I, y) au Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= g(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

On montre ensuite que $y(t)$ reste dans $B(x_0, r/2)$ si $t \in [t_0 - \hat{\eta}, t_0 + \hat{\eta}]$, ce qui assure que $g(t, y(t)) = f(t, y(t))$ pour ces t et fournit une solution locale du Problème de Cauchy. ■

Preuve du Théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4 : Soit J_0 intervalle compact dans $J \cap \hat{J}$. Par continuité des solutions, $K := x(J_0) \cup \hat{x}(J_0)$ est un compact de Ω et $A := J_0 \times K$ est un compact de $I \times \Omega$. La Proposition 2 montre que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur A , avec, disons, une constante de Lipschitz L . Pour $t \in J_0$, on a

$$\begin{aligned} |x(t) - \hat{x}(t)|_E &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, \hat{x}(s))) ds \right|_E \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \hat{x}(s))|_E ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - \hat{x}(s)|_E ds \right|. \end{aligned}$$

On conclut à l'égalité des solutions par le lemme de Gronwall. ■

2.3.2 Solutions maximales

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (local Lipschitz)) *On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Alors il existe une unique solution maximale (J, x) au Problème de Cauchy, qui est définie sur un intervalle J ouvert.*

Application au calcul : voir TD.

Application : définition du *flot*

Définition 3 On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Pour $x_0 \in \Omega$, on note J_{x_0} l'intervalle de définition de la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = x_0$ et on pose

$$\mathcal{D}(\varphi) := \bigcup_{x \in \Omega} (J_x \times \{x\}).$$

On définit le flot φ de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ comme l'application $\mathcal{D}(\varphi) \rightarrow \Omega$ qui à (t, x) associe la valeur au temps t de la solution maximale du Problème de Cauchy ayant la valeur x au temps $t = 0$.

Dessin. Notation $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$.

Proposition 4 On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. L'ensemble $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert et partitionné par les trajectoires. Si f ne dépend pas de t alors $\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}$.

Voir Paragraphe 5 pour la preuve de cette proposition, où l'on prouvera aussi la continuité du flot φ .

Preuve du Théorème d'existence-unicité de solutions maximales, Théorème 6 : solution maximale = union des solutions locales. La résolubilité locale (Corollaire 1) montre que J est ouvert et l'unicité est une conséquence du Théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4 et du résultat de recollement des solutions.

3 Explosion de la solution maximale

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E , f application $I \times \Omega \rightarrow E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

Soit (J, x) la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), & t \in J, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

L'intervalle J est ouvert, disons de la forme $]T_-, T_+[$. Si $T_+ < \sup I$, la solution maximale x "explose" au voisinage du temps T_+ , de la manière décrite par les théorèmes suivants.

Théorème 7 (Théorème de sortie de tout compact) Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup I$, alors la trajectoire $\{x(t)\}$ sort de tout compact au voisinage de T_+ , c'est-à-dire : quelque soit $K \subset \Omega$ compact, il existe $T_K \in]T_-, T_+[$ tel que, pour tout $t \in [T_K, T_+[$, $x(t) \in \Omega \setminus K$.

Corollaire 2 (Explosion en dimension finie) On suppose $\Omega = E$ et E de dimension finie. Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup I$, alors

$$\lim_{t \rightarrow T_+} |x(t)|_E = +\infty$$

Remarque : si E est de dimension **infinie**, on peut avoir $T_+ < \sup I$ bien que $(|x(t)|_E)$ reste bornée dans un voisinage de T_+ (voir Devoir à la maison).

Preuve du Théorème de sortie de tout compact, Théorème 7 : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un compact K et une suite croissante de temps (t_n) telle que $t_n \rightarrow T_+$ et $x(t_n) \in K$ pour tout K . Soit alors $x_+ \in K$ une valeur d'adhérence de la suite $(x(t_n))$. Comme f est continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable, il existe η, r, L, M des réels positifs tels que

- $[T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r) \subset I \times \Omega,$
- $|f|_E \leq M$ sur $[T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r),$
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E,$

pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in [T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r)$. On pose $\hat{\eta} = \min(\eta, r/2M)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|T_+ - t_n| < \hat{\eta}/3$ et $|x(t_n) - x_+|_E < r/2$. On a alors

- $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2) \subset I \times \Omega,$
- $|f|_E \leq M$ sur $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2),$
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E,$

pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in [t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2)$. D'après le Théorème 3, il existe une solution locale $([t_n - \alpha, t_n + \alpha], y)$ au Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_n) &= x(t_n), \end{cases}$$

avec $\alpha = \min(\eta/2, R/M)$. On a donc $\alpha = \hat{\eta}/2$. En particulier $t_n + \alpha \geq T_+ - \hat{\eta}/3 + \hat{\eta}/2$ et $t_n + \alpha > T_+$. En posant

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in]T_-, t_n], \\ y(t) & \text{si } t \in [t_n, t_n + \alpha[, \end{cases}$$

on définit donc un prolongement strict de x . Cela contredit la maximalité de $(]T_-, T_+[, x)$. ■

Preuve du Corollaire 2 : On applique le Théorème de sortie de tout compact, K étant la boule fermée centrée à l'origine et de rayon R : pour tout $R > 0$, il existe $T_R \in]T_-, T_+[$ tel que $|x(t)| > R$ pour tout $t \in [T_R, T_+[$. Cela signifie exactement que $\lim_{t \rightarrow T_+} |x(t)|_E = +\infty$. ■

Application : si E est de dimension finie, les bornés sont relativement compacts : il suffit donc de montrer qu'une solution maximale est bornée pour savoir qu'elle est globale.

Exemple 1 : Fonction de Lyapunov. Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. On suppose que l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ a une *fonction de Lyapunov*, c'est-à-dire qu'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad DV(x) \cdot f(x) \leq 0$$

et

$$\forall R > 0, \quad \{x \in \mathbb{R}^N, V(x) \leq R\} \text{ est borné.}$$

Alors les solutions du Problème de Cauchy sont globales en temps positif. Cas particulier : système gradient $\dot{x} = -DV(x)$ ou système hamiltonien $\dot{p} = D_q H, \dot{q} = -D_p H$.

Exemple 2 : Champ rentrant sur la sphère. voir TD.

4 Continuité par rapport aux données

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E , f application $I \times \Omega \rightarrow E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

Dans tout ce paragraphe, on note $x(t; x_0)$ la solution maximale du Problème de Cauchy.

4.1 Continuité par rapport aux données, cas globalement Lipschitz

Proposition 5 (Dépendance continue, cas globalement Lipschitz) *On fait l'hypothèse $\Omega = E$ et f continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Pour tout $J \subset I$ compact contenant t_0 dans son intérieur, l'application $E \rightarrow C(J; E)$ qui à x_0 associe $x(\cdot; x_0)$ est lipschitzienne.*

Corollaire 3 *Avec les mêmes hypothèses, l'application $J \times E \rightarrow E$ qui à (t, x_0) associe $x(t; x_0)$ est localement lipschitzienne.*

Preuve de la Proposition 5 : soit $b > 0$ tel que $J \subset [t_0 - b, t_0 + b]$ et soit L une constante de Lipschitz de f par rapport à sa deuxième variable. La Proposition 3 montre que

$$|x(t; x_0) - x(t; \hat{x}_0)|_E \leq e^{Lb} |x_0 - \hat{x}_0|$$

donc que $x(\cdot; x_0): E \rightarrow C(J; E)$ est e^{Lb} -lipschitzienne. ■

Preuve du Corollaire 3 : soit $x_0 \in E$, $s \in J$ et $r > 0$. On note K le compact $J \times B(x_0, r)$ et M une borne de f sur K . Soit $\hat{x}_0 \in B(x_0, r)$ et $\hat{s} \in J \cap]s - r, s + r[$. On a

$$\begin{aligned} |x(s; x_0) - x(\hat{s}, \hat{x}_0)|_E &\leq |x(\hat{s}; x_0) - x(\hat{s}, \hat{x}_0)|_E + |x(s; x_0) - x(\hat{s}, x_0)|_E \\ &\leq e^{Lb} |x_0 - \hat{x}_0| + \left| \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t; x_0)) dt \right|_E \\ &\leq e^{Lb} |x_0 - \hat{x}_0| + \int_s^{\hat{s}} |f(t, x(t; x_0))|_E dt \\ &\leq e^{Lb} |x_0 - \hat{x}_0| + M |s - \hat{s}|. \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat. ■

4.2 Continuité par rapport aux données, cas localement Lipschitz

Proposition 6 (Dépendance continue, cas localement Lipschitz) *Soit f continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$. Il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'application $B(x_0, \varepsilon) \rightarrow C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \Omega)$ qui à \hat{x}_0 associe $x(\cdot; \hat{x}_0)$ est lipschitzienne.*

Preuve de la Proposition 6 : Soit η, r, M, L positifs tels que

- $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \subset I \times \Omega$,
- $|f|_E \leq M$ sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r)$,
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E$,

pour tout $(t, x_1, x_2) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \times B(x_0, r)$. On reprend les notations de la preuve du Théorème 3 et on pose $\alpha = \hat{\eta}$ et $\varepsilon = r/2$. Pour tout $\hat{x}_0, \tilde{x}_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, les solutions $x(\cdot; \hat{x}_0)$ et $x(\cdot; \tilde{x}_0)$ du Problème de Cauchy de données initiales (t_0, \hat{x}_0) et (t_0, \tilde{x}_0) respectivement sont bien définies sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et coïncident sur cet intervalle avec les solutions $y(\cdot; \hat{x}_0)$ et $y(\cdot; \tilde{x}_0)$ du problème de Cauchy associé à l'équation $\dot{y}(t) = g(t, y(t))$ où g est L -globalement lipschitzienne en la deuxième variable. D'après la Proposition 5, on a donc

$$\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad |x(t; \hat{x}_0) - x(t; \tilde{x}_0)|_E \leq e^{L\alpha} |\hat{x}_0 - \tilde{x}_0|.$$

Cela prouve le résultat. ■

Remarque 2 *On peut ici aussi prouver un analogue du Corollaire 3 ; pour cela il faut toutefois montrer un résultat d'uniformité du temps d'existence qui est difficile, c'est l'objet du paragraphe 5.*

4.3 Continuité par rapport au paramètre

On considère le Problème de Cauchy à paramètre

$$\begin{cases} \dot{x}_\lambda(t) &= f(t, x(t), \lambda), \\ x_\lambda(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

et on s'interroge sur la dépendance de la solution en λ . Voici comment on se ramène au problème de la dépendance en la donnée initiale : on pose

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix}, F(t, y) = \begin{pmatrix} f(t, x, \rho) \\ 0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

et on considère le Problème de Cauchy étendu

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= F(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

C'est un système d'équations dont la deuxième est $\dot{\rho} = 0$, de solution $\rho(t) = \text{cst} = \lambda$. On est alors ramené au problème de la dépendance en la donnée initiale. Sous les hypothèses adéquates (λ varie dans un ouvert d'un espace de Banach et f est localement lipschitzienne par rapport à λ), il suffit d'appliquer les résultats précédents pour conclure à la continuité de $\lambda \mapsto x_\lambda(t)$.

5 Continuité du flot

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E , f application $I \times \Omega \rightarrow E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

On rappelle la définition du flot et de son domaine.

Définition 4 Pour $x_0 \in \Omega$, on note J_{x_0} l'intervalle de définition de la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = x_0$ et on pose

$$\mathcal{D}(\varphi) := \bigcup_{x \in \Omega} (J_x \times \{x\}).$$

On définit le flot φ de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ comme l'application $\mathcal{D}(\varphi) \rightarrow \Omega$ qui à (t, x) associe la valeur au temps t de la solution maximale du Problème de Cauchy ayant la valeur x au temps $t = 0$.

Théorème 8 (Continuité du flot) L'ensemble $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert et le flot $\varphi : \mathcal{D}(\varphi) \rightarrow \Omega$ est une application localement lipschitzienne.

Preuve du théorème de continuité du flot, Théorème 8 : Le début de la preuve ressemble à la preuve du théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4. Soit $(s, a) \in \Omega$ et soit (J_a, x) la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = a$. Soit $J \subset J_a$ un intervalle compact dont l'intérieur contient s et 0 . Alors $K := J \times x(J)$ est compact donc f est lipschitzienne en la deuxième variable sur un voisinage V de K dans $I \times \Omega$. Quitte à réduire V , on peut supposer que f est bornée sur V : il existe L et M positifs tels que

$$|f|_E \leq M \text{ et } f \text{ est } L\text{-lipschitzienne en la deuxième variable sur } V. \quad (2)$$

Remarquons en particulier que, pour chaque $(t_0, x_0) \in V$, et d'après le Théorème de résolution locale, Théorème 3, on sait que le Problème de Cauchy avec conditions initiales (t_0, x_0) admet une solution locale. Soit $r > 0$. Admettons qu'on ait prouvé

$$J \times \overline{B}(a, r) \subset \mathcal{D}(\varphi), \quad (3)$$

$$J \times \overline{B}(a, r) \subset V. \quad (4)$$

On voit alors que $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert ($J \times \overline{B}(a, r)$ est un voisinage de (s, a)). De plus, comme f est L -lipschitzienne en sa deuxième variable sur V , le résultat (4) et le Lemme de Gronwall montrent que

$$|\varphi(t, b_1) - \varphi(t, b_2)|_E \leq e^{Lt} |b_1 - b_2|_E \quad \forall t \in J. \quad (5)$$

donc

$$|\varphi(t, b_1) - \varphi(t, b_2)|_E \leq e^{LT} |b_1 - b_2|_E, \quad \forall t \in J \quad (6)$$

où $T > 0$ est tel que $J \subset [-T, T]$. Si $t_1, t_2 \in J$ et $b \in \overline{B}(a, r)$ alors le résultat (4), la borne de f sur V et l'équation montrent

$$\begin{aligned} |\varphi(t_2, b) - \varphi(t_1, b)| &= \left| \int_{[t_1, t_2]} \dot{\varphi}(t, b) dt \right|_E = \left| \int_{[t_1, t_2]} f(t, \varphi(t, b)) dt \right|_E \\ &\leq \int_{[t_1, t_2]} |f(t, \varphi(t, b))|_E dt \\ &\leq M |t_1 - t_2|. \end{aligned} \quad (7)$$

Cela, avec l'inégalité de Lipschitz par rapport à la deuxième variable (6), montre que le flot est lipschitzien sur $J \times \overline{B}(a, r)$. Il est donc localement lipschitzien sur $\mathcal{D}(\varphi)$.

Il reste donc à prouver les inclusions (3) et (4). On introduit la distance

$$d(z, z') := \max(|t - t'|, |y - y'|_E)$$

entre $z = (t, y)$ et $z' = (t', y') \in I \times \Omega$, et pour $\varepsilon > 0$, le ε -voisinage fermé $\overline{V}_\varepsilon(K)$ de K , c'est-à-dire l'ensemble

$$\overline{V}_\varepsilon(K) = \{z \in I \times \Omega; d(z, K) \leq \varepsilon\}.$$

Enfin, on note

$$\overline{W}_\varepsilon = \{(t, y) \in J \times \Omega; |y - \varphi(t, a)| \leq \varepsilon\}.$$

On a $\overline{W}_\varepsilon \subset \overline{V}_\varepsilon(K)$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{V}_\varepsilon(K) \subset V$ ¹. Pour un tel ε , l'ensemble \overline{W}_ε est donc inclus dans V . Soit maintenant $r := \varepsilon e^{-LT}$ et $b \in \overline{B}(a, r)$. Notons J_+ le segment $J \cap \mathbb{R}_+^*$ et X l'ensemble des temps positifs jusqu'auxquels la trajectoire issue de b est définie et reste dans \overline{W}_ε :

$$X := \{\tau \in J_+;]0, \tau] \subset J_b, \varphi([0, \tau], b) \in \overline{W}_\varepsilon\}.$$

Comme \overline{W}_ε est fermé, X est fermé (dans J_+). D'autre part X est ouvert dans J_+ ; en effet si $\tau \in X$, soit $\tau = \sup J_+$, auquel cas il n'y a rien à montrer (car alors $X = J_+ \cap \mathbb{R}$ est bien l'intersection de J_+ avec un ouvert de \mathbb{R}), soit $0 < \tau < \sup J_+$ et alors, d'une part on peut étendre strictement $\varphi(\cdot, b)$ au delà de τ , disons jusqu'à $\tau + \tilde{\eta}$, puisque on sait résoudre localement le Problème de Cauchy sur V , d'autre part, d'après (6) et le lemme de Gronwall, on aura

$$|\varphi(\tau, b) - \varphi(\tau, a)|_E \leq e^{L\tau} |b - a|_E \leq e^{L(\tau-T)} \varepsilon.$$

Comme $\tau < \sup J_+ \leq T$, on a $|\varphi(\tau, b) - \varphi(\tau, a)|_E < \varepsilon$ et cela prouve (par continuité) que, quitte à réduire $\tilde{\eta}$, la trajectoire restera dans \overline{W}_ε lorsque $t \in [\tau, \tau + \tilde{\eta}]$. Ainsi X est ouvert

¹en effet, on aurait sinon l'existence d'une suite (z_n) du fermé $I \times \Omega \setminus V$ telle que $d(z_n, K) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$; en choisissant z'_n dans K tel que $d(z_n, K) = d(z_n, z'_n)$ on voit que (z_n) a les mêmes valeurs d'adhérence que (z'_n) , donc au moins une notée z_∞ . À la limite $n \rightarrow +\infty$, on a la contradiction $z_\infty \in K$, $z_\infty \notin V$.

dans J_+ . Enfin X est non-vide, comme on le voit en résolvant localement le Problème de Cauchy en $(0, b)$. L'ensemble X est ouvert, fermé non-vide de J_+ connexe donc $X = J_+$. En considérant de la même façon les temps négatifs, on montre (3) et (4), cela conclut la preuve. ■

Dans le cas où f est de classe C^p , $p \geq 1$, on peut montrer que le flot est de classe C^p sur son domaine de définition $\mathcal{D}(\varphi)$, c'est le **Théorème de différentiabilité du flot**. Sa preuve commence par la démonstration de la différentiabilité du flot par rapport aux conditions initiales. On remarque que, si on admet que le flot a une telle régularité on obtient, en dérivant l'équation différentielle $\dot{\varphi}(t; x) = f(t, \varphi(t; x))$ par rapport à x :

$$\dot{D}_x\varphi(t; x) = D_x f(t, \varphi(t; x))D_x\varphi(t; x),$$

c'est-à-dire que la différentielle $D_x\varphi(t; x)$ est solution de l'équation différentielle *linéaire* $\dot{z} = D_x f(t, \varphi(t; x))z$. Les équations différentielles linéaires sont assez facile à résoudre (voir Chapitre suivant) et on peut partir de cela pour montrer l'existence de $D_x\varphi(t; x)$. Une autre méthode de preuve utilise le Théorème des fonctions implicites (c'en est une très jolie application). Voir par exemple le livre de Cartan (Henri Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann) pour une preuve par résolution de l'équation linéaire et Lafontaine (Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, pug) ou Lang (Serge Lang, *Real Analysis*) pour une preuve par Théorème des fonctions implicites.