Équations différentielles - Cours no 3
Équations différentielles linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension d, soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On étudie les équations différentielles *linéaires*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{1}$$

où $A \in C(I; \mathcal{L}(E))$, $b \in C(I; E)$.

Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas **global** Lipschitz), on sait que, pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, il existe une unique solution x de (1) définie sur tout I satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Remarque : on confondra souvent endomorphismes de E et matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

Exemples : Système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & tx(t) + y(t) + 1, \\ \dot{y}(t) & = & \cos(t)x(t) + e^t y(t). \end{array}\right.$$

Équation

$$\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0.$$

1 Résolvante, formule intégrale

1.1 Équations homogènes

On suppose d'abord que l'équation est homogène, *i.e.* $b = 0$.

Théorème 1 (Espace des solutions) *L'ensemble V des solutions de l'équation*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

est un sous-espace vectoriel de dimension d de $C^1(I; E)$.
Plus précisément : pour $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, notons $x(t; t_0, x_0)$ la valeur au temps $t \in I$ de la solution de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Alors l'application

$$x_0 \mapsto x(\cdot; t_0, x_0)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel entre E et V.

Preuve du Théorème 1 : Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;E)$. Notons φ_{t_0} l'application définie par $x_0 \mapsto x(\cdot;t_0,x_0)$. L'unicité dans le Théorème de Cauchy-Lipschitz montre que φ_{t_0} est linéaire et injective. L'unicité encore assure que si $x \in V$, alors $x = \varphi_{t_0}(x_0)$ où on a posé $x_0 = x(t_0)$. Ainsi φ_{t_0} est surjective. Finalement, c'est un isomorphisme entre E et V, ce dernier est donc de dimension d. ■

Définition 1 (Système fondamental de solutions) *On appelle* système fondamental de solutions *une base de V.*

D'après le Théorème 1, $(x_1,\ldots,x_d)$ est un système fondamental de solutions si, et seulement si, il existe $t \in I$ tel que $(x_1(t),\ldots,x_d(t))$ est libre dans E (et c'est alors vrai pour tout t). Ce fait est aussi une conséquence de la formule suivante (voir (2)).

Proposition 1 (Wronskien) *Soit $x_1,\ldots,x_d$ des solutions de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ et w leur* wronskien *défini par*

$$w(t) = \det[x_1(t),\ldots,x_d(t)].$$

On a, pour $t,s \in I$, la formule de Liouville

$$w(t) = w(s)exp\left(\int_s^t \mathrm{Tr}(A(\tau))d\tau\right). \tag{2}$$

Résolvante : si $(x_1,\ldots,x_d)$ est un système fondamental de solutions et $X(t)$ est la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $(x_1(t),\ldots,x_d(t))$, alors $X \in C^1(I;\mathcal{M}_d(\mathbb{K}))$ et X satisfait l'équation différentielle

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t). \tag{3}$$

Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas **global** Lipschitz), il existe un unique $X \in C^1(I;\mathcal{M}_d(\mathbb{K}))$ satisfaisant cette equation et la condition initiale $X(t_0) = I_d$ (le montrer en exercice). On note $S(t;t_0)$ cette solution.

Proposition 2 (Résolvante) *Pour tout $t,t_0,t_1 \in I$, S a la propriété multiplicative*

$$S(t;t_0) = S(t;t_1)S(t_1;t_0). \tag{4}$$

Pour tout $t,t_0 \in I$, $S(t;t_0) \in GL_d(\mathbb{K})$ et $S(t;t_0)^{-1} = S(t_0;t)$. Enfin, la solution du Problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

est

$$x(t) = S(t;t_0)x_0.$$

Preuve de la Proposition 1 : avec les notations de ci-dessus, on a $w(t) = \det(X(t))$. Par dérivation des fonctions composées, on en déduit $\dot{w}(t) = \det'(X(t)) \cdot \dot{X}(t)$. D'autre part, $\det'(A) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\widetilde{A}H)$ ($\widetilde{A}$ est la comatrice de A, voir cours de calcul différentiel). On a donc

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \mathrm{Tr}({}^t\widetilde{X(t)}\dot{X}(t)) \\
&= \mathrm{Tr}({}^t\widetilde{X(t)}A(t)X(t)) \text{ d'après l'équation différentielle 3} \\
&= \mathrm{Tr}(X(t){}^t\widetilde{X(t)}A(t)) \text{ car } \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM) \\
&= \mathrm{Tr}(\det(X(t))I_d A(t)) \\
&= \mathrm{Tr}(A(t))w(t).
\end{aligned}$$

Par intégration, cela donne (1). ■

Preuve de la Proposition 2 : La propriété multiplicative se déduit de l'unicité dans le Théorème de Cauhy-Lipschitz (on vérifie que les deux membres de (4)) sont solutions de la même équations différentielle avec la même valeur en $t = t_1$. En faisant $t := t_0$ et $t_1 := t$ dans la formule, on en déduit $S(t;t_0)^{-1} = S(t_0;t)$. La dernière assertion est évidente. ■

1.2 Cas non homogène

Si $\overline{x}$ est une solution particulière de l'èquation, alors l'espace des solutions de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

est $\overline{x} + V$: espace affine de dimension d.

Formule intégrale : encore appelée Formule de la résolvante ou Formule de Duhamel (elle s'obtient par la méthode de variation de la constante).

La solution de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est

$$x(t) = S(t;t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t;s)b(s)ds. \tag{5}$$

2 Systèmes à coefficients constants

On étudie les équations différentielles *linéaires*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b,$$

où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^d$.

2.1 Exponentielle de matrice

L'exponentielle de $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est définie par la série convergente

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition 3 (Propriétés de l'exponentielle)

- *Si A et B commutent, alors*

$$e^{A+B} = e^A e^B,$$

- $e^0 = I_d$*,* e^A *est inversible d'inverse* e^{-A}*,*
- *si P est inversible alors* $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$*,*
- *si N est nilpotente, alors*

$$e^N = I_d + N + \cdots + \frac{N^{d-1}}{(d-1)!}.$$

2.2 Résolvante

Les solutions de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ sont de la forme $x(t) = e^{tA}x_0$, *i.e.* $S(t;t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

La résolvante $S(t;t_0)$ ne dépend que de $t - t_0$: $S(t;t_0) = \Sigma(t-t_0)$ (avec $\Sigma(t) = e^{tA}$). La propriété multiplicative (4) s'écrit : pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $\Sigma(t+s) = \Sigma(t)\Sigma(s)$. Ainsi Σ est un homomorphisme de groupe de $\mathbb{R}$ dans $GL_d(\mathbb{K})$. (Voir paragraphe 2.4).

2.3 Calcul des solutions

Donnée initiale vecteur propre : si $Ax_0 = \lambda x_0$, alors $t \mapsto e^{\lambda(t-t_0)}x_0$ est la solution du Problème de Cauchy

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0.$$

Application : cas où A est diagonalisable.

Proposition 4 (Décomposition $D + N$, Dunford) *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ une matrice scindée,*

$$P_A = (-1)^d \Pi_{j=1}^l (X - \lambda_j)^{m_j}, \quad M_A = \Pi_{j=1}^l (X - \lambda_j)^{r_j},$$

respectivement son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Alors A a la décomposition $A = D + N$ où D et N commutent, D est diagonalisable, N est nilpotente. Plus précisément : à changement de base près, D et N sont des matrices blocs $D_1 \oplus \cdots \oplus D_l$, $N_1 \oplus \cdots \oplus N_l$ respectivement, où $D_j = \lambda_j I_{m_j}$, $N_j \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{K})$ est nilpotente. Enfin, l'indice[1] de N_j est r_j.

[1] le plus petit entier m tel que $N_j^m = 0$

Application : on a

$$e^{t(D_j+N_j)} = e^{tD_j}e^{tN_j} = e^{t\lambda_j}\left(I_{m_j} + tN_j + \cdots + t^{r_j-1}\frac{N_i^{r_j-1}}{(r_j-1)!}\right),$$

dont on déduit les propositions suivantes.

Proposition 5 (Solutions dans le cas complexe) *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et*

$$P_A = (-1)^d \Pi_{j=1}^l (X-\lambda_j)^{m_j}, \quad M_A = \Pi_{j=1}^l (X-\lambda_j)^{r_j},$$

respectivement son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Pour tout $j \in \{1,\ldots,l\}$, il existe m_j solutions indépendantes de l'équation $\dot{x} = Ax$ de la forme

$$x_{j,k}(t) = e^{t\lambda_j}p_{j,k}(t), \quad k = 1,\ldots,m_j$$

où $p_{j,k}$ est un polynôme de $\mathbb{C}^d[X]$ de degré inférieur à $r_j - 1$. L'ensemble de toutes ces solutions forme un système fondamental de solutions.

Proposition 6 (Solutions dans le cas réel) *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et*

$$P_A = (-1)^d \Pi_{j=1}^l (X-\lambda_j)^{m_j}, \quad M_A = \Pi_{j=1}^l (X-\lambda_j)^{r_j},$$

respectivement son polynôme caractéristique et son polynôme minimal en tant que matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Alors il existe un système fondamental de solutions de la forme

$$t \mapsto t^r e^{t\alpha_j}\cos(\beta_j t)a, \quad t \mapsto t^s e^{t\alpha_j}\sin(\beta_j t)b$$

où $a, b \in \mathbb{R}^d$, $r, s \leq r_j - 1$.

Preuve de la Proposition 5 : On a $A = P(D+N)P^{-1}$. En posant $y = P^{-1}x$ et en décomposant $y = y_1 \oplus \cdots \oplus y_l$, on se ramène au système d'équations homogènes

$$\dot{y}_j(t) = (D_j + N_j)y_j(t), \quad j = 1,\ldots,l. \tag{6}$$

Soit $(f_k)_{1,m_j}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{m_j}$. Alors $(e^{t(D_j+N_j)}f_k)_{1,m_j}$ est un système fondamental de solutions de l'équation (6) et on calcule

$$e^{t(D_j+N_j)}f_k = e^{t\lambda_j}p_k(t), \quad p_k(t) := f_k + tN_jf_k + \cdots + t^{r_j-1}\frac{N_j^{r_j-1}f_k}{(r_j-1)!} \quad :$$

le degré de p_k est inférieur à $r_j - 1$. ∎

Remarque 1 *Au moins un des p_k dans la preuve ci-dessous est de degré $r_j - 1$ exactement, sinon $N^{r_j-1}f_k = 0$ pour tout k, i.e. $N_j^{r_j-1} = 0$, ce qui contredit le fait que N_j est d'indice r_j.*

Preuve de la Proposition 6 : admis (utilise la complexification de E). ∎

Exemples : voir cours et TD.

2.4 Groupe à un paramètre

Définition 2 (Groupe à un paramètre d'automorphismes linéaires) *On appelle* groupe à un paramètre *un homomorphisme de groupe de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $GL_d(\mathbb{K})$ *qui est de classe* C^1.

On a vu que si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, alors $t \mapsto e^{tA}$ est un groupe à un paramètre. Réciproquement, si $t \mapsto B(t)$ est un groupe à un paramètre, on a, en posant $A := B'(0)$,

$$\begin{aligned}\dot{B}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{B(t+h)-B(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{B(h)-B(0)}{h}B(t)\\ &= AB(t).\end{aligned}$$

On en déduit $B(t) = e^{tA}$. On appelle A le *générateur* du groupe. (Situations analogues dans des théories plus élaborées : générateur d'un processus de Markov en calcul stochastique, Théorème de Hille-Yosida en E.D.P.).

Exemples : Avec $A = I_d$, $\{e^{tA}\} = \{e^t I_d\}$ est le groupe des homothéties de rapport positif.

Avec $d = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $A^2 = -I_2$, d'où

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

et on obtient le groupe des rotations du plan.

Le générateur infinitésimal d'un sous groupe à un paramètre de $O(n)$ est une matrice antisymétrique (le prouver en exercice).

Remarque : par des techniques de calcul différentiel, on peut aussi prouver que si f est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $GL_d(\mathbb{R})$ supposé seulement **continu** (et non de classe C^1 comme ci-dessus), alors il existe $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $f(t) = e^{tA}$. Voir J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentiables* (page 37).

3 Équations linéaires scalaires d'ordre supérieure

On étudie les équations

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t), \tag{7}$$

où, pour $k = 0, \dots, n-1$, $a_k \in C(I;\mathbb{R})$, $b \in C(I;\mathbb{R})$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $y \in C^n(I;\mathbb{R})$.

Justification du titre : il s'agit ici d'une équation d'ordre n, elle est linéaire en y, elle est dite scalaire car la solution y est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Transformation en un système d'ordre 1

On pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}$$

et on note A la matrice compagnon de $(a_{n-1}, \cdots, a_0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors $y \in C^n(I;\mathbb{R})$ est solution de (7) si, et seulement si, $x \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation d'ordre 1

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y(t; t_0, y_0, \cdots, y_{n_1})$ de (7) satisfaisant aux conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

et on en déduit aussi la structure de l'espace des solutions.

Théorème 2 *Supposons que $g = 0$ (cas homogène). L'ensemble V des solutions de l'équation (7) est alors un sous-espace vectoriel de dimension n de $C^n(I;\mathbb{R})$. De plus, pour tout $t_0 \in I$, l'application*

$$(y_0, \cdots, y_{n-1}) \mapsto y(\cdot; t_0, y_0, \cdots, y_{n-1}),$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ sur V.

Dans le cas où g est non trivial, l'ensemble des solutions de l'équation (7) est un sous espace affine $\overline{y} + V$ de dimension n de $C^n(I;\mathbb{R})$, $\overline{y}$ étant une solution particulière de l'équation.

3.2 Wronskien

Soit $y_1, \ldots, y_n$ des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

On appelle *matrice wronskienne* associée à $y_1, \ldots, y_n$ la matrice

$$W(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

et on appelle *wronskien* de $y_1, \ldots, y_n$ son déterminant $w(t) = \det W(t)$.
De la Proposition 1 suit :

$$\forall t, s \in U, \quad w(t) = w(s)e^{-\int_s^t a_{n-1}(\tau)d\tau}.$$

Cas particulier des équations $\ddot{x} + q(t)x = 0$: $w = \text{cst.}$ (voir applications en TD).

3.3 Calcul des solutions

On cherche d'abord des solutions de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre.

3.3.1 Coefficients constants

Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $c \in C(I; \mathbb{R})$. On cherche des solutions de

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = c(t). \tag{8}$$

On introduit le *polynôme caractéristique de l'équation* :

$$P = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

C'est le polynôme caractéristique de la matrice compagnon A de $(a_{n-1}, \cdots, a_0)$. De la Proposition 6, on déduit donc :

Proposition 7 (Solutions de l'équation homogène) *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ les racines du polynôme caractéristique, de multiplicité respective $m_1, \ldots, m_l$. On note $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Alors il existe un système fondamental de solutions de l'équation homogène*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

de la forme

$$t \mapsto t^r e^{t\alpha_j} \cos(\beta_j t), \quad t \mapsto t^s e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $r, s \leq m_j - 1$.

Recette pour trouver une solution particulière : on suppose que g est de la forme

$$g(t) = Q(t)e^{\alpha t}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que α est une racine d'ordre k du polynôme caractéristique (k peut être nul). Alors il existe une solution particulière de la forme $R(t)e^{\alpha t}$ où R est un polynôme de degré $k + \deg(Q)$.

Exemples : voir Cours et TD.

3.3.2 Coefficients variables

On suppose connu un système fondamental $(y_1, \cdots, y_n)$ de solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Soit $W(t)$ la matrice wronskienne de $(y_1, \cdots, y_n)$. Il existe une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$\overline{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), c_1, \dots, c_n \colon I \to \mathbb{R},$$

où

$$\dot{c}(t) := \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} = W(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}$$

4 Comportement qualitatif des solutions

4.1 Portraits de phase en dimension deux

Voir le cours numéro 4 sur la stabilité des systèmes d'équations différentielles.

4.2 Stabilité asymptotique de l'origine

Théorème 3 (Stabilité asymptotique de l'origine) *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\sigma(A)$ sont spectre. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Toute solution de $\dot{x} = Ax$ tends vers 0 lorsque $t \to +\infty$,*
2. *$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 0\}$.*

4.3 Solutions bornées

Théorème 4 (Stabilité) *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\sigma(A)$ sont spectre. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Toute solution de $\dot{x} = Ax$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$,*
2. *$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq 0\}$ et la multiplicité (dans le polynôme minimal) des valeurs propres de partie réelle nulle est au plus un.*

Le Théorème 3 et le Théorème 4 sont des corollaires directs de la Proposition 5 (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et de la Proposition 6 (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et de la Remarque 1.

Voici un autre énoncé, de nature différente :

Proposition 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $\sigma(A)$ sont spectre. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour toute donnée $b \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ bornée, il existe une unique application bornée $x \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^d)$ solution de $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$, $t \geq 0$.*
2. *$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$.*

Preuve de la Proposition 8 : voir TD. ∎

4.4 Solutions périodiques

On suppose que $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{C}^d))$ et $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d)$ sont des fonctions **périodiques**, de même période (disons T) et on se demande s'il existe des solutions T-périodiques de l'équation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

On note $x(\cdot; t_0, x_0)$ la solution prenant la valeur x_0 en t_0.

Théorème 5 (Existence de solution périodique) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une solution périodique,*
2. *pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \mapsto x(T + t_0; t_0, x_0)$ a un point fixe,*
3. *il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \mapsto x(T + t_0; t_0, x_0)$ a un point fixe.*

Preuve du Théorème 5 : l'implication *1* $\Rightarrow$ *2* se montre en remarquant que, si x_* est une solution périodique et si $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $x_* = x(\cdot; t_0, x(t_0))$ par unicité dans le Théorème de Cauchy-Lipschitz, donc $x(t_0)$ est un point fixe de l'application $x_0 \mapsto x(T + t_0; t_0, x_0)$. L'implication *2* $\Rightarrow$ *3* est évidente. Montrons *3* $\Rightarrow$ *1* : soit $x_0 \in \mathbb{C}^d$ point fixe de $x_0 \mapsto$

$x(T+t_0;t_0,x_0)$. Posons $x_* := x(\cdot;t_0,x_0)$. L'application $y_*\colon t \mapsto x_*(t+T)$ est solution de l'équation différentielle car

$$\dot{y}_*(t) = \dot{x}_*(t+T) = A(t+T)x_*(t+T)+b(t+T) = A(t+T)y_*(t)+b(t+T) = A(t)y_*(t)+b(t),$$

la dernière égalité étant une conséquence de la périodicité de A et b. De plus y_* coïncide avec x_* en t_0. Par unicité de la solution maximale du Problème de Cauchy, elle coïncide partout avec x_*. Cela montre que x_* est périodique. ■

On note $S(t;t_0)$ la résolvante associée à l'équation homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Par le même argument que ci-dessus ($t \mapsto S(t+T;t_0+T)$ satisfait la même équation et la même condition initiale que $t \mapsto S(t;t_0)$), on obtient $S(t+T;t_0+T) = S(t;t_0)$. Cette identité, avec une utilisation astucieuse de l'identité $\mathrm{Im}(I-U) = \mathrm{Ker}(I-U^*)^\perp$, permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 6 (Solution périodique et solution bornée) *Il existe une solution périodique si, et seulement si, il existe une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve du Théorème 6 : une solution périodique est bornée sur une période (une fonction continue sur un compact est bornée) donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour prouver l'implication inverse, on suppose qu'il n'existe pas de solution périodique de l'équation. En notant $S(t;t_0)$ la résolvante associée à l'équation homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, on a

$$x(t;t_0,x_0) = S(t;t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t;s)b(s)ds.$$

Notons $U = S(T;0) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$. D'après le Théorème 5 (appliqué avec $t_0 = 0$), l'hypothèse est que l'équation

$$x_0 = Ux_0 + \int_0^T S(T;s)b(s)ds, x_0 \in \mathbb{C}^d$$

n'a pas de solution. Posons $y := \displaystyle\int_0^T S(T;s)b(s)ds$. Ceci signifie que $y \notin \mathrm{Im}(I-U)$. On munit $\mathbb{C}^d$ de sa structure canonique d'espace préhilbertien, en notant $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs, $E^\perp$ l'orthogonal d'un sous ensemble E. En notant aussi U^* l'adjoint de U, on a $\mathrm{Im}(I-U) = \mathrm{Ker}(I-U^*)^\perp$. Il existe donc $z \in \mathbb{C}^d$ tel que $U^*z = z$ et $\langle y,z\rangle \neq 0$. Si x satisfait l'équation $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$, et d'après la formule de la résolvante appliquée entre nT et $(n+1)T$,

$$\begin{aligned}
x((n+1)T) &= S((n+1)T;nT)x(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} S((n+1)T;s)b(s)ds \\
&= S(T,0)x(nT) + \int_0^T S((n+1)T;s+nT)b(s+nT)ds \\
&\quad \text{car } S((n+1)T,nT) = S(nT,(n-1)T) = \ldots = S(T,0) = U, \\
&= Ux(nT) + \int_0^T S(T;s)b(s)ds \\
&= Ux(nT) + y.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\langle x((n+1)T), z\rangle &= \langle Ux(nT), z\rangle + \langle y, z\rangle \\ &= \langle x(nT), U^* z\rangle + \langle y, z\rangle \\ &= \langle x(nT), z\rangle + \langle y, z\rangle\end{aligned}$$

et, par récurrence, $\langle x(nT), z\rangle = \langle x(0), z\rangle + n\langle y, z\rangle$. Comme $\langle y, z\rangle \neq 0$, $(x(nT))$ ne peut être bornée et, en particulier, x ne peut pas être bornée sur $\mathbb{R}_+$. Cela achève la preuve du Théorème. ■

Remarquer que, en appliquant la Proposition 8 (et son analogue obtenu en remplaçant $\mathbb{R}_+$ par $\mathbb{R}_-$ et $\Re(z) > 0$ par $\Re(z) < 0$), on obtient le résultat suivant : si $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^d)$ est T-périodique, si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ est constante et si A n'a pas de valeurs propres de partie réelle nulle, alors il existe une unique solution périodique à l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$.

On peut dire plus, en particulier concernant la stabilité de solutions, au sujet des équations différentielles à coefficients périodiques (Théorie de Floquet, non abordée dans ce cours).