

Équations différentielles - Cours no 4

Stabilité et portraits de phase des systèmes autonomes

1 Introduction

Soit un système (autonome) d'équations différentielles $\dot{x}(t) = f(x(t))$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On a vu que, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution maximale (J_a, x_a) de l'équation satisfaisant la condition initiale $x_a(0) = a$: c'est la solution (ou trajectoire) passant par a .

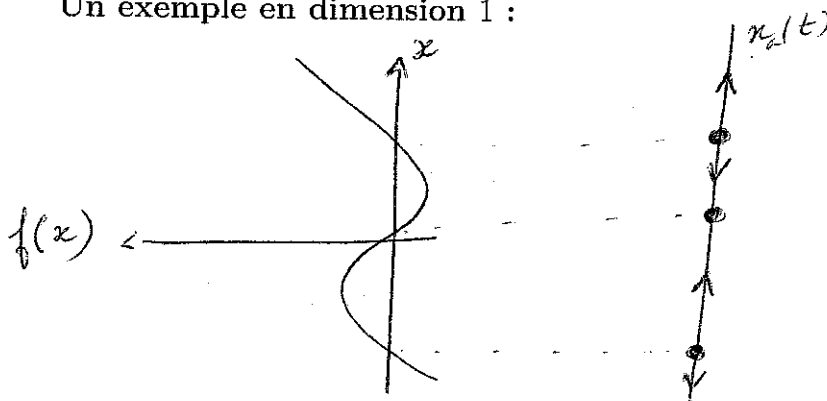
L'étude qualitative des solutions de ce système est l'étude de l'ensemble des solutions (ou trajectoires) d'un point de vue géométrique (voir les dessins du paragraphe 2) : on s'intéresse non pas à une solution particulière mais à l'ensemble $\{(J_a, x_a); a \in \mathbb{R}^d\}$.

Définition 1 (Portrait de phase) Le portrait de phase de l'équation $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est le dessin de l'ensemble des trajectoires $\{x_a(t); a \in \mathbb{R}^d, t \in J_a\}$.

Remarque : on rappelle que le flot $\varphi: \mathcal{D}(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^d$ est défini par $\varphi(a, t) = x_a(t)$ (voir Cours numéro 2). Le portrait de phase permet donc de représenter le flot de l'équation différentielle.

Exemples : on se limite au cas de la dimension 1 et au cas de la dimension deux.

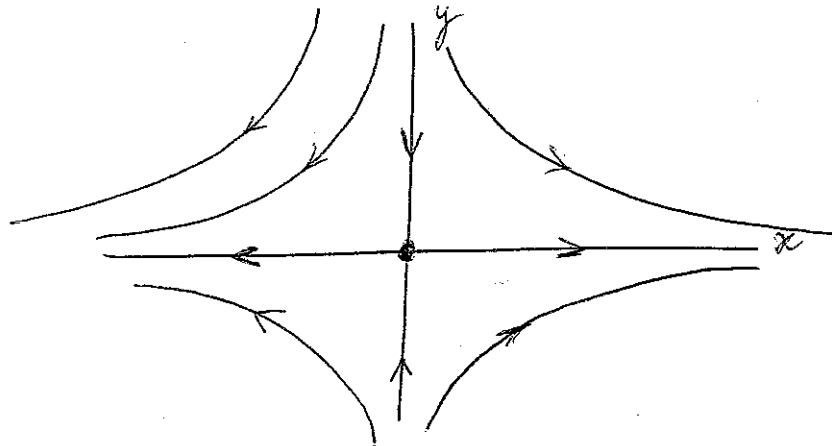
Un exemple en dimension 1 :



Premier exemple en dimension 2 : le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases}$$

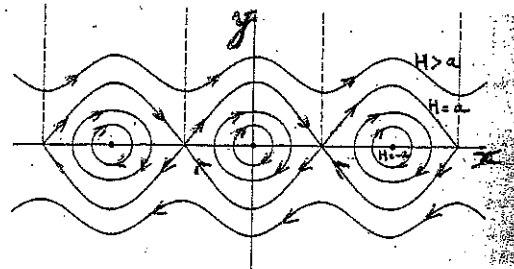
Solutions : $x(t) = x_0 e^{2t}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$: courbes paramétrées telles que $xy^2 = \text{cst}$.



Deuxième exemple en dimension 2 : le pendule sans frottement $\ddot{\theta} + a \sin(\theta) = 0$ ($a > 0$). En posant $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, on obtient le système 2×2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -a \sin(x(t)). \end{cases}$$

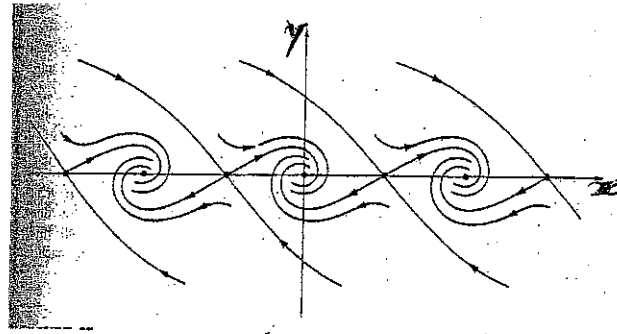
On obtient des courbes paramétrées satisfaisant $\frac{1}{2}y(t)^2 - a \cos(x(t)) = \text{cst} = H$ (H est l'énergie du pendule).



Troisième exemple en dimension 2 : le pendule avec frottement $\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + a \sin(\theta) = 0$ ($a, \alpha > 0$). En posant $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, on obtient le système 2×2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -a \sin(x(t)) - \alpha y(t). \end{cases}$$

Voici un dessin pour α assez grand.



Remarque : On renvoie au TD pour une analyse détaillée des exemples du pendule. L'équation du pendule sans frottement fournit un cas particulier d'équation conservative, du type $\ddot{x} = -DU(x)$ où $U \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ est un potentiel. Ces équations ont bien sûr une importance fondamentale en raison du principe fondamentale de la dynamique et de son application en mécanique. Les solutions préservent l'énergie totale $H := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$. Une fois écrite comme un système du premier ordre de taille 2, ces équations fournissent aussi un exemple de système hamiltonien.

Définition 2 (Système hamiltonien) Un système hamiltonien est un système d'équations différentielles du type

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = D_q H(p(t), q(t)), \\ \dot{q}(t) = -D_p H(p(t), q(t)), \end{cases} \quad (1)$$

où $H \in C^2(\mathbb{R}^{2d}; \mathbb{R}^d)$. La fonction H est appelée hamiltonien du système.

Si (p, q) est solution du système hamiltonien (1), alors on calcule

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = D_p H(p(t), q(t))\dot{p}(t) + D_q H(p(t), q(t))\dot{q}(t) = 0.$$

Ainsi $H(p(t), q(t)) = \text{cst}$: les trajectoires sont contenues dans les lignes de niveau de H . Si ces dernières sont faciles à tracer, on obtient alors une bonne partie du portrait de phase.

Remarque : Dans les exemples précédents, en dimension 1, il suffit de connaître les zéros de f et de savoir s'ils sont répulsifs ou attractifs pour déterminer le portrait de phase. En dimension 2, la situation est plus compliquée, comme on va le voir tout de suite.

2 Portrait de phase des systèmes linéaires en dimension 2

On donne ici les portraits de phase des systèmes linéaires en dimension 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}, \quad A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On commence par remarquer que, si $P \in GL_2(\mathbb{R})$, l'application $x \mapsto y = Px$ est un isomorphisme linéaire qui envoie les trajectoires de $\dot{x} = Ax$ sur les trajectoires de $\dot{y} = (PAP^{-1})y$, donc seule compte la classe de similitude de A . Pour déterminer cette dernière, on introduit le polynôme caractéristique de A :

$$p_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A).$$

Soit Δ le discriminant $\Delta := \text{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc$.

Premier cas : $\Delta < 0$. Il y a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Le lemme suivant est prouvé en TD :

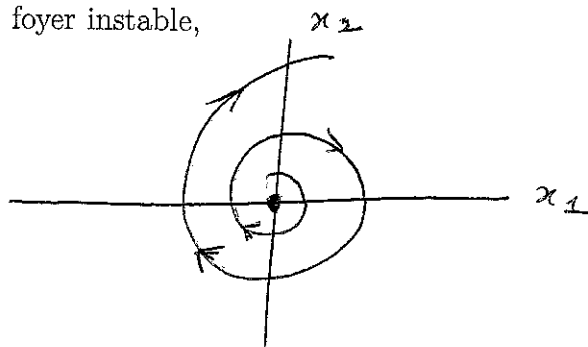
Lemme 1 A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

On se ramène donc au cas où $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. En passant en coordonnées polaires, on obtient les équations

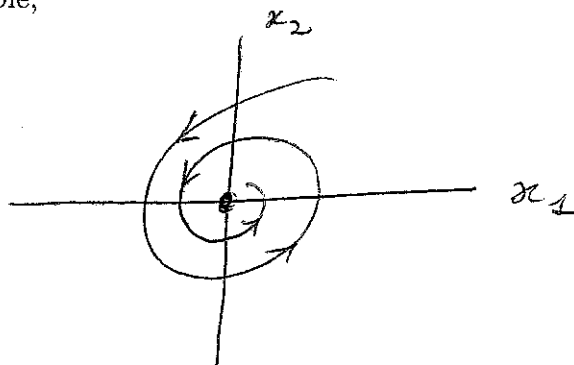
$$\dot{r} = \alpha, \quad \dot{\theta} = \beta.$$

Trois cas (on remarque que $\text{Tr}(A) = 2\alpha$) :

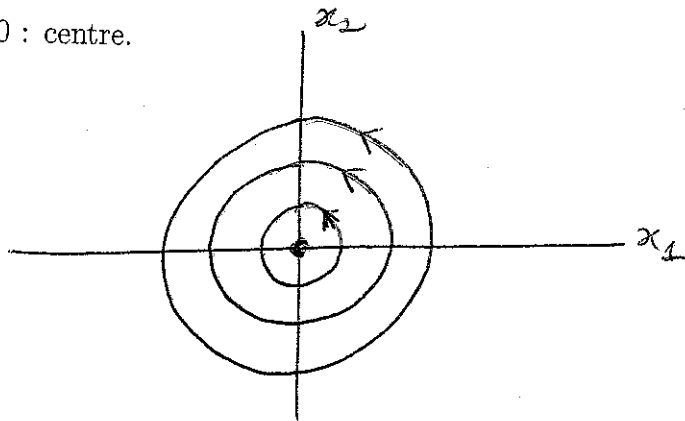
1. $\text{Tr}(A) > 0$: foyer instable,



2. $\text{Tr}(A) < 0$: foyer stable,



3. $\text{Tr}(A) = 0$: centre.

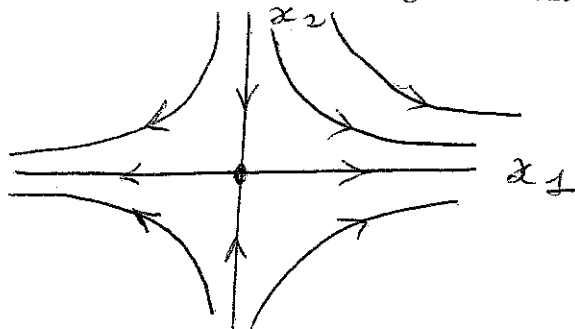


Deuxième cas : $\Delta > 0$. Il y a deux valeurs propres distinctes λ, μ . La matrice A est alors diagonalisable et on est ramené au cas où

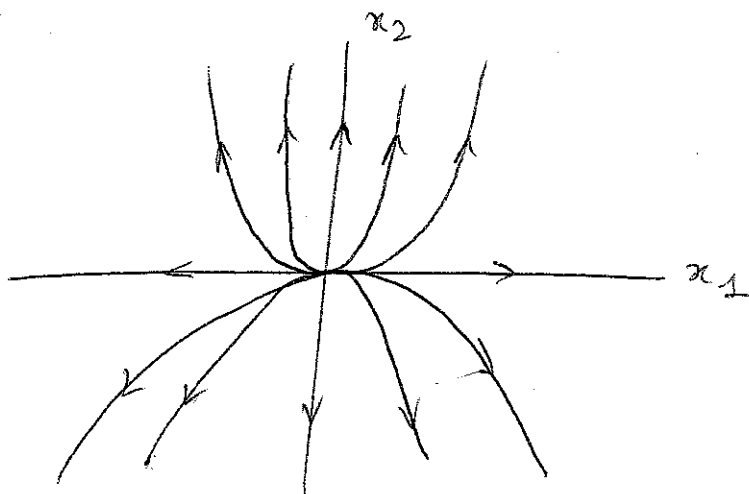
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Quatre cas cas (on remarque que $\text{Tr}(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$) :

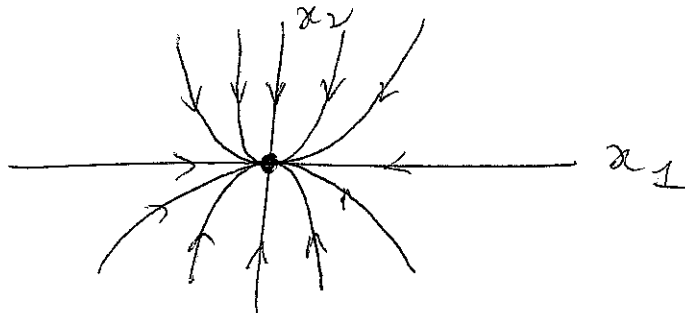
1. $\det(A) < 0$: les valeurs propres sont de signe différent : point selle,



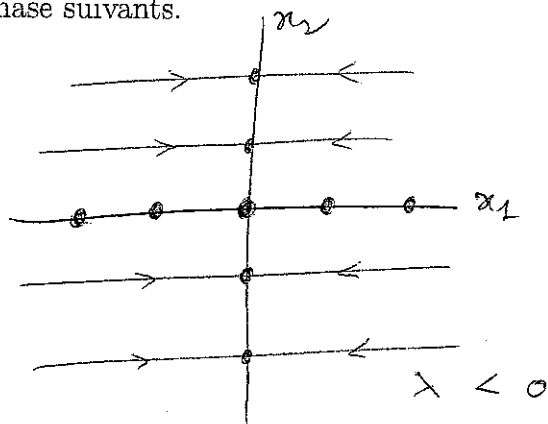
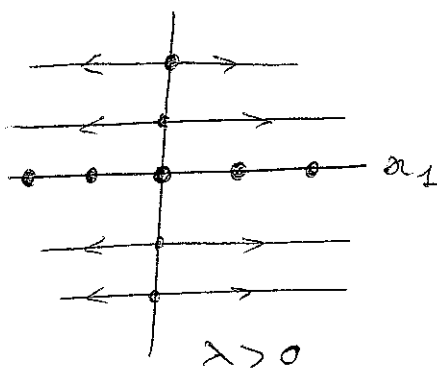
2. $\det(A) > 0$ et $\text{Tr}(A) > 0$: les valeurs propres sont positives : noeud instable,



3. $\det(A) > 0$ et $\text{Tr}(A) < 0$: les valeurs propres sont négatives : noeud stable.



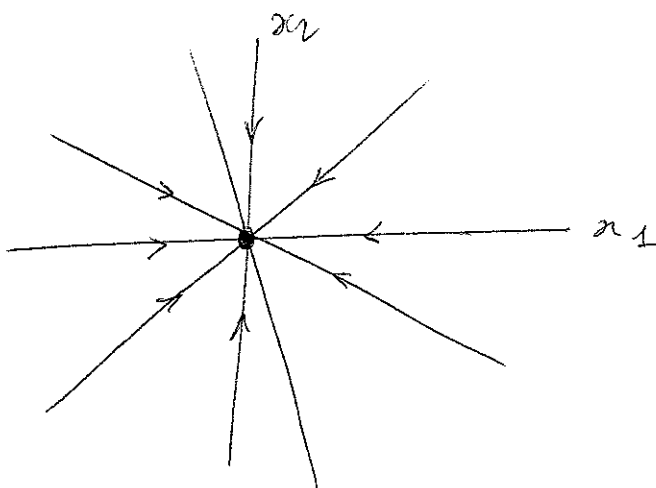
4. $\det(A) = 0$: une des valeurs propre, disons μ est nulle (cela est un cas dégénéré). Selon le signe de λ , on a les portraits de phase suivants.



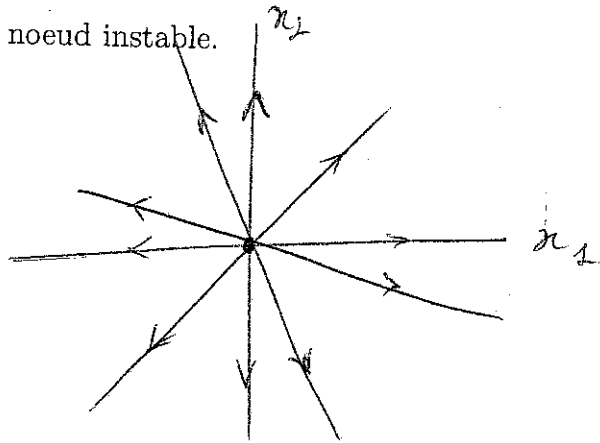
On aborde maintenant des cas plus dégénérés.

Troisième cas : $\Delta = 0$. Il y a une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable, on est ramené à la situation $A = \lambda I_2$. En écartant le cas trivial $\lambda = 0$, on obtient deux cas.

1. $\lambda < 0$: noeud stable,



2. $\lambda > 0$: noeud instable.

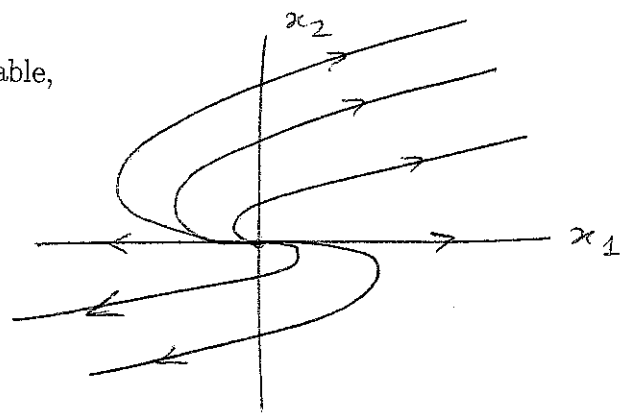


Si A est non diagonalisable, alors A est semblable à la matrice

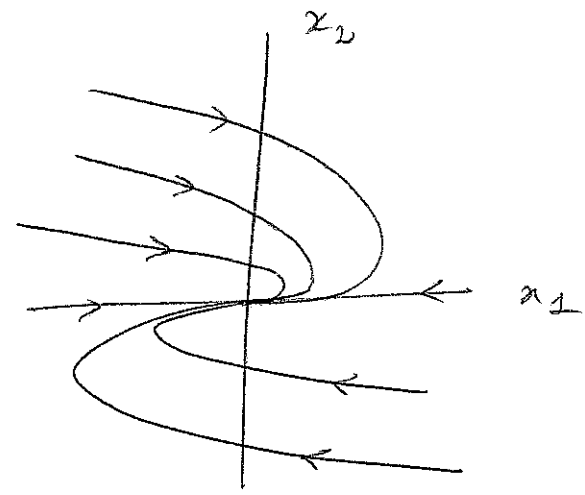
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Encore trois cas :

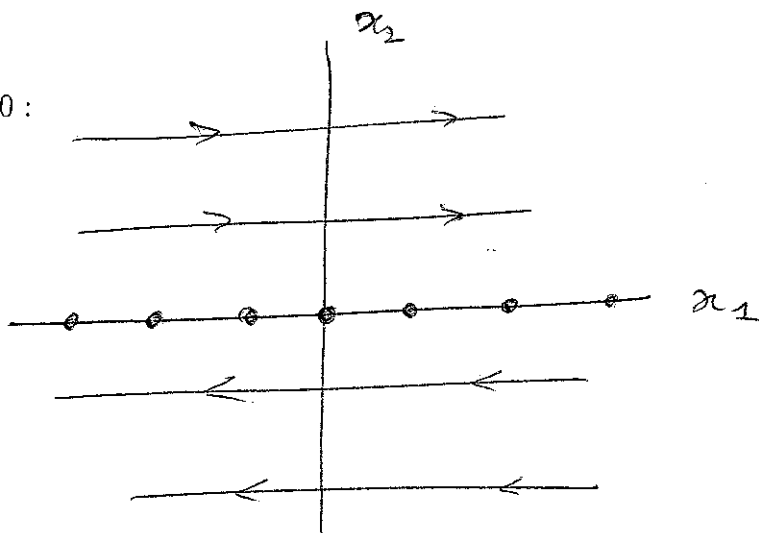
1. $\lambda > 0$: noeud dégénéré instable,



2. $\lambda < 0$: noeud dégénéré stable,



3. $\lambda = 0$:



Remarque : le portrait de phase permet de représenter le flot de l'équation différentielle. Dans le paragraphe qui suit, on explique entre autre la notion d'équilibre stable ou instable utilisée ici.

3 Stabilité

3.1 Introduction

Supposons $d = 2$. Dans le paragraphe précédent, on a déterminé tous les portraits de phase de $\dot{x} = f(x)$ dans le cas f linéaire. Le théorème (difficile) qui suit montre qu'on peut, dans certains cas, en déduire l'allure du portrait de phase dans le cas non-linéaire.

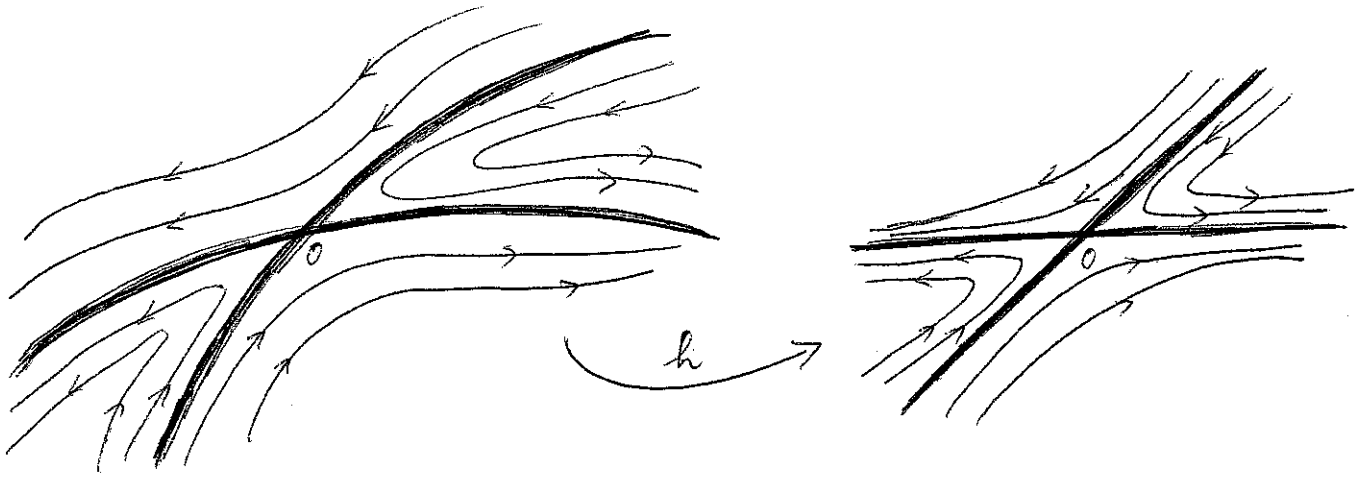
Définition 3 (Linéarisé) Soit $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, un système d'équations différentielles sur \mathbb{R}^d et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Le système linéarisé en x_0 est le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = df(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

C'est le système d'équations différentielles linéaire obtenu en remplaçant $f(x)$ par son développement de Taylor au premier ordre en x_0 .

Théorème 1 (Grobman - Hartman, 1967) Soit $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, un système d'équations différentielles sur \mathbb{R}^d . Supposons que $f(0) = 0$ et $A := df(0)$ n'a pas de valeurs propres de partie réelle nulle. Alors il existe U, V deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^d et un homéomorphisme $h: U \rightarrow V$ qui envoie les trajectoires de $\dot{x} = f(x)$ sur celles de $\dot{x} = Ax$ en préservant le sens du temps, c'est-à-dire : si $x(t; a) \in U$, alors $e^{tA}h(a) \in V$ et

$$x(t; a) = (h^{-1} \circ e^{tA} \circ h)(a).$$



Le théorème affirme (sous certaines conditions) que, au voisinage d'un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$, le système $\dot{x} = f(x)$ est équivalent au système linéarisé $\dot{x} = df(x_0)(x - x_0)$ (dans l'énoncé $x_0 = 0$ mais bien sûr on peut toujours se ramener à ce cas, il suffit de considérer la fonction $x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0)$).

Ce théorème a une preuve trop difficile pour être démontré dans ce cours. On va cependant donner quelques théorèmes qui montrent comment, près d'un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$, on peut obtenir de l'information sur les trajectoires en considérant le système linéarisé $\dot{x} = df(x_0)(x - x_0)$.

3.2 Stabilité

Définition 4 (Équilibre) Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x)$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre si la fonction constante $\mathbb{R} \ni t \mapsto x_0$ est solution du système. Cela est équivalent à $f(x_0) = 0$.

Remarque : un équilibre n'est donc rien d'autre qu'un zéro de f , il est toutefois préférable de l'envisager non comme un point de \mathbb{R}^d mais plutôt comme une solution particulière, une solution "qui n'avance pas", c'est-à-dire une solution de vitesse nulle. On va en effet s'intéresser tout particulièrement à ce type de solution, mais il existe d'autres solutions remarquables dont l'étude est très profitable, par exemple les solutions périodiques.

Définition 5 Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x)$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On note $x(t; a)$ la solution valant a en $t = 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre.

- On dit que x_0 est un **équilibre stable** si : pour tout voisinage U de x_0 , il existe un voisinage U' de x_0 tel que, pour tout $a \in U'$, la solution $x(\cdot; a)$ est définie sur \mathbb{R}_+ et ne sort pas de U : pour tout $t \geq 0$, $x(t; a) \in U$.
- On dit que x_0 est un **équilibre asymptotiquement stable** si c'est un équilibre stable et s'il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour tout $a \in W$, la solution $x(\cdot; a)$ est définie sur \mathbb{R}_+ et converge vers x_0 : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; a) = x_0$.

Exemple important : c'est le cas où f est linéaire, $f(x) = Ax$. Alors 0 est un équilibre. On a vu (cf Cours numéro 3) que 0 est asymptotiquement stable si, et seulement si, toute valeur propre de A est de partie réelle strictement négative et que 0 est stable si, et seulement si, toute valeur propre de A est de partie réelle négative, les valeurs propres de partie réelle nulle étant simple.

Théorème 2 (Stabilité en première approximation) Soit $\dot{x} = f(x)$ un système d'équations différentielles, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre de f . Si x_0 est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé $\dot{x} = df(x_0)(x - x_0)$, alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système $\dot{x} = f(x)$.

On peut donner aussi un résultat de non stabilité lorsque le linéarisé a une valeur propre de partie réelle strictement positive.

Théorème 3 (Non stabilité en première approximation) Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x)$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre de f . On suppose que $df(x_0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors x_0 n'est pas un équilibre stable pour le système $\dot{x} = f(x)$.

Pour être complet, il faudrait pouvoir donner un résultat dans le cas où le linéarisé a une valeur propre de partie réelle nulle. Ce n'est pas possible, comme le montre l'exemple

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

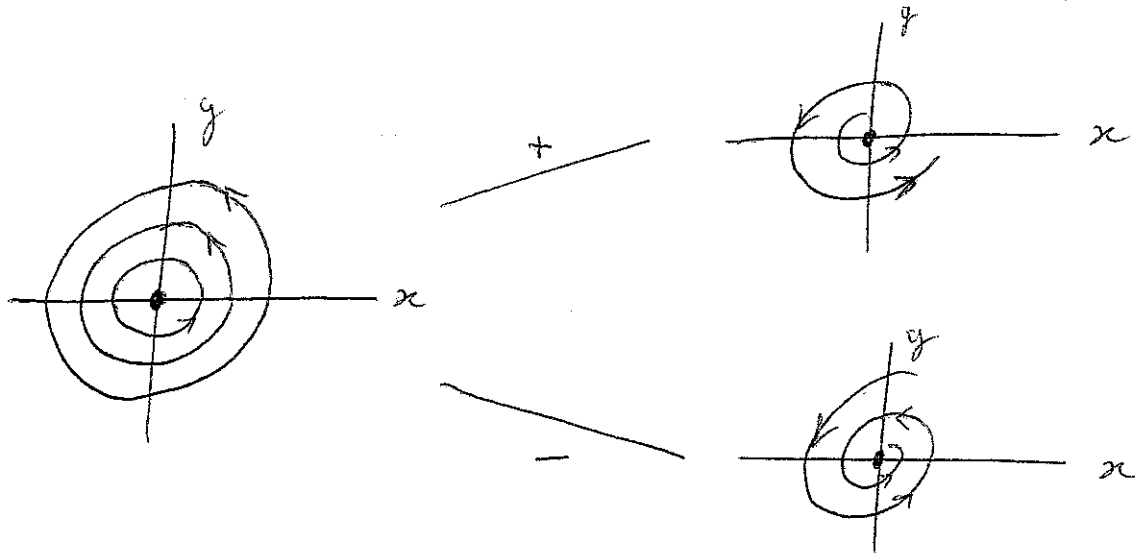
L'équation linéarisée en 0 est $\dot{x} = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres i et $-i$ (0 est un centre). En passant en coordonnées polaires, l'équation $\dot{x} = f(x)$ devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r^3.$$

L'équilibre 0 est donc stable ou instable selon qu'on choisit le signe $-$ ou le signe $+$.



Pour prouver le Théorème 2 et le Théorème 3, on utilise le résultat suivant.

3.3 Produit scalaire adapté à un endomorphisme

Théorème 4 (Produit scalaire adapté à un endomorphisme) Soit un espace vectoriel réel E de dimension d . Soit u un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de polynôme caractéristique P . Décomposons $P = P_- Q$ où P_- a toutes ses racines de parties réelle strictement négative et Q a toutes ses racines de parties réelle positive ou nulle. On a alors, par le lemme des noyaux, $E = E_- \oplus F$ avec $E_- := \text{Ker}(P_-(u))$ et $F := \text{Ker}(Q(u))$. Le résultat est le suivant : il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E et $\alpha > 0$ tels que les sous espaces E_- et F sont orthogonaux et :

$$\begin{cases} \forall x \in E_-, & \langle u(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle, \\ \forall x \in F, & \langle u(x), x \rangle \geq -\alpha \langle x, x \rangle. \end{cases}$$

Preuve du Théorème 4 : Le résultat est évident si u est diagonalisable (prendre le produit scalaire de matrice identité dans la base de vecteurs propres) et la preuve consiste à se ramener à un cas approchant. On suppose d'abord que $E = E_-$. Soit alors $\mu := \min_{\lambda \in \sigma(u)} (-\text{Re}(\lambda)) > 0$.

Soit (e_i) une base de E et A la matrice de u dans cette base. On voit A comme une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$: soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de \mathbb{C}^d . On trigonalise v : il existe une base (f_i) de \mathbb{C}^d telle que la matrice B de v dans (f_i) est triangulaire supérieure. En fait on peut supposer que les termes sur-diagonaux sont arbitrairement petits : soit en effet $\varepsilon > 0$ et soit $L > 1$. Posons $\tilde{f}_i := L^{i-1} f_i$. Alors (\tilde{f}_i) est une base (la matrice $\text{diag}(1, L, \dots, L^{d-1})$ est inversible) et la matrice \tilde{B} de v dans (\tilde{f}_i) a pour élément sur-diagonal $\tilde{B}_{ij} = L^{i-j} B_{ij}$ ($j > i$) qui est plus petit que ε pour L

assez grand. Soit (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur \mathbb{C}^d de matrice identité dans la base (\tilde{f}_i) . Si $X \in \mathbb{C}^d$, on a, en notant (X_i) les composantes de X dans (\tilde{f}_i) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(v(X), X) &= \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^d \tilde{B}_{ij} X_i \overline{X_j} \\
&= \sum_{i=1}^d \operatorname{Re} \tilde{B}_{ii} |X_i|^2 + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i < j \leq d} \tilde{B}_{ij} X_i \overline{X_j} \\
&\leq -\mu(X, X) + \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq d} |X_i| |\overline{X_j}| \\
&\leq -\mu(X, X) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^d |X_i| \right)^2 \\
&\leq -\mu(X, X) + \varepsilon d \sum_{i=1}^d |X_i|^2 \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&= (-\mu + d\varepsilon)(X, X) \\
&= (-\mu + d\varepsilon) \operatorname{Re}(X, X).
\end{aligned}$$

Si $\alpha < \mu/2$, alors, en choisissant ε assez petit, on a $\operatorname{Re}(v(X), X) \leq -2\alpha \operatorname{Re}(X, X)$.

Si $x, y \in E$, soit (x_i) et (y_i) leurs composantes dans la base (e_i) de E . On note X, Y les vecteurs de composantes (x_i) et (y_i) dans la base canonique de \mathbb{C}^d et on pose $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(X, Y)$. Cela définit un produit scalaire sur E tel que $\langle u(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle$ pour tout x .

Si $E = F$ (toutes les valeurs propres sont de partie réelle positive ou nulle), on applique le résultat précédent à $-u - \theta I$ où $\theta > 0$. On a alors : pour tout $\gamma \in]0, \theta/2[$, il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que

$$\langle -u(x) - \theta x, x \rangle \leq -2\gamma \langle x, x \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\langle u(x), x \rangle \geq (2\gamma - \theta) \langle x, x \rangle.$$

Il suffit donc de choisir θ et γ tels que $\theta - 2\gamma \leq \alpha$.

Enfin, dans le cas général, les arguments précédents donnent deux produits scalaires adaptés $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_-}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. En posant

$$\langle x, y \rangle := \langle x_-, y_- \rangle_{E_-} + \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_F, \quad x = x_- + \tilde{x}, y = y_- + \tilde{y} \in E = E_- \oplus F,$$

on a le résultat désiré. ■

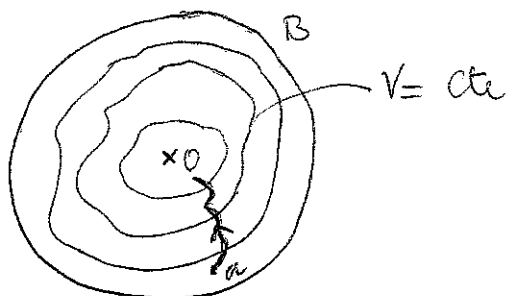
3.4 Preuve du Théorème 2 (stabilité en première approximation)

On commence par montrer le résultat suivant, qu'on appliquera à l'aide d'un produit scalaire adapté pour prouver le Théorème 2.

Théorème 5 (Fonction de Lyapunov et stabilité) Soit $\dot{x} = f(x)$ un système d'équations différentielles, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On suppose que 0 est un équilibre du système possédant une fonction de Lyapunov stricte, c'est-à-dire : il existe une boule ouverte B centrée en 0, il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$ tels que :

- 0 est un minimum strict de V sur B ,
- $\forall x \in B, dV(x)(f(x)) \leq -\alpha(V(x) - V(0))$.

Alors 0 est asymptotiquement stable.



Preuve du Théorème 5 : on va le montrer dans le cas où $V(x) = \langle x, x \rangle$ est le carré d'une norme euclidienne (car c'est ainsi qu'on l'appliquera). On renvoie au TD pour une preuve complète (en TD, on montre même une version plus faible du Théorème, où l'hypothèse $\forall x \in B, dV(x)(f(x)) \leq -\alpha(V(x) - V(0))$ est remplacée par l'hypothèse $dV(x)(f(x)) < 0$ pour tout $x \in B, x \neq 0$).

On suppose donc $V(x) = \langle x, x \rangle$, de sorte que

$$dV(x)(f(x)) = \langle x, f(x) \rangle.$$

Quitte à réduire B , on peut supposer que c'est une boule pour la norme $|\cdot|$ associée à V : $|x| := \sqrt{V(x)}$. Soit $a \in B$, soit $t \mapsto x(t; a)$ la solution maximale associée, définie sur $]T_-, T_+[$. On va montrer

$$T_+ = +\infty \text{ et } \forall t \geq 0, |x(t; a)| \leq a. \quad (2)$$

Pour $t \geq 0$, assez petit, on a $x(t; a) \in B$ par continuité (car $a \in B$ ouvert) donc

$$X := \{\tau \in]0, T_+[; \forall t \in [0, \tau[, x(t; a) \in B\}$$

est non-vide. Posons

$$\varphi(t) = V(x(t; a)) = \langle x(t; a), x(t; a) \rangle.$$

Si $\tau \in X$ on a, en dérivant : pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \langle x(t; a), \dot{x}(t; a) \rangle \\ &= \langle x(t; a), \dot{f}(x(t; a)) \rangle \\ &\leq -2\alpha \langle x(t; a), x(t; a) \rangle \\ &= -2\alpha \varphi(t).\end{aligned}$$

On en déduit $\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{-2\alpha t}$, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, \tau[, |x(t; a)| \leq e^{-\alpha t} |a|. \quad (3)$$

En particulier, si $\tau \in X$, on a en passant à la limite dans (3) :

$$|x(\tau; a)| = \lim_{t \uparrow \tau} |x(t; a)| \leq e^{-\alpha t} |a| < |a|.$$

Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x(t; a)| < |a|$, et en particulier $x(t; a) \in B$, pour tout $t \in]\tau - \alpha, \tau + \alpha[$. Cela montre que $]\tau - \alpha, \tau + \alpha[\subset X$ donc X est ouvert dans $]0, T_+[$. Montrons que X est fermé dans $]0, T_+[$: soit (τ_n) une suite de X convergeant vers $\tau \in]0, T_+[$. Si $t \in [0, \tau[$, alors il existe n tel que $t \in [0, \tau_n[$ et alors $x(t; a) \in B$. Cela montre que $\tau \in X$. Ainsi X est ouvert, fermé, non-vide dans $]0, T_+[$ connexe, il est donc égal à $]0, T_+[$.

En particulier, $|x(\cdot; a)|$ est bornée sur $]0, T_+[$. Par le Théorème de sortie de tout compact et son corollaire en dimension finie, on en déduit que $T_+ = +\infty$. De (3), on déduit alors la deuxième assertion de (2).

Cela suffit à montrer la stabilité : en effet si U est un voisinage de 0, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $U' := B(0, \varepsilon)$ est dans U . Alors toute trajectoire partant de U' reste dans U' donc dans U .

D'autre part, pour tout $a \in W = B$, on $x(t; a) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ d'après (3) : 0 est donc asymptotiquement stable. ■

Preuve du Théorème 2 : quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0)$, on peut supposer $x_0 = 0$.

Soit $u = df(0)$. D'après le Théorème 4, il existe $\alpha > 0$ et un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^d tels que $\langle u(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Posons $V(x) = \langle x, x \rangle$. Alors $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et V admet un minimum (global) strict en 0. Comme f est C^1 et $u = df(0)$, on a

$$f(x) = u(x) + o(x)$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - u(x)| \leq \alpha|x|$ pour tout $|x| < \varepsilon$, $|\cdot|$ étant la norme associée au produit scalaire adapté. Posons $U = B(0, \varepsilon)$. Pour $x \in U$, on a

$$\begin{aligned}dV(x)(f(x)) &= \langle x, f(x) \rangle \\ &= \langle x, u(x) \rangle + \langle x, f(x) - u(x) \rangle \\ &\leq -2\alpha|x|^2 + |x||f(x) - u(x)| \\ &\leq -\alpha|x|^2 \\ &= -\alpha V(x).\end{aligned}$$

Le Théorème 5 prouve alors que 0 est asymptotiquement stable (et même qu'il y a décroissance exponentielle vers 0). ■

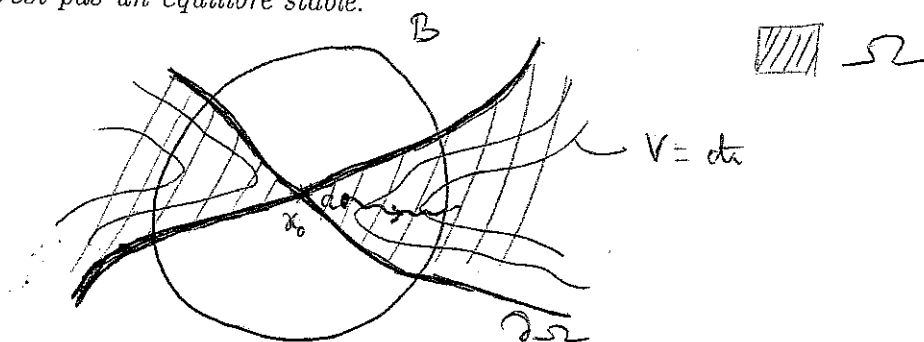
3.5 Preuve du Théorème 3 (non stabilité en première approximation)

La preuve est assez similaire à celle du Théorème de stabilité en première approximation. On commence par montrer un résultat de non-stabilité, qu'on applique ensuite à l'aide d'un produit scalaire adapté pour prouver le Théorème 3.

Théorème 6 (Théorème de non stabilité de Cetaev, 1934) Soit $\dot{x} = f(x)$ un système d'équations différentielles, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre du système et qu'il existe une boule ouverte B centrée en x_0 , $V \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d tels que :

- $x_0 \in \partial\Omega$,
- $V > 0$ sur Ω et $V = 0$ sur $\partial\Omega$,
- $\forall x \in \Omega \cap B, dV(x)(f(x)) > 0$.

Alors x_0 n'est pas un équilibre stable.



Preuve du Théorème 6 : en raisonnant par l'absurde, on suppose que x_0 est stable. Soit U un voisinage relativement compact de x_0 contenu dans B . Il existe un voisinage U' de x_0 tel que, pour tout $a \in U'$, $x(t; a)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et $x(t; a) \in U$. Comme $x_0 \in \partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$, l'intersection $\Omega \cap U'$ est non vide. Soit a dans cette intersection. Pour $t \geq 0$, assez petit, on a $x(t; a) \in \Omega$ par continuité donc

$$X := \{\tau > 0; \forall t \in [0, \tau], x(t; a) \in \Omega\}$$

est non-vide. Par continuité de $x(\cdot; a)$, X est ouvert dans $(0, +\infty)$. Posons

$$\varphi(t) = V(x(t; a)).$$

Si $\tau \in X$ on a, en dérivant : pour tout $t \in [0, \tau]$,

$$\dot{\varphi}(t) = dV(x(t; a))(\dot{x}(t; a)) = dV(x(t; a))(f(x(t; a))) > 0 \quad (4)$$

et en particulier $\varphi(\tau) > \varphi(0) > 0$. Soit (τ_n) une suite de X convergeant vers $\tau \in (0, +\infty)$. On a d'une part $x(\tau; a) \in \bar{\Omega}$, d'autre part

$$\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\tau_n) \geq \varphi(0).$$

Ainsi $V(x(\tau; a)) \geq V(a) > 0$ donc $x(\tau; a) \notin \partial\Omega$ car V s'annule sur le bord de Ω . Ainsi $x(\tau; a) \in \Omega$ et ceci montre que $\tau \in X$ qui est fermé dans $(0, +\infty)$. L'ensemble X est non-vide, ouvert, fermé dans $(0, +\infty)$ connexe : c'est donc $(0, +\infty)$ tout entier.

Par conséquent la trajectoire reste dans Ω et, pour tout $t \geq 0$, $x(t; a) \in K$ où

$$K := \{y \in \bar{U} \cap \bar{\Omega}; V(y) \geq V(a)\}.$$

L'ensemble K est compact comme intersection de \bar{U} compact avec $\bar{\Omega} \cap \{y \in \mathbb{R}^d, V(y) \geq V(a)\}$ fermé. De plus $K \subset U$ car V s'annule sur $\partial\Omega$ donc

$$\alpha := \min_{x \in K} dV(x)(f(x)) > 0.$$

Ceci montre avec (4) que $\dot{\varphi}(t) \geq \alpha$, donc $\lim \varphi(t) = +\infty$. On obtient une contradiction puisque

$$\varphi(t) = V(x(t; a)) \leq \sup_{x \in K} V(x) < +\infty$$

par continuité de V . ■

Preuve du Théorème 3 : on commence par se ramener au cas où $x_0 = 0$. Soit $u = df(0)$. On applique le Théorème 4 à $-u$: il existe une décomposition $\mathbb{R}^d = E_+ \oplus F$, $\alpha > 0$ et un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^d tels que

$$\begin{cases} \forall x \in E_+, & \langle u(x), x \rangle \geq 2\alpha \langle x, x \rangle, \\ \forall x \in F, & \langle u(x), x \rangle \leq \alpha \langle x, x \rangle. \end{cases}$$

Par hypothèse, E_+ est non trivial. Soit $|\cdot|$ la norme associée au produit scalaire. On pose

$$V(x) := |x_+|^2 - |\tilde{x}|^2, \quad x = x_+ + \tilde{x} \in \mathbb{R}^d = E_+ \oplus F \text{ et } \Omega := \{x \in \mathbb{R}^d; V(x) > 0\}.$$

Alors $0 \in \partial\Omega$, $V > 0$ sur Ω et $V = 0$ sur $\partial\Omega$. Il reste donc à trouver une boule ouverte B centrée en 0 telle que $dV(x)(f(x)) > 0$ sur $\Omega \cap B$ pour conclure d'après par le Théorème de non stabilité de Cetaev. Comme f est C^1 et $u = df(0)$, on a

$$f(x) = u(x) + o(x)$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - u(x)| \leq \frac{\alpha}{4}|x|$ pour tout $|x| < \varepsilon$. On pose $B = B(0, \varepsilon)$.

Si $h = h_+ + \tilde{h} \in \mathbb{R}^d$, on a

$$dV(x)(h) = 2(\langle x_+, h_+ \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{h} \rangle).$$

En particulier, comme E_+ et F sont orthogonaux pour le produit scalaire adapté, on a $|x_+|^2 + |\tilde{x}|^2 = |x|^2$ donc $|x_+|, |\tilde{x}| \leq |x|$, de même pour h et

$$\begin{aligned} |dV(x)(h)| &\leq 2(|\langle x_+, h_+ \rangle| + |\langle \tilde{x}, \tilde{h} \rangle|) \\ &\leq 2(|x_+||h_+| + |\tilde{x}||\tilde{h}|) \\ &\leq 4|x||h|. \end{aligned}$$

Si $x \in B$, on a donc

$$|dV(x)(f(x) - u(x))| \leq \alpha|x|^2.$$

D'autre part, comme E_+ et F sont stables par u , on a, pour $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} dV(x)(Ax) &= 2(\langle x_+, u(x)_+ \rangle - \langle \tilde{x}, u(\tilde{x}) \rangle) \\ &\geq 2(2\alpha|x_+|^2 - \alpha|\tilde{x}|^2) \\ &\geq 2\alpha|x_+|^2 \text{ car } |\tilde{x}| < |x_+|. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $x \in \Omega \cap B$,

$$\begin{aligned} dV(x)(f(x)) &= dV(x)(u(x)) + dV(x)(f(x) - u(x)) \\ &\geq 2\alpha|x_+|^2 - \alpha|x|^2 \\ &> 0 \text{ car } x \in \Omega \Rightarrow |x|^2 < 2|x_+|^2. \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du Théorème. ■